Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Littrow, Joseph Johann <<von>>,

Theoretische und practische Astronomie

Bd.: 3

Wien 1827

Astr.u. 101 m-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10061025-1

8° Astr. U. 101 m. -3

Littrow

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Theoretische
und
practische
Astronomie.

Von

J. J. Littrow,

Director der Sternwarte und Professor der Astronomie an der k. k. Universität in Wien, Mitglied der kais. russ. Academie der Wissenschaften in St. Petersburg, der kön. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, der grofsbrit. astr. Gesellschaft in London, der k. k. Landwirthschaftsgesellschaft in Wien, der Academie der Wissenschaften in Krakau, Ehrenmitglied der kais. Universität in Kasan etc.

Dritter Theil.

Wien.
Gedruckt und im Verlage bey J. B. Wallishausser.
1827.

Elemente

der

physischen

Astronomie.

Von

J. J. Littrow,

Director der Sternwarte und Professor der Astronomie an der k. k. Universität in Wien, Mitglied der kais. russ. Academie der Wissenschaften in St. Petersburg, der kön. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, der grofsbrit. astr. Gesellschaft in London, der k. k. Landwirthschaftsgesellschaft in Wien, der Academie der Wissenschaften in Krakau, Ehrenmitglied der kais. Universität in Kasan etc.

Bayerische Staatsbibliothek München

Wien.

Gedruckt und im Verlage bey J. B. Wallishausser.

1827.

360

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Die günstige Aufnahme der vor fünf Jahren erschienenen zwey ersten Theile dieses Werkes, welche die sogenannte sphärische und theoretische und das Wichtigste der practischen Astronomie enthalten, munterte mich auf, diese Arbeit zu vollenden, und ihr auch noch die Elemente der physischen Astronomie hinzuzufügen.

Ich wünsche, durch das Gegenwärtige die nähere Kenntniſs der *Mechanik des Himmels*, dem es als Propädeutik dienen soll, vorzubereiten, und durch das Ganze die Liebe zu der Königinn der Wissenschaften zu verbreiten, die das Höchste und Gröſste umfaſst, was Menschen zu ihrer Beschäftigung machen können.

Der Verfasser.

INHALT DES DRITTEN BANDES.

ERSTES KAPITEL.
Gleichgewicht der Körper.

Seite

Statik. Parallelogramm der Kräfte 4
Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte 7
Gleichung des Gleichgewichtes: virtuelle Geschwindigkeiten . . 9
Nähere Bestimmung des Gleichgewichts 11
Druck der Kräfte 13
Gleichgewicht eines Systems von körperlichen Punkten . . . 14
Für parallele Richtungen der Kräfte 15
Bedingungen des Gleichgewichtes für die Rotation 16
Gleichgewicht der Körper von gegebener Gestalt 18
Gleichgewicht eines Körpers von gegebener Gestalt 19
Für parallele Richtungen der Kräfte 20
Schwerpunkt, Bestimmung desselben 21
Gleichgewicht eines Punktes auf einer gegebenen Fläche . . . 23
Gleichgewicht eines Punktes auf einer gegebenen krummen Linie . 25
Besondere Fälle 26
Theorie der schiefen Ebene 27
Allgemeine Beyspiele 28
Theorie des Hebels 33
Kettenlinie 36
Bestimmung des Schwerpunktes in besondern Fällen 37
Bestimmung des Inhalts mehrerer Körper 40
Verschiedene Ausdrücke der hieher gehörenden Integrale . . . 42
Anwendung derselben 45

ZWEYTES KAPITEL.
Von der Bewegung überhaupt.

Allgemeine Grundsätze der Bewegung 47
Gleichungen der Bewegung eines Punktes 50
- - - - - - - - eines Systems von Punkten . . . 51
- - - - - - - - eines Körpers 52

Seite
Anwendung auf die Körper des Himmels 53
Bewegung eines Körpers um einen andern 53
Bewegung von zwey und mehreren, einer gegenseitigen Anziehung unterworfenen Körpern 54
Hindernisse der Auflösung dieses Problemes selbst in einem sehr einfachen Falle 55
Bestimmung der relativen Bewegung der Himmelskörper . . 56
Verschiedene Gestalten, welche man den Gleichungen der relativen Bewegungen geben kann 59
Besondere Methode zu diesem Zwecke 60
Anwendung derselben 63
Gestalt derselben Gleichungen zur Bestimmung der Bewegung des Mondes 65

DRITTES KAPITEL.

Allgemeine Gesetze der Bewegung.

Bewegung des Schwerpunktes 69
Erhaltung der Flächen 70
Erhaltung der lebendigen Kraft 72
Geschwindigkeit und Druck, wenn keine äufsern Kräfte wirken . 73
Grundsatz der kleinsten Wirkung 75
Ableitung der allgemeinen Gleichungen der Bewegung aus dem Grundsatze der kleinsten Wirkung 76
Kürzeste Curve auf einer gegebenen Fläche 77

VIERTES KAPITEL.

Bewegung eines Körpers von gegebener Gestalt.

Druck der rotirenden Körper auf ihre Axen 79
Bestimmung der freyen Rotationsaxen 80
Allgemeine Verwandlung der Coordinaten. 83
Jeder Körper hat wenigstens drey freye Axen. 85
Bestimmung der freyen Rotationsaxe für jeden gegebenen Augenblick, und Geschwindigkeit der Rotation 87
Bemerkungen über diese Auflösung 89
Moment der Trägheit eines Körpers 91
Moment der Trägheit in Beziehung auf die freyen Axen . . . 91
Wenn diese Momente einander gleich sind 92
Transposition dieses Momentes auf andere Axen 92
Bestimmung dieses Momentes für mehrere Körper von gegebener Gestalt 93
Rotation eines Körpers um eine fixe Axe, wenn blofs die constante Schwere auf ihn wirkt 99
Zusammengesetztes und einfaches Pendel. Mittelpunkt des Schwunges. Unveränderliches Pendel 102
Bewegung einer an einem Faden befestigten Kugel, und eines Cylinders um eine fixe horizontale Axe 103

Seite

Bestimmung der Oscillationen eines Körpers, welcher sich sehr nahe um eine seiner freyen Axen dreht 105

Stabilität dieser Rotationen 107

Richtung und Geschwindigkeit des ursprünglichen Stofses, der die Rotation der Planeten erzeugte 108

FÜNFTES KAPITEL.

Bewegung in geraden Linien.

Wenn keine äufseren Kräfte wirken 110

Wenn eine constante Kraft in einer beständigen Richtung wirkt . 111

Bewegung der schweren Körper auf der Oberfläche der Erde . 112

Bewegung der schweren Körper in gröfsern Entfernungen von der Erde 113

Bewegung der schweren Körper im Innern der Erde . . . 114

Wenn die Kraft sich wie die nte Potenz der Entfernung verhält . 115

Hieher gehörende Anwendung der particulären Integrale . . 116

Bewegung schwerer Körper an der Oberfläche der Erde und im widerstehenden Mittel 117

Wenn der Körper am Ende seines Falles eine elastische Ebene trifft 119

Wenn der Widerstand der Atmosphäre veränderlich ist . . 121

Bewegung der Körper auf einer Ebene unter der Wirkung der constanten Schwere 123

Relative Bewegung zweyer Körper auf geneigten Ebenen, wenn die Körper durch einen unausdehnbaren Faden verbunden sind . 125

Besondere Fälle dieser Bewegung 127

Die Aërolithen, als vom Monde ausgeworfene Körper betrachtet . 128

SECHSTES KAPITEL.

Bewegung in krummen Linien, wenn Kräfte wirken, deren Richtungen parallel sind.

Wenn die Kraft constant ist 132

Theorie der Wurfbewegung im freyen Raume 133

Wenn mehrere constante Kräfte wirken 135

Wenn der Körper sich in einem widerstehenden Mittel bewegt . 137

Wenn die Kraft nach irgend einem Gesetze veränderlich ist. Beyspiele 139

Bewegung der Körper auf der Oberfläche einer Kugel unter der Wirkung der constanten Schwere 141

Allgemeine Theorie der einfachen Pendeln 142

Besondere Fälle 144

Integration dieser Gleichungen, wenn das Pendel nur in einer Ebene schwingt 144

Folgerungen daraus 146

Besondere Fälle 147

Einfache Darstellung der Pendeltheorie 149

Integration der allgemeinen Gleichungen dieser Theorie . . . 152

Bewegung der Pendeln im widerstehenden Mittel 156

Seite
Einfache Theorie der Bewegung der Körper auf ebenen Curven unter der Wirkung einer veränderlichen Kraft 160
Bestimmung der Tautochrone 162
Bewegung im Kreise ohne äufsere Kräfte 163
Anwendungen auf die Körper an der Oberfläche der Erde . . 165
Aenderung der Länge des Sekundenpendels 167
Bestimmung der Brachystochrone 168
Bewegung zweyer unter einander verbundener Körper. Besondere Fälle 171

SIEBENTES KAPITEL.

Bewegung durch Centralkräfte.

Wenn auf den Körper eine veränderliche, nach einem fixen Punkt gerichtete Kraft wirkt 175
Besondere Fälle, wenn die Bahn gegeben ist 179
Bequeme Aenderung der hieher gehörenden Ausdrücke; Beyspiele 181
Auflösung der Aufgabe wenn die Kraft gegeben ist, die sich wie die Entfernung verhält 183
Wenn die Kraft sich wie verkehrt das Quadrat der Entfernung verhält 186
Auflösung der letzten Aufgabe ohne der Beschränkung, dafs die Bahn eine ebene Curve ist 189
Anwendung des vorhergehenden auf die Körper unseres Sonnensystemes 191
Bestimmung der Constanten 193
Nähere Bestimmung des Kegelschnittes, welchen die Planeten und Kometen beschreiben 195
Anwendung auf die Erde 198
- - - - auf den grofsen Kometen von 1680 200
Bestimmung derselben Constanten für andere Systeme . . . 201
Anwendung auf die auf der Erdoberfläche geworfenen Körper . 202
Identität der Schwere mit der Kraft, welche den Mond um die Erde bewegt 203
Verhältnifs der Flächenräume verschiedener Planeten . . . 203
Correction des dritten Gesetzes Keplers 204
Bestimmung der Massen der Planeten 204
- - - - der Schwere auf ihren Oberflächen 207
- - - - der Dichten der Planeten 207
Anziehung einer Kugel auf einen äufseren Punkt 208
Anziehung der Kugeln unter andern Gesetzen, als dem der Natur 211
Eine andere wichtige Eigenschaft des Naturgesetzes 215
Allgemeine Theorie der Anziehung eines Körpers auf einen gegebenen Punkt 216

ACHTES KAPITEL.

Problem der drey Körper, Vorbereitungen.

Von der Natur gegebene Erleichterungen der Aufgabe 223

Seite

Allgemeine Integration der hiehergehörenden zweyten Differentialgleichungen 224
Entwicklung eines Trinoms in Reihen 230

NEUNTES KAPITEL.

Problem der drey Körper.

Aufstellung der Gleichungen 242
Weitere Entwicklung derselben 245
Auflösung derselben in convergirende Reihen 249
Bestimmung der Werthe von R und $2\int dR + r\left(\frac{dR}{dr}\right)$ 253
Störung des Radius Vectors 261
Störung der Länge 265
Andere Formen dieser beyden Störungen 268
Störung der Breite 271
Anwendung des Vorhergehenden auf die Satelliten 272

ZEHNTES KAPITEL.

Säculäre Störungen.

Allgemeine Betrachtungen 276
Anwendung derselben 277
Nähere Entwicklung dieser Anwendungen auf die Störungen der Excentricität und der Länge der Perihelien 279
Auf die Störungen der Neigung und Knotenlänge 281
Darstellung der letzten Störungen in Beziehung auf die veränderliche Ekliptik 285
Andere Methode die säkulären Störungen zu bestimmen. . . . 287
Anwendung derselben 290
Für die Excentricität und Länge der Perihelien 296
Für die Neigung und Knotenlänge 298
Beständigkeit der grofsen Axe und der mittleren Bewegung der Planeten 299
Dritte Methode, die säkulären Bewegungen zu bestimmen . . 300
Gränzen dieser Störungen der Neigung und Knotenlänge . . 305
Gränzen dieser Störungen der Excentricität und der Länge der Perihelien 307
Daraus folgende merkwürdige Gleichungen 310
Anwendung dieser Bestimmung der Gränzen 311

EILFTES KAPITEL.

Anwendung des Vorhergehenden.

Periodische Störungen Merkurs 314
Säkuläre Störungen Merkurs 319
Aenderung des Aequinoctialpunkts und der Schiefe der Ekliptik durch die Wirkung der Planeten 324
Daraus folgende säkuläre Aenderung der Länge und Breite der Fixsterne 327

Seite
Zusammenstellung der Störungen der Planeten, säkuläre . . . 330
Periodische Störungen der Planeten 332

ZWÖLFTES KAPITEL.

Störungen des Mondes.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich hier nicht unmittelbar anwenden 340
Differentialgleichungen dieser Störungen 342
Vorläufige Integration derselben 343
Nähere Entwicklung jener Störungsgleichungen 346
Bestimmung ihrer Constanten 353
Bestimmung der mittleren Länge des Mondes durch die wahre . 357
Bestimmung der Horizontalparallaxe des Mondes 361
Inversionen dieser Reihen 362
Aufzählung der Störungen des Mondes 364
Beschleunigung der mittleren Bewegung des Mondes . . . 365
Andere Methode, die Ursache dieser Beschleunigung zu finden . 368
Säkuläre Bewegung der Knoten der Mondsbahn 372
Beständigkeit der Neigung dieser Bahn 374
Säkuläre Bewegung des Perigeums der Mondsbahn 375
Beständigkeit der Excentricität dieser Bahn 375
Die Sonne vermindert die Schwere des Mondes gegen die Erde . 376
Jährliche Gleichung des Mondes 377
Aenderungen der Normal- und Tangentialkraft des Mondes durch die Sonne 378
Folge der Abplattung der Erde in der Mondsbewegung . . . 379
Bestimmung der Sonnenparallaxe durch die Mondsbeobachtungen . 381
Bestimmung der Gröfse der Erde durch die Mondsbeobachtungen 382

DREYZEHNTES KAPITEL.

Theorie der Satelliten Jupiters.

Einleitung 384
Störungsgleichungen 385
Besondere Bemerkungen darüber 386
Bestimmung dieser Störungen zur Zeit der Finsternisse . . 387
Numerische Entwicklung dieser Störungen 389
Bestimmung der Massen der Satelliten 393
Endresultate der Störungen derselben 394
Rücksichten auf die Neigungen und Knoten ihrer Bahnen . . 395
Periodische Aenderungen derselben 397
Beobachtungen ihrer Finsternisse 400
Gestalt des Schattens Jupiters 401
Bogen, den der Satellit von seiner Opposition bis zum Anfang oder zum Ende der Finsternifs beschreibt 404
Bestimmung der Dauer der Finsternisse 405

Seit
Bestimmung der Neigung und des Knotens 405
Anwendung des Vorhergehenden auf die einzelnen Satelliten . 407
Wann die Satelliten nicht in dem Schatten, sondern in der Scheibe Jupiters eintreten 409
Scheinbare Ungleichheiten dieser Monde 411
Lichtgleichung 412

VIERZEHNTES KAPITEL.

Präcession und Nutation.

Allgemeine Gleichungen derselben 414
Weitere Entwicklung 416
Störungen der Rotation in Beziehung auf den Aequator. . . 418
Störungen der Rotation in Beziehung auf die feste Ekliptik . . 419
Wirkung der Sonne 422
Wirkung des Mondes 423
Gesammtstörung beyder Körper in Beziehung auf die feste Ekliptik 425
Dieselbe in Beziehung auf die bewegliche Ekliptik 426
Numerische Entwicklung dieser Gleichungen 427
Nachträgliche Betrachtungen 428
Numerische Entwicklung derselben 430
Zusammenstellung des Vorhergehenden 432
Aenderung des tropischen Jahres der Erde 433
Unveränderlichkeit der Pole der Erde 434
Aenderung der Dauer des mittleren Tages 435

FÜNFZEHNTES KAPITEL.

Anziehung des Ellipsoids.

Allgemeine Gleichung dieser Anziehung auf einen innern Punkt des Ellipsoids 437
Anziehung einer elliptischen Schale auf einen inneren Punkt . 438
Nähere Bestimmung der Anziehung des Ellipsoids auf einen inneren Punkt 440
Gestalt einer rotirenden Masse, bey welcher das Gleichgewicht besteht 441
Folgen daraus für die Abplattung der rotirenden Masse . . . 445
Anwendung auf Erde und Sonne 446
Attraction der Erde unter dem Pol und unter dem Aequator bey der ruhenden Erde 446
Bey der rotirenden Erde 447
Für jede Umlaufszeit gibt es wenigstens zwey Ellipsoiden, bey welchen das Gleichgewicht bestehen kann 448
Anwendung auf die Erde 449
Gränze des Gleichgewichts bey rotirenden abgeplatteten Ellipsoiden 451
Bey an den Polen verlängerten Ellipsoiden 452
Attraction eines Ellipsoids auf einen außer ihm gelegenen Punkt . 453

SECHSZEHNTES KAPITEL.

Refraction.

Seite
Fundamentalgleichungen der Refraction 461
Vereinfachung derselben 463
Bestimmung der Constanten 465
Correctionen der mittleren Refraction 469
Resultate des Vorhergehenden 472
Vergleichung mit den Ausdrücken von Simpson und Bradley . . 473
Bemerkungen über das Vorhergehende 475
Bessels Darstellung der Refraction 477
Einfache Berechnung des gröfsten Theiles derselben . . . 487
Laplace's Darstellung der Refraction 489
Delambre's und Carlini's Tafeln 492
Terrestrische Refraction 493
Schwächung des Lichts der Gestirne 496
Refractionstafeln 498

SIEBENZEHNTES KAPITEL.

Bewegung der Planeten im widerstehenden Mittel.

Aufstellung der Gleichungen 506
Daraus folgende Aenderung der Excentricität und der Länge des Periheliums 508
Bei einer nur wenig excentrischen Planetenbahn wird durch den Widerstand des Mittels sowohl die grofse Achse als auch die Excentricität immer kleiner 510

ACHTZEHNTES KAPITEL.

Abweichung freyfallender Körper von der Verticale.

Fundamentalgleichungen dieser Bewegung 512
Vereinfachung derselben 513
Integration dieser Gleichungen und Bestimmung der Constanten . 514
Uebereinstimmung der Resultate mit Benzenbergs Versuchen . 517
Fall der Körper in einem widerstehenden Mittel 517

DRITTER THEIL.

PHYSISCHE ASTRONOMIE.

ERSTES KAPITEL.

Statik.

§. 1.

Ein Körper bewegt sich, wenn er seinen Ort im Raume ändert. Die Ursache, welche ihn in Bewegung setzt, oder zu setzen sucht, heifst Kraft, und die Richtung dieser Kraft ist die gerade Linie, welche der Körper durch die Wirkung dieser Kraft in jedem Augenblicke zu beschreiben sucht. Die Mechanik ist die Lehre der Bewegung.

Werden mehrere Kräfte auf einen Körper angebracht, so können sie sich auch einander aufheben, so dafs keine Bewegung entsteht. Man sagt dann, diese Kräfte sind im Gleichgewichte.

Die Statik ist die Lehre des Gleichgewichtes. Der Zweck dieser Wissenschaft ist daher, die Gesetze aufzufinden, nach welchen diese gegenseitige Aufhebung der Kräfte vor sich geht, damit Gleichgewicht entstehe.

§. 2.

Wenn mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt wirken, ohne sich Gleichgewicht zu halten, so wird sich der Punkt in einer gewissen Richtung bewegen, und nichts hindert uns anzunehmen, dafs diese Bewegung von einer einzigen Kraft herrühre, die in der Richtung der Bewegung des Punktes auf diesen Punkt wirkt. Eine solche Kraft, die mehreren anderen gleichgeltend ist, heifst mittlere Kraft, die daher, in entgegengesetzter Richtung betrachtet, mit allen anderen äufseren Kräften im Gleichgewichte ist.

Wirken alle äufseren Kräfte in einer geraden Linie, einige derselben vor-, die anderen rückwärts, so ist offenbar die mittlere Kraft gleich der Summe derjenigen äufseren, die nach einer der beyden Richtungen dieser geraden Linie, weniger der Summe der anderen äufseren Kräfte, die nach der entgegengesetzten Richtung wirken, und die mittlere Kraft wird ihre Richtung mit der gröfseren dieser beyden Summen gemeinschaftlich haben. Sind aber beyde Summen gleich, so wird die mittlere Kraft Null seyn, oder die äufseren Kräfte werden sich unter einander das Gleichgewicht halten.

§. 3.

Zwey gleiche äufsere Kräfte wirken auf einen Punkt nach verschiedenen Richtungen. Man suche ihre mittlere Kraft.

Die mittlere Kraft wird in der Ebene der beyden äufseren liegen, und ihre Richtung wird den Winkel der Richtungen der beyden äufseren Kräfte in zwey gleiche Theile theilen, da kein Grund da ist, warum die mittlere Kraft die Ebene der beyden äufseren verlassen, oder warum sie sich der einen mehr, als der andern nähern sollte.

Es sollen die Schenkeln BA und CA des Winkels BAC $= 2x$ die Richtungen dieser äufseren Kräfte vorstellen, deren jede gleich P seyn soll. Die Linie AD, welche den Winkel BAC halbirt, wird nach dem Vorhergehenden die Richtung der mittleren Kraft seyn, deren zu suchende Gröfse gleich R seyn soll.

Da das Verhältnifs der beyden Kräfte $\frac{R}{P}$ nur von der Gröfse des Winkels x abhängen kann, so ist

$$\frac{R}{P} = \varphi x$$

wo φx eine Function von x bezeichnet, die bestimmt werden soll.

Zu beyden Seiten der Linie AB ziehe man durch den Punkt A zwey Linien Ab und $A\beta$, welche beyde denselben, übrigens willkührlichen Winkel y mit der Linie AB bilden. Eben so ziehe man zu beyden Seiten der Linie AC die Linie Ac und $A\gamma$ unter denselben Winkeln, so dafs also $bAB = BA\beta = cAC = CA\gamma = y$ ist.

Zerlegt man die Kraft P, die nach AB wirkt, in zwey gleiche äufsere nach Ab und $A\beta$, deren jede Q heifsen soll, so ist wieder

$$\frac{P}{Q} = \varphi y$$

Zerlegt man eben so die Kraft P, die nach AC wirkt, in zwey gleiche äufsere nach Ac und $A\gamma$, so werden die zwey Kräfte P nun durch die vier Kräfte Q vorgestellt werden, und die mittlere Kraft dieser vier letzten Q mufs mit der mittleren Kraft R der beyden vorhergehenden P in ihrer Richtung zusammenfallen.

Heifst aber Q' die mittlere der zwey Kräfte Q, die nach Ab und Ac wirken, so ist, wenn $A\beta$ und $A\gamma$ die beyden äufsersten jener Linien sind,

$$bAD = cAD = x - y$$

also auch

$$\frac{Q'}{Q} = \varphi (x - y)$$

Heifst endlich Q'' die mittlere der zwey Kräfte Q, die nach $A\beta$ und $A\gamma$ wirken, so ist auch

$$\frac{Q''}{Q} = \varphi\,(x + y)$$

Da aber die beyden Kräfte Q' und Q'' nach derselben Linie AD gerichtet sind, so ist ihre mittlere Kraft, die zugleich die mittlere Kraft der vier äuſseren Kräfte Q ist, gleich der Summe von Q' und Q'', oder es ist

$$R = Q' + Q''$$

oder da $R = P.\,\varphi\,x = Q.\,\varphi\,x.\,\varphi\,y$ war, so ist

$$\varphi\,x\,\varphi\,y = \varphi\,(x - y) + \varphi\,(x + y)$$

Entwickelt man die Ausdrücke $\varphi\,(x - y)$ und $\varphi\,(x + y)$ nach dem bekannten Taylor'schen Theoreme, so geht die letzte Gleichung in folgende über

$$\varphi\,y = 2\left(1 + \frac{y^2\,d^2\,\varphi\,x}{1.2\,\varphi\,x.\,dx^2} + \frac{y^4\,d^4\,\varphi\,x}{1.2.3.4\,\varphi\,x.\,dx^4} + \ldots\right)$$

Da aber $\varphi\,y$ die Gröſse x nicht enthalten kann, so müssen die Gröſsen

$$\frac{d^2\,\varphi\,x}{\varphi\,x.\,dx^2},\ \frac{d^4\,\varphi\,x}{\varphi\,x.\,dx^4}\ \ldots\ldots$$

von x ganz unabhängig, oder sie müssen constant seyn.

Sey also

$$\frac{d^2\,\varphi\,x}{\varphi\,x.\,dx^2} = b,$$

so ist

$$\frac{d^4\,\varphi\,x}{dx^4} = \frac{b.\,d^2\,\varphi\,x}{dx^2} = b^2\,\varphi\,x$$

$$\frac{d^6\,\varphi\,x}{dx^6} = \frac{b^2\,d^2\,\varphi\,x}{dx^2} = b^3\,\varphi\,x \text{ u. f.}$$

und man erhält

$$\varphi\,y = 2\left(1 + \frac{b\,y^2}{1.2} + \frac{b^2\,y^4}{1.2.3.4} + \frac{b^3\,y^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right)$$

oder wenn man $b = -a^2$ setzt,

$$\varphi\,y = 2\left(1 - \frac{a^2\,y^2}{1.2} + \frac{a^4\,y^4}{1.2.3.4} - \ldots\right)$$

das heiſst also

$\varphi\,y = 2\,\text{Cos}\,a\,y$, und daher auch

$\varphi\,x = 2\,\text{Cos}\,a\,x$, und endlich

$R = 2\,P\,\text{Cos}\,a\,x$

I. Um die Constante a zu bestimmen, sey x ein rechter Winkel, so sind beyde Kräfte einander entgegengesetzt, also $R = 0$, oder $\text{Cos}\,(90.\,a) = 0$, also ist a eine ganze ungerade Zahl. Allein die Gröſse a kann nicht gröſser als die Einheit seyn. Denn ist z. B. $a = 3$, so würde die mittlere Kraft R gleich

Null seyn für $x = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ$ oder die beyden gleichen äufseren Kräfte würden im Gleichgewichte seyn, ohne sich entgegengesetzt zu seyn, was unmöglich ist; und da diefs für jede andere ganze ungerade Zahl, die Einheit ausgenommen, der Fall ist, so ist $a = 1$ und man hat

$$R = 2 P \operatorname{Cos} x$$

Daraus folgt also, dafs die mittlere Kraft R durch die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten die äufseren Kräfte sind, ihrer Richtung sowohl als ihrer Gröfse nach, vorgestellt wird.

II. Es seyen nun P, Q zwey ungleiche Kräfte, deren Richtungen einen rechten Winkel unter einander bilden. Sind x und 90 — x die Winkel, welche sie mit ihrer mittleren Kraft R bilden, und zieht man durch ihren Vereinigungspunkt eine gerade Linie, die mit der Richtung der P den Winkel x, also mit der Richtung der Q den Winkel 90 — x bildet, so wird man, nach (I), die Kraft P in zwey gleiche äufsere auflösen können, deren Richtungen in jener geraden Linie und in der Richtung der Kraft R liegen, und deren jede gleich $\frac{1}{2}$ P. sec. x ist. Eben so wird sich die Kraft Q in zwey andere nach der Richtung jener Geraden und der Kraft R zerlegen lassen, deren jede gleich $\frac{1}{2}$ Q sec (90 — x) $= \frac{1}{2}$ Q cosec. x ist. Dadurch hat man also die Kraft R in vier andere zerlegt, von welchen die in der Richtung der R addirt die Kraft R selbst geben, während die in der Richtung jener Geraden sich gegenseitig aufheben. Man hat also:

$$\tfrac{1}{2} P \operatorname{Sec.} x + \tfrac{1}{2} Q \operatorname{Cosec.} x = R \quad \text{und}$$

$$\tfrac{1}{2} P \operatorname{Sec.} x - \tfrac{1}{2} Q \operatorname{Cosec.} x = 0$$

woraus folgt

$$P = R \operatorname{Cos} x$$

$$Q = R \operatorname{Sin} x$$

so dafs also auch hier die mittlere Kraft die Diagonale des Parallelogramms ist, dessen Seiten die beyden äufseren Kräfte sind.

III. Es seyen endlich P, Q zwey ungleiche Kräfte, welche mit ihrer mittleren Kraft die willkührlichen Winkel y und x bilden. Zerlegt man P in zwey rechtwinklichte Kräfte p und p′, deren die erste mit R zusammen fällt, so ist nach (II)

$$p = P \operatorname{Cos} y$$

$$p' = P \operatorname{Sin} y$$

Und wenn man eben so Q in zwey rechtwinklichte Kräfte q und q′ zerlegt, deren die erste q mit R zusammen fällt, so ist

$$q = Q \operatorname{Cos} x$$

$$q' = Q \operatorname{Sin} x$$

Es ist aber $p + q = R$ und $p' - q' = 0$, oder wenn man die vorhergehenden Werthe dieser Gröfsen substituirt,

$$P \operatorname{Cos} y + Q \operatorname{Cos} x = R \text{ und}$$
$$P \operatorname{Sin} y - Q \operatorname{Sin} x = o$$

und aus diesen beyden Gleichungen folgt

$$P = \frac{R \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin}(x+y)}$$
$$Q = \frac{R \operatorname{Sin} y}{\operatorname{Sin}(x+y)}$$

oder immer ist die mittlere Kraft der Gröſse und Richtung nach die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten die äuſseren Kräfte vorstellen.

IV. Da endlich die Seitenflächen eines Parallelepipedums ebenfalls Parallelogramme sind, so läſst sich auch jede Kraft in drey andere auflösen, welche ihrer Gröſse und Lage nach durch die drey Seitenlinien eines Parallelepipedums vorgestellt werden, von welchen jene mittlere Kraft die Diagonale ist.

In dem Folgenden werden wir immer nur rechtwinklichte Parallelogramme und Parallelepipeda betrachten, da diese, wie man sehen wird, zur Auflösung aller Aufgaben hinreichen, und zugleich unter allen anderen zur Rechnung die bequemsten sind.

V. Sind also X, Y, Z drey äuſsere Kräfte, deren Richtungen untereinander senkrecht sind, auf einen Punkt angebracht, und heiſst R die mittlere Kraft, so hat man, wenn man durch α, β, γ die Winkel bezeichnet, welche diese mittlere Kraft resp. mit den Richtungen der Kräfte X, Y, Z bildet, nach dem Vorhergehenden

$$\left.\begin{array}{l} X = R \operatorname{Cos} \alpha \\ Y = R \operatorname{Cos} \beta \\ Z = R \operatorname{Cos} \gamma \end{array}\right\} \ldots (I)$$

und da $\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma = 1$ ist,

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \ldots (II)$$

Sind also z. B. die äuſseren Kräfte X, Y, Z gegeben, so wird die Gleichung (II) die Gröſse der mittleren Kraft, und die Gleichungen (I) werden die Richtung der mittleren Kraft durch die Winkel α, β, γ geben. Ist eine der äuſseren Kräfte, z. B., $Z = o$, so ist R die mittlere Kraft der beyden äuſseren Kräfte X und Y, und man hat

$$X = R \operatorname{Cos} \alpha$$
$$Y = R \operatorname{Cos} \beta$$
$$R^2 = X^2 + Y^2$$

§. 4.

Auf einen Punkt wirken mehrere Kräfte P, P′, P″.... nach verschiedenen Richtungen. Seyen α, β, γ, die Winkel, welche die Richtung der Kraft P mit den Achsen der rechtwinklichten

Coordinaten x, y, z bildet, und eben so $\alpha' \beta' \gamma'$ für P′ und $\alpha'' \beta'' \gamma''$ für P″ u. f. Zerlegt man jede dieser Kräfte in drey andere unter sich senkrechte, den drey Achsen der Coordinaten parallele Kräfte, so erhält man für die drey äufseren Kräfte von P (§. 3. V)

P Cos α nach x, P Cos β nach y, P Cos γ nach z und eben so für die drey äufseren Kräfte von P′.. P′ Cos α' nach x, P′ Cos β' nach y, P′ Cos γ' nach z u. s. w. Summirt man die Kräfte, deren Richtungen einander parallel sind, so erhält man statt allen diesen Kräften P, P′, P″.... drey andere X, Y, Z, welche letztere unter sich senkrecht und den drey Achsen der Coordinaten parallel sind, so dafs man hat

$$X = P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + \ldots\ldots$$
$$Y = P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + \ldots\ldots$$
$$Z = P \operatorname{Cos} \gamma + P' \operatorname{Cos} \gamma' + P'' \operatorname{Cos} \gamma'' + \ldots\ldots$$

welche Ausdrücke man der Kürze wegen so schreiben kann

$$X = \Sigma P \operatorname{Cos} \alpha$$
$$Y = \Sigma P \operatorname{Cos} \beta$$
$$Z = \Sigma P \operatorname{Cos} \gamma$$

Heifst dann R die mittlere aller dieser Kräfte P, P′, P″.... oder was dasselbe ist, die mittlere der drey Kräfte X, Y, Z, und sind a, b, c die Winkel, welche die Richtung dieser mittleren Kraft R mit den Achsen der x, y, z bildet, so hat man

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\operatorname{Cos} a = \frac{X}{R}, \quad \operatorname{Cos} b = \frac{Y}{R}, \quad \operatorname{Cos} c = \frac{Z}{R}$$

aus welchen Gleichungen man daher die Gröfse und Richtung der mittleren Kraft R bestimmen kann.

§. 5.

Durch einen Punkt A seyen mehrere gerade Linien AP, AP′, AP″.... in verschiedenen Ebenen gezogen, welche die verschiedenen Kräfte P, P′, P″.... ausdrücken sollen, die in diesen Richtungen auf den Punkt A wirken. Eine gerade Linie AR durch denselben Punkt stelle die Gröfse und Richtung der mittleren Kraft R aller jener Kräfte vor.

Endlich ziehe man durch denselben Punkt A in irgend einer willkührlichen Richtung eine gerade Linie AB.

Diefs vorausgesetzt kann man jede Kraft R, P, P′... in zwey andere zerlegen, deren eine parallel mit der Linie AB, und deren die andere auf diese Linie senkrecht ist, und da R die mittlere Kraft aller anderen Kräfte P, P′, P″.... ist, so wird auch die Kraft R nach der Richtung der Linie AB zerlegt, gleich der Summe aller Kräfte P, P′, P″.... seyn, wenn diese ebenfalls nach der Richtung der Linie AB zerlegt werden. Sind also α,

α', α''.... die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P, P', P''.... mit der Linie AB bilden, und ist eben so a der Winkel der Richtung der mittleren Kraft R mit derselben Linie AB, so hat man

$$R \operatorname{Cos} a = P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + \ldots.$$

Fällt man aber von einem willkührlichen Punkte C der Linie AB Lothe auf die Richtungen jener Kräfte R, P, P'.... d. h. Lothe auf die Linien AR, AP, AP', AP''... und nennt man resp. r, p, p', p''.... die Projectionen der Linie AC auf diese Richtungen AR, AP, AP', AP''... so erhält man

$$r = AC \operatorname{Cos} a,\ p = AC \operatorname{Cos} \alpha,\ p' = AC \operatorname{Cos} \alpha',\ p'' = AC \operatorname{Cos} \alpha'' \ldots$$

also auch, wenn man diese Werthe von Cos a, Cos α, Cos α'... in der vorhergehenden Gleichung substituirt,

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots.$$

Es ist aber klar, dafs diese letzte Gleichung auch dann noch statt haben wird, wenn der Punkt C unendlich nahe bey A genommen wird, oder wenn die Linie AC unendlich klein ist, wodurch dann auch die Projectionen r, p, p'... der Linie AC auf die Richtungen AR, AP, AP'... unendlich klein werden. Drückt man daher, dem gewöhnlichen Gebrauche gemäfs, diese unendlich kleinen Projectionen durch dr, dp, dp'.... aus, so geht die letzte Gleichung in folgende über

$$R\,dr = P\,dp + P'd'p' + P''d''p'' + \ldots. \quad \text{(III)}$$

Nimmt man also an, dafs während einem Augenblicke durch die Wirkung jener Kräfte der Punkt A in der Richtung der mittleren Kraft AR durch den unendlich kleinen Raum dr gegangen sey, während ihn die Kraft P allein durch den Raum dp in der Richtung der Linie AP; die Kraft P' allein durch den Raum dp' in der Richtung der Linie AP' u. s. w. getrieben hätte, so hat zwischen diesen unendlich kleinen Räumen dr, dp, dp'... und den Kräften R, P, P'.... immer die Gleichung (III) statt.

I. Sollen aber die Kräfte P, P', P''... um den Punkt A im Gleichgewichte seyn, sich gegenseitig aufheben, so werden sie keine Bewegung dieses Punktes hervorbringen, oder die mittlere Kraft R wird gleich Null seyn. Man hat daher für das Gleichgewicht

$$o = P\,dp + P'dp' + P''dp'' + \ldots. \quad \text{(IV)}$$

oder für das Gleichgewicht ist die Summe der Produkte jeder Kraft in den unendlich kleinen Raum, welchen der Punkt nach der Richtung jeder dieser Kräfte in einem Augenblicke zu beschreiben sucht, gleich Null.

Man nennt diese unendlich kleinen Räume, welche jeder Punkt, der im Gleichgewichte ist, in dem Falle, dafs sein Gleichgewicht gestört werden sollte, im ersten Augenblicke der

Störung nach der Richtung jeder der störenden Kräfte beschreiben würde, die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes. Die Gleichung (IV) enthält also den Grundsatz der virtuellen Geschwindigkeiten, d. h. den Satz, dafs für das Gleichgewicht eines Punktes, auf den mehrere Kräfte wirken, die Summe der Produkte jeder Kraft in ihre virtuelle Geschwindigkeit gleich Null sey. Dieser Grundsatz ist einer der einfachsten und fruchtbarsten in der Mechanik, und er gilt nicht blofs, wenn der Punkt, auf welchen die Kräfte wirken, frey, d. h. durch äufsere Bedingungen unbeschränkt ist, sondern auch dann, wenn der Punkt gezwungen ist, auf einer Fläche oder auf einer krummen Linie zu bleiben, ja er läfst sich auch, wie wir sehen werden, auf ein System mehrerer Punkte, die auf irgend eine Art unter einander verbunden sind, also auch auf Körper von irgend einer Gestalt anwenden.

§. 6.

Welches immer diese Kräfte seyn mögen, so werden sie doch so betrachtet werden können, als ob sie von einem Punkte ausgingen, der irgend wo in der Richtung dieser Kraft liegt. Wir wollen diesen Punkt den Mittelpunkt der Kraft nennen, und durch a, b, c die drey rechtwinklichten Coordinaten dieses Mittelpunktes, so wie durch x, y, z, die den vorigen parallelen Coordinaten des Punktes bezeichnen, auf welchen jene Kraft wirkt. Für eine zweyte, dritte Kraft werden wir diese a, b, c, so wie für einen zweyten, dritten.... Punkt die x, y, z mit einen, zwey.... Strichen bezeichnen.

Diefs vorausgesetzt ist die Entfernung des Mittelpunktes der Kraft P von dem Punkte des Systemes, auf welchen diese Kraft wirkt,

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

also auch, wenn a, b, c constante Gröfsen sind, d. h. wenn die Kraft P keine innere Kraft des Systemes ist, sondern von einem Punkte aufser dem Systeme kömmt,

$$dp = \frac{x-a}{p}\,dx + \frac{y-b}{p}\,dy + \frac{z-c}{p}\,dz \text{ oder}$$

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(\frac{dp}{dz}\right)dz \text{ oder endlich}$$

$$dp = dx\,\mathrm{Cos}\,\alpha + dy\,\mathrm{Cos}\,\beta + dz\,\mathrm{Cos}\,\gamma$$

wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die Richtung der Kraft P mit den Achsen der x, y, z bildet, und wo man wegen der rechtwinklichten Lage dieser Achsen hat

$$\mathrm{Cos}^2\,\alpha + \mathrm{Cos}^2\,\beta + \mathrm{Cos}^2\,\gamma = 1$$

Ganz ähnliche Ausdrücke wird man für p', dp', p'', dp''. . . . erhalten. Substituirt man dann diese Werthe von dp, dp', dp''.... in der allgemeinen Gleichung (IV) des Gleichgewich-

tes, so wird man, wenn das System ganz frey ist, d. h. wenn die Coordinaten x, y, z, x'... von einander unabhängig sind, auch die Gröfsen dx, dy, dz, dx'... als von einander unabhängig betrachten, also in jener Gleichung die Faktoren von dx, dy, dz, dx'... jeden für sich gleich Null setzen, wodurch man eben so viele Gleichungen als Coordinaten erhält, aus welchen Gleichungen man daher die Werthe dieser Coordinaten durch Elimination bestimmen, d. h. die Orte der Punkte des Systemes angeben wird, welche diese Punkte für den Fall des Gleichgewichts einnehmen müssen.

I. Ist aber das System nicht frey, sondern gewissen Bedingungen unterworfen, sollen z. B einige dieser Punkte auf gegebenen Flächen oder auf gegebenen krummen Linien bleiben, so wird man durch die Gleichungen dieser Flächen oder Linien aus der vorhergehenden Gleichung des Gleichgewichtes so viele Differenzialien dx, dy, dz, dx'.... als möglich eliminiren, und dann die übrigbleibenden als von einander unabhängig betrachten, also die Faktoren der übrig bleibenden Differenzialien jeden für sich gleich Null setzen, wodurch man eine Anzahl von Gleichungen erhält, die mit den vorigen Bedingungsgleichungen verbunden, ihrer Anzahl nach wieder gleich der Zahl aller Coordinaten x, y, z, x'.... seyn werden, und aus welchen sich daher wieder der Ort eines jeden Punktes des Systemes für das Gleichgewicht, wie zuvor, bestimmen lassen wird.

II. Denselben Zweck kann man aber, wie aus der Theorie der Elimination folgt, einfacher dadurch erreichen, dafs man die gegebenen Bedingungsgleichungen, jede mit einem unbestimmten Coefficienten multiplicirt, der allgemeinen Gleichung (IV) des Gleichgewichtes hinzufügt, und dann die Differenzialien dx, dy, dz, dx'.... alle als unter einander unabhängig betrachtet, wodurch man so viele Gleichungen als Coordinaten erhält, die aber durch die Elimination jener unbestimmten Coefficienten auf eine bestimmte Anzahl zurück geführt werden.

Sind also $dL = o$, $dL' = o$.... diese Bedingungsgleichungen, in Functionen der Coordinaten x, y, z, x', y', z'... ausgedrückt, und sind λ, λ'.... diese unbestimmten Coefficienten, so wird die allgemeine Gleichung (IV) das Gleichgewichtes seyn

$$o = Pdp + P'd'p' + P''dp'' + \ldots.$$
$$+ \lambda dL + \lambda' dL' + \lambda'' dL'' + \ldots \quad (V)$$

und diese Gleichung gibt für jede Coordinate z. B. x eine Gleichung der Form

$$o = P\left(\frac{dp}{dx}\right) + P'\left(\frac{dp'}{dx'}\right) + P''\left(\frac{dp''}{dx''}\right) + \ldots$$
$$+ \lambda\left(\frac{dL}{dx}\right) + \lambda'\left(\frac{dL'}{dx'}\right) + \lambda''\left(\frac{dL''}{dx''}\right) + \ldots \quad (V')$$

und die Anzahl dieser letztern Gleichungen wird der Anzahl aller Coordinaten x, y, z, x'.... gleich seyn. Hätte man z. B. nur drey Punkte, deren jeder auf einer gegebenen Fläche zu bleiben gezwungen seyn soll, so sey $L = o$ die Gleichung der Fläche des ersten, $L' = o$ des zweyten und $L'' = o$ des dritten Punktes. Diese drey Gleichungen, verbunden mit den neun Gleichungen der Form (V'), werden hinreichen, die zwölf unbekannten Gröfsen $\lambda\ \lambda'\ \lambda''$, $x\ x'\ x''$, $y\ y'\ y''$ und $z\ z'\ z''$ zu bestimmen. Wäre aber der erste Punkt gezwungen auf einer krummen Linie zu bleiben, deren Gleichungen $L = o$, $L' = o$ sind, und soll eben so der zweyte Punkt auf der Linie $L'' = o$, $L''' = o$ und der dritte auf der Linie $L^{iv} = o$, $L^{v} = o$ bleiben, so werden diese sechs Gleichnngen verbunden mit den neun Gleichungen der Form (V') ebenfalls hinreichen, die neun Coordinaten $x\ x'\ldots$ und die sechs Gröfsen $\lambda\ \lambda' \ldots \lambda^{v}$ zu bestimmen, und also das Problem vollständig aufzulösen u. s. f. für ähnliche Fälle.

III. Das in II gezeigte Verfahren, auf die Nebenbedingungen der Aufgabe Rücksicht zu nehmen, hat noch den Vortheil, daſs es zugleich die Wirkungen und Gegenwirkungen angibt, welche aus diesen Bedingungen auf die Punkte des Systems entspringen.

Da nämlich, nach dem Vorhergehenden, die Gröfse dp den kleinen Raum bezeichnet, welchen der Punkt, auf den die Kraft P wirkt, nach der Richtung dieser Kraft im ersten Augenblicke nach der Störung des Gleichgewichtes zurücklegt, so wird, wenn $dp = o$ ist, dieser Punkt sich nicht anders, als blofs in einer Richtung bewegen können, welche senkrecht auf die Richtung jener Kraft ist, und $dp = o$ wird daher die Gleichung einer Fläche seyn, auf der die Richtung der Kraft senkrecht ist.

Setzen wir umgekehrt voraus, daſs die Kraft P senkrecht auf eine Fläche wirke, deren Gleichung ist

$$dL = o \text{ oder } \left(\frac{dL}{dx}\right) dx + \left(\frac{dL}{dy}\right) dy + \left(\frac{dL}{dz}\right) dz = o.$$

Damit diese Gleichung mit der folgenden

$$(x-a)\, dx + (y-b)\, dy + (z-c)\, dz = o$$

welche aus der Voraussetzung $dp = o$ folgt, zusammenfalle, wird man haben

$$x-a = \left(\frac{dL}{dx}\right),\ y-b = \left(\frac{dL}{dy}\right),\ z-c = \left(\frac{dL}{dz}\right)$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den vorhergehenden Werthen von p und dp (§. 6.), so erhält man

$$dp = \frac{dL}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}$$

Wenn also die Kraft P senkrecht auf die Fläche dL = o wirkt, so ist das Produkt derselben in ihre virtuelle Geschwindigkeit

$$Pdp = \frac{PdL}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}$$

Soll daher in der Gleichung (V) die Gleichung dL = o die Bedingungsgleichung des Punktes seyn, dessen Coordinaten x y z sind, so kann man dem Gliede λdL jener Gleichung auch die Form geben

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2} \cdot \frac{dL}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}$$

und so ist klar, daſs dieses Glied λdL, so wie die vorhergehenden Pdp, $P'dp'$.... das Produkt einer Kraft in ihre virtuelle Geschwindigkeit vorstellt, wo die virtuelle Geschwindigkeit

$$\frac{dL}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}$$

und wo die Kraft

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$$

seyn wird, und wo endlich die Richtung dieser Kraft senkrecht auf die Fläche dL = o ist. Dasselbe wird auch von den folgenden Gliedern $\lambda' dL'$..... gelten. Jede Bedingunsgleichung ist also immer einer neuen Kraft gleichgeltend, die nach einer gegebenen Richtung an das System angebracht wird, so daſs, wenn man diese Kraft auf die oben gezeigte Art in die allgemeine Gleichung (V) des Gleichgewichtes aufnimmt, man dann das ganze System als frey, oder als keiner weiteren äuſseren Bedingung unterworfen annehmen kann. Eigentlich drücken diese neuen Kräfte bloſs den Widerstand oder den D r u c k aus, welchen die Punkte des Systems durch die Wirkung dieser äuſseren Bedingungen erfahren, und es ist, wie oben gesagt wurde, ein besonderer Vortheil dieser Methode der unbestimmten Coefficienten, daſs sie uns zugleich den Werth oder die Gröſse dieses Widerstandes geben.

§. 7.

Suchen wir das Gleichgewicht eines Systems von mehreren Körpern oder Punkten, die auf irgend eine Art unter einander

verbunden sind, und auf welche mehrere ihrer Gröſse und Richtung nach gegebene Kräfte wirken.

Sind P, P′, P″.... diese Kräfte, und p, p′, p″.... die Richtungen derselben, so hat man, wenn keine äuſseren Bedingungen die Bewegung der Punkte beschränken, nach den Gleichungen (IV) oder (V) für das Gleichgewicht

$$o = Pdp + P'dp' + P''dp'' +$$

Sind aber x y z die drey Coordinaten des ersten dieser Punkte, x′ y′ z′ die des zweyten u. f. sind eben so a b c die den vorigen parallelen Coordinaten des Mittelpunktes der Kraft P, und eben so a′ b′ c′ für P′ u. f. so hat man

$$p^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$
$$p'^2 = (x'-a')^2 + (y'-b')^2 + (z'-c')^2 \text{ u. f.}$$

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in einen dieser Punkte selbst, z. B. in den ersten, und bezeichnet die von diesem an gezählten Coordinaten der anderen Punkte durch ξ υ ζ, ξ' υ' ζ' u. f. so kann man annehmen

$$x' = x + \xi \qquad y' = y + \upsilon \qquad z' = z + \zeta$$
$$x'' = x + \xi' \qquad y'' = y + \upsilon' \qquad z'' = z + \zeta' \text{ u. f.}$$

Nennt man endlich wie in §. 4. α β γ die Winkel der Linie p mit den Achsen der x y z, und α' β' γ' die Winkel der Linie p′ mit denselben Achsen u. s. w. so hat man

$$dp = dx \operatorname{Cos}\alpha + dy \operatorname{Cos}\beta + dz \operatorname{Cos}\gamma$$
$$dp' = (dx + d\xi) \operatorname{Cos}\alpha' + (dy + d\upsilon) \operatorname{Cos}\beta' + (dz + d\zeta) \operatorname{Cos}\gamma'$$
$$dp'' = (dx + d\xi') \operatorname{Cos}\alpha'' + (dy + d\upsilon') \operatorname{Cos}\beta'' + (dz + d\zeta') \operatorname{Cos}\gamma'' \text{ u. f.}$$

Substituirt man diese Werthe von dp, dp′, dp″.... in der vorhergehenden Gleichung des Gleichgewichtes, so erhält man, wenn man die Gröſse $P \operatorname{Cos}\alpha + P' \operatorname{Cos}\alpha' + P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + \ldots$ der Kürze wegen durch $\Sigma P \operatorname{Cos}\alpha$ bezeichnet

$$\left.\begin{aligned} o = {} & dx.\, \Sigma P \operatorname{Cos}\alpha + dy.\, \Sigma P \operatorname{Cos}\beta + dz.\, \Sigma P \operatorname{Cos}\gamma \\ & + d\xi.\, P' \operatorname{Cos}\alpha' + d\upsilon.\, P' \operatorname{Cos}\beta' + d\zeta.\, P' \operatorname{Cos}\gamma' \\ & + d\xi'.\, P'' \operatorname{Cos}\alpha'' + d\upsilon'.\, P'' \operatorname{Cos}\beta'' + d\zeta'.\, P'' \operatorname{Cos}\gamma'' + \ldots \end{aligned}\right\} \text{(VI)}$$

Da wir nun im Allgemeinen die Gröſsen dp, dp′... dx, dy, dz... $d\xi$, $d\upsilon$, $d\zeta$... als von einander unabhängig betrachten, wenn uns nicht durch die besonderen Bedingungen der Aufgabe ein Gesetz der Abhängigkeit dieser Gröſsen gegeben wird, so kann der letzten Gleichung nur dann genug geschehen, wenn wir jedes Glied derselben für sich gleich Null setzen. Die ersten drey Glieder geben so

$$o = dx.\, \Sigma P \operatorname{Cos}\alpha$$
$$o = dy.\, \Sigma P \operatorname{Cos}\beta$$
$$o = dz.\, \Sigma P \operatorname{Cos}\gamma$$

Ist also das System frey, oder jeder Punkt desselben nach der Richtung der drey Coordinaten gleich beweglich, so können die Gröfsen dx, dy, dz nicht gleich Null seyn, oder den letzten drey Gleichungen kann nur dann genug geschehen, wenn man hat

$$\left.\begin{aligned} o &= \Sigma P \operatorname{Cos} \alpha \\ o &= \Sigma P \operatorname{Cos} \beta \\ o &= \Sigma P \operatorname{Cos} \gamma \end{aligned}\right\}(A)$$

und da diese drey Gleichungen (A) von der Figur und der besonderen Art des Zusammenhanges des Systemes unabhängig sind, so sind sie zugleich die gesuchten allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes.

Die übrigen aus jener Hauptgleichung folgenden Bedingungsgleichungen $o = d\xi . P' \operatorname{Cos} \alpha'$, $o = dv . P' \operatorname{Cos} \beta'$ u. s. w. hängen von den relativen Coordinaten $\xi\, v\, \zeta$, $\xi'\, v'\, \zeta' \ldots$ der andern Punkte gegen den ersten, also von der Figur des Systemes ab, und ihnen wird daher nach den gegebenen Bedingungen des Zusammenhanges des Systemes zu genügen seyn. Ist z. B. die Figur, wie bey festen Körpern, unveränderlich, so sind $\xi\, v\, \zeta$, $\xi'\, v'\, \zeta' \ldots$ constante Gröfsen, also $d\xi = o$, $dv = o$ u. f. daher in diesem Falle diese Gleichungen von selbst aus der Grundbedingung des Gleichgewichtes verschwinden.

I. Dieselben Gleichungen (A) gelten auch dann noch, wenn man das Gleichgewicht eines einzigen Punktes sucht, auf welchen mehrere Kräfte $P\, P'\, P'' \ldots$ in den Richtungen $p\, p'\, p'' \ldots$ wirken, da man für diesen Fall in den vorhergehenden Ausdrücken nur die $x'\, y'\, z'$ und die $x''\, y''\, z'' \ldots$ gleich $x\, y\, z$ setzen, oder die $\xi\, v\, \zeta\, \xi' \ldots$ gleich Null annehmen darf.

II. Sind die Richtungen aller Kräfte $P\, P'\, P'' \ldots$ unter sich parallel, so ist $\alpha = \alpha' = \alpha'' \ldots$ $\beta = \beta' = \beta'' \ldots$, und $\gamma = \gamma' = \gamma'' \ldots$ und die drey Gleichungen (A) des Gleichgewichts gehen in folgende einzelne über

$$o = P + P' + P'' + \ldots$$

oder in diesem Falle mufs die Summe der parallelen Kräfte gleich Null seyn, wenn Gleichgewicht statt haben soll. Eben so zeigen die allgemeinen Gleichungen (A) die man auch so ausdrücken kann,

$$\left.\begin{aligned} o &= P \operatorname{Cos} \alpha + P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + \\ o &= P \operatorname{Cos} \beta + P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + \\ o &= P \operatorname{Cos} \gamma + P' \operatorname{Cos} \gamma' + P'' \operatorname{Cos} \gamma'' + \end{aligned}\right\}(A)$$

dafs überhaupt, welche Richtungen auch immer die Kräfte $P\, P'\, P'' \ldots$ haben mögen, die Summe der Projectionen der Kräfte nach der Richtung von drey unter einander senkrechten Achsen, jede für sich gleich Null seyn mufs, wenn Gleichgewicht statt haben soll.

§. 8.

Diese Gleichungen (A) enthalten also die Bedingung, die statt haben muſs, wenn das System keine fortschreitende Bewegung im Raume haben soll. Allein dann kann das System doch noch eine drehende Bewegung um einen seiner Punkte haben, und es ist daher noch übrig, auch die Bedingung dieser letzten Bewegung zu suchen.

Nehmen wir an, das System soll sich frey um eine der drey Coordinatenachsen, z. B. um die Achse der z drehen, und suchen wir die Bedingung, welche dann statt haben muſs.

Nennt man r r′ r″ die auf die Ebene der xy projicirten Entfernungen der Punkte des Systems von dem Anfange der Coordinaten, und n n′ n″ die Winkel dieser Entfernungen mit der Achse der x, so hat man

$$\begin{matrix} x = r \operatorname{Cos} n & x' = r' \operatorname{Cos} n' \\ y = r \operatorname{Sin} n & y' = r' \operatorname{Sin} n' \end{matrix} \text{ u. f.}$$

Da bey einer Drehung des Systems um die Achse der z die Gröſsen r r′ r″... constant bleiben, und alle Winkel n n′ n″... sich um dieselbe Gröſse, die wir dn nennen wollen, ändern, so hat man für die durch diese Drehung erzeugten Aenderungen der rechtwinktichten Coordinaten

$$\begin{matrix} dx = -ydn & dx' = -y'dn \\ dy = xdn & dy' = x'dn \end{matrix} \text{ u. f.}$$

Wenn also das System sich frey um die Achse der z drehen soll, so wird der Winkel n unabhängig von den inneren Bedingungen des Systems, und daher seine Aenderung dn ganz willkührlich bleiben, woraus folgt, daſs in der allgemeinen Gleichung $o = Pdp + P'dp' + \ldots$ des Gleichgewichtes diejenigen Glieder, welche in dn multiplicirt sind, zusammen gleich Null seyn müssen. Diese Glieder aber lassen sich offenbar durch die Gröſse Ndn darstellen, wenn man setzt

$$N = P\left(\frac{dp}{dn}\right) + P'\left(\frac{dp'}{dn}\right) + P''\left(\frac{dp''}{dn}\right) + \ldots$$

Um diesen Werth von N näher zu bestimmen, hat man durch die in §. 7. gegebenen Werthe von p^2 p'^2... wenn man die dort angenommenen Bezeichnungen beybehält,

$$\begin{aligned} pdp &= (x-a)\,dx + (y-b)\,dy \\ p'dp' &= (x'-a')\,dx' + (y'-b')\,dy' \text{ u. f.} \end{aligned}$$

oder wenn man die vorhergehenden Ausdrücke von dx, dy... substituirt,

$$\left(\frac{dp}{dn}\right) = \frac{ay-bx}{p}, \quad \left(\frac{dp'}{dn}\right) = \frac{a'y'-b'x'}{p'} \text{ u. f. und daher}$$

$$N = \frac{P}{p}(ay-bx) + \frac{P'}{p'}(a'y'-b'x') + \ldots$$

Setzt man aber wie zuvor

$$x - a = p \operatorname{Cos} \alpha$$
$$y - b = p \operatorname{Cos} \beta$$

und

$$X = P \operatorname{Cos} \alpha$$
$$Y = P \operatorname{Cos} \beta$$

und eben so für die übrigen Punkte und Kräfte des Systems

$$x' - a' = p' \operatorname{Cos} \alpha', \; X' = P' \operatorname{Cos} \alpha' \text{ u. f.}$$

so erhält man

$$N = (xY - yX) + (x'Y' - y'X') + (x''Y'' - y''X'') + \ldots$$

oder, wie man dieses der Kürze wegen ausdrückt

$$N = \Sigma. (xY - yX)$$

und $N = o$ ist daher die gesuchte Bedingungsgleichung der ungehinderten Drehung des Systems um die Achse der z. Setzt man eben so

$$M = \Sigma (zX - xZ) \text{ und } L = \Sigma (yZ - zY)$$

so ist $M = o$ die Bedingung für die freye Drehung des Systems um die Achse der y, und $L = o$ um die Achse der x.

Soll daher das System sich um jede dieser drey Achsen, oder soll es sich um den Anfangspunkt der Coordinaten in jeder Richtung ungehindert drehen können, so müssen die folgenden drey Gleichungen statt haben

$$\left.\begin{array}{l} o = \Sigma (xY - yX) \\ o = \Sigma (zX - xZ) \\ o = \Sigma (yZ - zY) \end{array}\right\} (B)$$

Setzt man wieder wie zuvor $X = P \operatorname{Cos} \alpha$, $Y = P \operatorname{Cos} \beta$, $Z = P \operatorname{Cos} \gamma$ und $X' = P' \operatorname{Cos} \alpha'$ u. f. so lassen sich die letzten Gleichungen auch so ausdrücken

$$\left.\begin{array}{l} o = \Sigma. P (x \operatorname{Cos} \beta - y \operatorname{Cos} \alpha) \\ o = \Sigma. P (z \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Cos} \gamma) \\ o = \Sigma. P (y \operatorname{Cos} \gamma - z \operatorname{Cos} \beta) \end{array}\right\} \ldots (B)$$

$$\text{wo } \Sigma. P (x \operatorname{Cos} \beta - y \operatorname{Cos} \alpha) = P (x \operatorname{Cos} \beta - y \operatorname{Cos} \alpha)$$
$$+ P'(x' \operatorname{Cos} \beta' - y' \operatorname{Cos} \alpha') + P''(x'' \operatorname{Cos} \beta'' - y'' \operatorname{Cos} \alpha'') + \text{ u. f.}$$

Das Daseyn der Gleichungen (A) des §. 7. zeigt also, daſs in dem System keine fortschreitende Bewegung, und das der Gleichungen (B), daſs in demselben auch keine drehende Bewegung statt habe.

Man nennt **Moment** einer Kraft in Beziehung auf eine gegebene gerade Linie, das Product dieser Kraft nach der Richtung einer auf jener Linie senkrechten Ebene zerlegt, multiplicirt in die Länge ihres Hebelarmes, d. h. multiplicirt in das Loth, welches von jener Linie in derselben Ebene auf die Richtung der Kraft gefällt wird. Denn nur von diesem Produkte hängt die eigentliche Wirkung einer Kraft ab, um das System um jene ge-

gebene gerade Linie als Achse zu drehen, weil, wenn man sie in zwey Kräfte zerlegt, deren die eine parallel mit der Achse, und die andere in einer auf diese Achse senkrechten Ebene liegt, offenbar nur die letzte eine Rotation um jene Achse hervorbringen kann. Nun ist der Ausdruck $xY - yX$ oder $x . P \cos\beta - y . P \cos\alpha$ nichts anders, als das Moment der Kraft P in Beziehung auf die Achse der z, nach der vorhergehenden Erklärung dieses Ausdruckes, wo der zweyte Theil negativ ist, weil die Kraft $P \cos\alpha$ das System um die Achse der z in einer Richtung zu drehen strebt, welche der Richtung derjenigen Drehung, die aus der Kraft $P \cos\beta$ um dieselbe Achse entsteht, entgegengesetzt ist. Die erste der Gleichungen (B) sagt daher, dafs die Summe der Momente aller Kräfte, das System um die Achse der z zu drehen, gleich Null ist, und ähnliche Sätze drücken die zweyte und dritte dieser Gleichungen in Beziehung auf die Achse der y und der x aus.

§. 9.

Bisher haben wir nur ein System von mehreren Punkten betrachtet, welche unter sich auf irgend eine Art verbunden sind. Um das Vorhergehende auch auf solide Körper anzuwenden, betrachten wir diese als Systeme unendlich nahe an einander liegender Punkte, die wir, als Massenelemente von der Differentialform $dx . dy . dz$ durch die Gröfse dm bezeichnen wollen. Da man nun nach dem Geiste der Differentialrechnung die ganze Masse m eines Körpers, als aus unendlich vielen Elementen zusammengesetzt betrachtet, so wird man jede der Kräfe $P\ P'\ P'' \ldots$ die man als an eines dieser Elemente angebracht voraussetzt, durch dieses Element multipliciren, so dafs $Pdm, P'dm', P''dm'' \ldots$ die Kräfte ausdrücken, welche auf das Element $dm, dm', dm'' \ldots$ des Körpers m nach den Richtungen $p, p', p'' \ldots$ wirken.

Es sind aber hier eigentlich zwey verschiedene Arten von Differentialien zu betrachten. Die einen oder die sogenannten geometrischen Differentialien beziehen sich blofs auf die Ausdehnung des Körpers, auf die verschiedenen Elemente, aus denen er besteht. Die andern aber, oder die mechanischen Differentialien, sind von der Ausdehnung und Gestalt des Körpers ganz unabhängig, und beziehen sich blofs auf die unendlich kleinen Räume, welche jedes Element des Körpers in einem jeden Augenblicke durch die Wirkung der auf dasselbe angebrachten Kräfte zurücklegt. Wir wollen jene durch d und diese durch δ bezeichnen. Diefs vorausgesetzt wird also die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts eines Elementes dm des Körpers seyn

$$o = (P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \ldots) \, dm$$

und so für alle übrigen Elemente.

Sucht man daher die Bedingung des Gleichgewichts für alle Elemente, oder für den ganzen Körper, so wird man nach dem Geiste der Integralrechnung das Integral des vorhergehen-

den Ausdruckes in Beziehung auf die ganze Masse des Körpers zu nehmen haben. Bezeichnet man dieses Integral mit S, so wird die Gleichung des Gleichgewichtes seyn

$$o = S.(P\delta p + P'\delta' p' + P''\delta'' p'' + \ldots.)\, dm$$

Wir bemerken hier, dafs wir von nun an durch das Integralzeichen S dasjenige verstehen, welches sich auf die ganze Masse des Körpers bezieht, während wir durch $\int$ die gewöhnlichen unbestimmten Integralien bezeichnen wollen.

I. Werden dann wieder alle auf den Körper m wirkenden Kräfte P, P′, P″.... in drey andere X Y Z nach den Richtungen der drey Achsen der Coordinaten aufgelöst, und sind, wie in §. 6. II. L = o, M = o.. die besonderen Bedingungsgleichungen, welchen die Bewegung des Körpers unterworfen seyn soll; sind ferner eben so X′ Y′ Z′ die parallel mit den Coordinatenachsen auf den Körper m′ wirkenden Kräfte, und L′ = o, M′ = o... die Bedingungen, welchen dieser Körper unterworfen ist, u. s. f. für die übrigen, so ist die Gleichung, die statt haben mufs, wenn das System dieser Körper m, m′, m″.... im Gleichgewichte seyn soll, folgende:

$$\begin{aligned} o = S & \left[\left(Xdm + \lambda\left(\frac{dL}{dx}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dx}\right) + \ldots\right)\delta x \right. \\ & + \left(Ydm + \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dy}\right) + \ldots\right)\delta y \\ & \left. + \left(Zdm + \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dz}\right) + \ldots\right)\delta z\right] \\ + S & \left[\left(X'dm' + \lambda'\left(\frac{dL'}{dx'}\right) + \mu'\left(\frac{dM'}{dx'}\right) + \ldots\right)\delta x' \right. \\ & + \left(Y'dm' + \lambda'\left(\frac{dL'}{dy'}\right) + \mu'\left(\frac{dM'}{dy'}\right) + \ldots.\right)\delta y' \\ & \left. + \left(Z'dm' + \lambda'\left(\frac{dL'}{dz'}\right) + \mu'\left(\frac{dM'}{dz'}\right) + \ldots.\right)\delta z'\right] \\ + S & \left[\left(X''dm'' + \lambda''\left(\frac{dL''}{dx''}\right) + \ldots \text{ u. s. f.}\right.\right. \end{aligned}$$

wo $\lambda\, \mu\, \lambda'\, \mu' \ldots.$ unbestimmte Gröfsen sind, und wo die Gröfsen δx, δy, δz, $\delta x' \ldots.$ als von einander unabhängig zu betrachten sind, daher die in sie multiplizirten Gröfsen jede für sich gleich Null gesetzt werden mufs, wodurch man so viele Gleichungen erhält, als man Gröfsen δx, δy, δz, $\delta x' \ldots.$ hat.

II. Ist nur ein Körper zu betrachten, auf welchen die senkrechten Kräfte X Y Z wirken, und sind L = o M = o die besonderen Bedingungsgleichungen, denen die Bewegung dieses Körpers unterworfen seyn soll; sind z. B. L = o, M = o die zwey Gleichungen einer Curve von doppelter Krümmung, auf

welcher der Körper zu bleiben gezwungen seyn soll, so sind die Gleichungen des Gleichgewichtes in Beziehung auf **fortschreitende** Bewegung

$$o = S\left\{Xdm + \lambda\left(\frac{dL}{dx}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dx}\right)\right\}$$

$$o = S\left\{Ydm + \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dy}\right)\right\}$$

$$o = S\left\{Zdm + \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dz}\right)\right\}$$

Soll aber der Körper gezwungen seyn auf der Fläche zu bleiben, deren Gleichung $L = o$ ist, so sind die Gleichungen des Gleichgewichtes

$$o = S\left\{Xdm + \lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)\right\}$$

$$o = S\left\{Ydm + \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)\right\}$$

$$o = S\left\{Zdm + \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right)\right\}$$

Ist endlich der Körper keinen besonderen Bedingungen unterworfen, sondern ganz frey, so sind die Gleichungen des Gleichgewichtes

$$o = S\ Xdm$$

$$o = S\ Ydm$$

$$o = S\ Zdm$$

Die Bedingungen des Gleichgewichtes endlich in Beziehung auf drehende Bewegung sind nach §. 8. (B)

$$o = S\ (xY - yX)\ dm$$

$$o = S\ (zX - xZ)\ dm$$

$$o = S\ (yZ - zY)\ dm$$

§. 10.

Wenn man in den Gleichungen (B) des §. 8. die Werthe von $X = P \operatorname{Cos} \alpha$, $Y = P \operatorname{Cos} \beta$, $Z = P \operatorname{Cos} \gamma$, $X' = P' \operatorname{Cos} \alpha' \ldots$ wieder herstellt, und der Kürze wegen $P x \operatorname{Cos} \beta + P' x' \operatorname{Cos} \beta' + P'' x'' \operatorname{Cos} \beta'' + \ldots$ gleich $\Sigma P x \operatorname{Cos} \beta$ setzt u. f., so hat man für diese Bedingungsgleichungen der drehenden Bewegung

$$\left.\begin{aligned} o &= \Sigma\ Px \operatorname{Cos} \beta - \Sigma\ Py \operatorname{Cos} \alpha \\ o &= \Sigma\ Pz \operatorname{Cos} \alpha - \Sigma\ Px \operatorname{Cos} \gamma \\ o &= \Sigma\ Py \operatorname{Cos} \gamma - \Sigma\ Pz \operatorname{Cos} \beta \end{aligned}\right\}$$

Nehmen wir nun an, daſs alle Kräfte P, P', $P''\ldots$ in unter einander parallelen Richtungen wirken, so ist $\alpha = \alpha' = \alpha'' \ldots$

$\beta = \beta' = \beta'' \ldots$ und $\gamma = \gamma' = \gamma'' \ldots$ und die vorhergehenden drey Gleichungen gehen in folgende über

$$\left.\begin{array}{l} o = \text{Cos}\,\beta\,\Sigma\,Px - \text{Cos}\,\alpha\,\Sigma\,Py \\ o = \text{Cos}\,\alpha\,\Sigma\,Pz - \text{Cos}\,\gamma\,\Sigma\,Px \\ o = \text{Cos}\,\gamma\,\Sigma\,Py - \text{Cos}\,\beta\,\Sigma\,Pz \end{array}\right\}$$

wo wieder $\Sigma Px = Px + P'x' + P''x'' + \ldots$ u. f. ist.
Da man aber auch die Gleichung $\text{Cos}^2\,\alpha + \text{Cos}^2\,\beta + \text{Cos}^2\,\gamma = 1$ hat, so kann man durch die vier letzten Gleichungen die Werthe der Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bestimmen. Man erhält so, wenn man der Kürze wegen

$$(\Sigma\,Px)^2 + (\Sigma\,Py)^2 + (\Sigma\,Pz)^2 = M^2 \text{ setzt}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{\Sigma Px}{M}$$

$$\text{Cos}\,\beta = \frac{\Sigma Py}{M}$$

$$\text{Cos}\,\gamma = \frac{\Sigma Pz}{M}$$

Ist also die Lage der Körper des Systems in Beziehung auf drey senkrechte Achsen gegeben, und soll alle drehende Bewegung des Systems aufgehoben oder unmöglich seyn, so mufs das System in Beziehung auf die gemeinschaftliche Richtung aller parallelen Kräfte so gestellt werden, dafs diese Richtung mit jenen drey Achsen die durch die letzten Gleichungen angezeigten Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bilde.

I. Wenn die Gröfsen ΣPx, ΣPy, ΣPz jede für sich gleich Null sind, so bleiben die Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ unbestimmt, und die Lage des Systems in Beziehung auf die Richtung der Kräfte kann welche immer seyn. Daraus folgt der Satz: Wenn die Summe der Producte von parallelen Kräften in ihre Entfernungen von drey senkrechten Ebenen, in Beziehung auf jede dieser drey Ebenen gleich Null ist, so wird die Wirkung dieser Kräfte, um das System um den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt dieser drey Ebenen zu drehen, aufgehoben, oder es kann keine Drehung um diesen Durchschnittspunkt statt haben. Man nennt diesen Punkt den S c h w e r p u n k t des Systems, weil die Schwere bekanntlich auch unter parallelen Richtungen wirkt.

Um den Ort des Schwerpunktes zu bestimmen, hat man also die drey Gleichungen

$$o = \Sigma\,Px \quad o = \Sigma\,Py \quad o = \Sigma\,Pz$$

Die erste dieser Gleichungen ist $o = Px + P'x' + P''x'' +$
Sind aber a b c die drey Coordinaten des Schwerpunktes, und bezieht man jeden andern Punkt des Systems auf diesen durch die Coordinaten

$x = a + \xi$, $y = b + \upsilon$, $z = c + \zeta$, $x' = a + \xi'$, $x'' = a + \xi''$ u. f.
so gibt die letzte Gleichung

$$o = P(a + \xi) + P'(a + \xi') + P''(a + \xi'') + \text{ oder}$$
$$o = a\,\Sigma P + \Sigma P\xi$$

also hat man, wenn man a negativ und $= -X$, und $b = -Y$, $c = -Z$ nimmt.

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\Sigma P\xi}{\Sigma P} \text{ und eben so} \\ Y &= \frac{\Sigma P\upsilon}{\Sigma P} \\ Z &= \frac{\Sigma P\zeta}{\Sigma P} \end{aligned}\right\}$$

Sind also die Entfernungen ξ, υ, ζ, ξ'.... gegeben oder willkührlich angenommen, so bestimmen die drey letzten Gleichungen die gesuchten Coordinaten X Y Z des Schwerpunktes.

II. Ist das System ein Körper, und dm das Element seiner Masse, so gehen diese Gleichungen nach §. 9. in folgende über:

$$X = \frac{SPxdm}{SPdm} \quad Y = \frac{SPydm}{SPdm} \quad Z = \frac{SPzdm}{SPdm}$$

Betrachtet man dann P als constant, welches bey der Schwere der Fall ist, so hat man

$$X = \frac{Sxdm}{m} \quad Y = \frac{Sydm}{m} \quad Z = \frac{Szdm}{m}$$

Ist also $Sxdm = o$ und $Sydm = o$, so ist der Schwerpunkt in der Achse der z; ist $Sxdm = o$ und $Szdm = o$, so ist er in der Achse der y u. f. und sind alle diese drey Integralien gleich Null, so ist der Schwerpunkt zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten.

III. Für eine krumme Linie von doppelter Krümmung ist $dm = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds$, wo ds ein Element ihres Bogens bezeichnet, also hat man für die Coordinaten des Schwerpunktes dieser Linie

$$X = \frac{Sxds}{s}$$
$$Y = \frac{Syds}{s}$$
$$Z = \frac{Szds}{s}$$

IV. Für die Fläche einer ebenen Curve, wenn diese Fläche durch die Achse der Abscissen x begränzt ist, wird $m = Sydx$ also

$$X = \frac{\int xydx}{\int ydx} \quad Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int ydx} \text{ und } Z = 0$$

V. Für die Oberfläche eines Körpers, deren Gleichung $dz = pdx + qdy$ ist, hat man, wenn man der Kürze wegen $r = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ setzt, $m = \iint rdxdy$ also auch

$$X = \frac{\iint rx\, dx\, dy}{\iint r\, dx\, dy} \quad Y = \frac{\iint ry\, dx\, dy}{\iint r\, dx\, dy} \quad Z = \frac{\iint rz\, dx\, dy}{\iint r\, dx\, dy}$$

Für die Oberfläche eines Körpers, welcher durch Umdrehung einer ebenen Curve um die Achse der x entstanden ist, hat man $m = 2\pi\int y\sqrt{dx^2 + dy^2}$ wo $\pi = 3.14159\ldots$ also

$$X = \frac{\int xy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int y\sqrt{dx^2 + dy^2}} \text{ und } Y = Z = 0$$

VI. Für einen soliden Körper endlich ist $m = \iiint dx\, dy\, dz$ also

$$X = \frac{\iiint x\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}, \quad Y = \frac{\iiint y\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}, \quad Z = \frac{\iiint z\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}$$

Vorausgesetzt, dafs der Körper in allen seinen Theilen homogen oder von gleicher Dichte ist. Hat diese Voraussetzung nicht statt, und ist ϱ, eine Function von x y z, die veränderliche Dichte des Körpers, so wird man in den drey letzten Gleichungen statt dx blofs ϱdx setzen.

Ist endlich der Körper durch Umdrehung einer Curve um die Achse der x entstanden, so hat man

$$X = \frac{\int y^2\, x\, dx}{\int y^2\, dx} \text{ und } Y = Z = 0.$$

§. 11.

Indem wir nun zu einigen Anwendungen des Vorhergehenden übergehen, wollen wir zuerst annehmen, dafs eine Anzahl von Kräften P P′ P″.... nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt wirken; und dafs der Punkt gezwungen ist auf einer gegebenen Fläche zu bleiben. Man suche seinen Ort auf dieser Fläche für den Fall des Gleichgewichts.

Reducirt man alle diese Kräfte auf drey andere X Y Z (nach §. 4.) die den drey Achsen der Coordinaten x y z parallel sind, so hat man nach der Gleichung (IV) des §. 5.

$$0 = Xdx + Ydy + Zdz$$

$$\text{Sey } L = 0 \text{ oder } \left(\frac{dL}{dx}\right) dx + \left(\frac{dL}{dy}\right) dy + \left(\frac{dL}{dz}\right) dz = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche, so werden die Gleichungen des Gleichgewichtes nach §. 6. I seyn:

$$o = X dx + Y dy + Z dz$$

$$o = \left(\frac{dL}{dx}\right) dx + \left(\frac{dL}{dy}\right) dy + \left(\frac{dL}{dz}\right) dz$$

Eliminirt man daher aus diesen zwey Gleichungen eine der Gröfsen dx, dy, dz, z. B. die erste, so erhält man

$$= \left\{Y\left(\frac{dL}{dx}\right) - X\left(\frac{dL}{dy}\right)\right\} dy + \left\{Z\left(\frac{dL}{dx}\right) - X\left(\frac{dL}{dz}\right)\right\} dz$$

und da in diesem Ausdrucke die Gröfsen dy und dz von einander unabhängig sind, so wird das Gleichgewicht des Punktes durch folgende zwey Gleichungen bestimmt werden

$$\left.\begin{aligned} Y\left(\frac{dL}{dx}\right) - X\left(\frac{dL}{dy}\right) &= o \\ Z\left(\frac{dL}{dx}\right) - X\left(\frac{dL}{dz}\right) &= o \end{aligned}\right\}$$

und diese beyden Gleichungen verbunden mit der Gleichung der gegebenen Fläche reichen hin, den Ort des Körpers auf der Fläche, oder die Coordinaten x y z desselben durch Elimination zu bestimmen.

I. Statt diesem Verfahren kann man aber noch einfacher die in §. 6. II gegebene Methode anwenden, wodurch man sofort für die gesuchte Gleichung des Gleichgewichts erhält (Gl. V)

$$o = X dx + Y dy + Z dz + \lambda \left[\left(\frac{dL}{dx}\right) dx + \left(\frac{dL}{dy}\right) dy + \left(\frac{dL}{dz}\right) dz\right]$$

und da in dieser Gleichung die Gröfsen dx, dy, dz von einander unabhängig sind, weil man in ihr auf die Bedingung der Aufgabe, dafs der Punkt auf der gegebenen Fläche bleiben soll, schon Rücksicht genommen hat; so erhält man für das Gleichgewicht folgende Gleichungen:

$$X + \lambda \left(\frac{dL}{dx}\right) = o$$

$$Y + \lambda \left(\frac{dL}{dy}\right) = o$$

$$Z + \lambda \left(\frac{dL}{dz}\right) = o$$

Eliminirt man aber aus diesen drey Gleichungen den unbestimmten Coefficienten λ, so erhält man die vorigen Gleichungen wieder. Aus dieser Darstellung folgt zugleich (§. 6. III), dafs der Widerstand, welchen die Fläche dem Körper entgegensetzt, oder dafs der D r u c k des Körpers gegen die Fläche gleich

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$$

ist, und da $\lambda \left(\frac{dL}{dx}\right) = - X$, $\lambda \left(\frac{dL}{dy}\right) = - Y$, $\lambda \left(\frac{dL}{dz}\right) = - Z$

ist, so ist dieser Druck, welchen der Körper in einer auf die Fläche senkrechten Richtung ausübt, gleich

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

II. Wäre der Körper gezwungen, auf einer krummen Linie von doppelter Krümmung zu bleiben, deren Gleichungen $dL = o$, $dM = o$ sind, so ist für das Gleichgewicht

$$o = Xdx + Ydy + Zdz + \lambda \left\{\left(\frac{dL}{dx}\right) dx + \left(\frac{dL}{dy}\right) dy + \left(\frac{dL}{dz}\right) dz\right\}$$
$$+ \lambda' \left\{\left(\frac{dM}{dx}\right) dx + \left(\frac{dM}{dy}\right) dy + \left(\frac{dM}{dz}\right) dz\right\}$$

welcher Ausdruck folgenden drey Gleichungen gleichgeltend ist

$$o = X + \lambda \left(\frac{dL}{dx}\right) + \lambda' \left(\frac{dM}{dx}\right)$$
$$o = Y + \lambda \left(\frac{dL}{dy}\right) + \lambda' \left(\frac{dM}{dy}\right)$$
$$o = Z + \lambda \left(\frac{dL}{dz}\right) + \lambda' \left(\frac{dM}{dz}\right)$$

Eliminirt man aus diesen drey Gleichungen die zwey unbestimmten Gröfsen λ und λ', so erhält man

$$o = X \left\{\left(\frac{dL}{dy}\right)\left(\frac{dM}{dz}\right) - \left(\frac{dL}{dz}\right)\left(\frac{dM}{dy}\right)\right\}$$
$$+ Y \left\{\left(\frac{dL}{dz}\right)\left(\frac{dM}{dx}\right) - \left(\frac{dL}{dx}\right)\left(\frac{dM}{dz}\right)\right\}$$
$$+ Z \left\{\left(\frac{dL}{dx}\right)\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dL}{dy}\right)\left(\frac{dM}{dx}\right)\right\}$$

und diese Gleichung, verbunden mit den zwey gegebenen Gleichungen $dL = o$ $dM = o$, reicht hin, den Werth von x y z für das Gleichgewicht zu finden. Da endlich jede der zwey Gleichungen $dL = o$, $dM = o$ für eine Fläche gehört, deren Durchschnitt die gegebene krumme Linie ist, so ist der Druck des Körpers auf die erste Fläche

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$$

und auf die zweyte

$$\lambda' \sqrt{\left(\frac{dM}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dz}\right)^2}$$

§. 12.

Um einige besondere Fälle der letzten Aufgabe näher zu betrachten, wollen wir annehmen, dafs

I. auf einen Punkt die drey constanten Kräfte $X = -a$, $Y = -b$, $Z = -c$ in senkrechten Richtungen wirken, und dafs der Punkt gezwungen sey, auf der Oberfläche einer Kugel zu bleiben.

Ist r der Halbmesser einer Kugel, so ist ihre Gleichung

$$L = o = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

also die beyden Gleichungen des §. 11.

$$o = ay - bx$$
$$o = az - cx$$

Sucht man aus den drey letzten Gleichungen die Werthe von x y z, so erhält man

$$x = \frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ y = \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ z = \frac{cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

und diese Coordinaten geben den Ort der Oberfläche der Kugel an, in welchem der Körper vormöge jener drey Kräfte im Gleichgewichte ist, in Ruhe bleibt.

Der Druck des Körpers gegen die Kugel ist

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Wirkt blofs die constante Schwere $c = g$ in der senkrechten Richtung der z auf den Körper, so ist $a = b = o$, also auch $x = y = o$ und $z = \pm r$, so wie der Druck gleich g. Der Körper ist also nur in dem höchsten und niedrigsten Punkte der Kugel im Gleichgewichte, nachdem man annimmt, dafs eine der Schwere gleiche und constante Kraft ihn ab- oder aufwärts in der Richtung der Achse der z zu bewegen sucht.

Umgekehrt, ist die Gleichung der Kugel gegeben,

$$L = o = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

und $Z = g$ die constante Schwere, so hat man für das Gleichgewicht

$$Xy - Yx = o$$
$$Xz - gx = o$$

woraus folgt, dafs die drey Kräfte, welche einen Punkt auf der Oberfläche der Kugel im Gleichgewichte halten, sind

$$Z = g,\ Y = g.\frac{y}{z},\ X = g.\frac{x}{z}$$

Für den höchsten und tiefsten Punkt der Kugel ist $x = y = o$, also auch $X = Y = o$ und $Z = g$ wie zuvor.

II. Auf einen Punkt wirken zwey Kräfte P und P', deren gegebene Richtungen beyde in einer der xz parallelen Ebene liegen, und der Punkt soll gezwungen seyn auf einer geraden Linie zu bleiben, die ebenfalls in einer der xz parallelen Ebene liegt, und mit der Ebene der xy den Winkel n bildet.

Diefs vorausgesetzt ist die Gleichung dieser geraden Linie, oder vielmehr die Gleichung einer Ebene, die auf der coordinirten Ebene der xz senkrecht steht, und gegen die Ebene der xy unter dem Winkel n geneigt ist

$$L = o = x \text{ Tang. } n - z$$

Da die Richtungen der beyden Kräfte P und P' gegeben sind, so sey α der Winkel der Richtung der Kraft P mit der Achse der x, und α' der Winkel der Kraft P' mit der Achse der x. Da nach der Voraussetzung die Richtungen der beyden Kräfte der Ebene der xz parallel sind, so sind die Winkel dieser Richtungen mit den Achsen der y, oder β und β' rechte Winkel, so wie endlich die Winkel derselben mit der Achse der z gleich $\gamma = 90 - \alpha$ und $\gamma' = 90 - \alpha'$. Also ist die Summe der beyden Kräfte P und P' nach den Achsen der x und z zerlegt,

$$X = P \text{ Cos } \alpha + P' \text{ Cos } \alpha'$$
$$Z = P \text{ Cos } \gamma + P' \text{ Cos } \gamma' \text{ und } Y = o$$

und die vorigen beyden Gleichungen gehen daher in folgende einzelne über

$$o = P \text{ Cos } \alpha + P' \text{ Cos } \alpha' + (P \text{ Sin } \alpha + P' \text{ Sin } \alpha') \text{ Tang } n$$

Ist die eine Kraft P die Schwere, deren Richtung in der senkrechten Achse der z liegt, so ist $\alpha = 90$ und $\gamma = o$ also die letzte Gleichung

$$o = P' \text{ Cos } \alpha' + (P + P' \text{ Sin } \alpha') \text{ Tg } n \text{ oder}$$
$$P' = - \frac{P \text{ Sin } n}{\text{Cos } (n - \alpha')}$$

oder diesen Werth mufs die andere Kraft P' haben, um den schweren Körper auf der gegebenen Ebene im Gleichgewichte zu erhalten. Der Druck des Körpers gegen die Ebene ist

$$R = \sqrt{X^2 + Z^2} = \frac{P \text{ Cos } \alpha'}{\text{Cos } (n - \alpha')}$$

Die beyden letzten Gleichungen enthalten die ganze Theorie der sogenannten schiefen Ebene.

III. Denkt man sich die gerade Linie in II, auf welcher der Körper im Gleichgewichte bleiben soll, als die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyeckes, deren Länge l seyn soll, während wir die horizontale Basis dieses Dreyeckes durch b und die Höhe

desselben durch h bezeichnen wollen, so sey, wenn P, wie zuvor, die senkrechte Schwere ist, erstens $\alpha' = o$ oder die Kraft P' wirke horizontal nach der Richtung der Achse der x. Diefs vorausgesetzt sind die beyden vorhergehenden Gleichungen

$$P' = -P \, Tg \, n \quad \text{oder} \quad \frac{P'}{P} = -\frac{h}{b}$$

$$R = \frac{P}{Cos \, n} \qquad \frac{R}{P} = \frac{l}{b}$$

Sey zweytens $\alpha' = n$, oder die Kraft P' wirke in der Richtung der Linie l, so ist

$$P' = -P \, Sin \, n \quad \text{oder} \quad \frac{P'}{P} = -\frac{h}{l}$$

$$R = P \, Cos \, n \qquad \frac{R}{P} = \frac{b}{l}$$

Sey ferner $\alpha' = 90$ oder beyde Kräfte wirken in der senkrechten Richtung der z, so ist

$$P' = -P \text{ und } R = o$$

oder für das Gleichgewicht müssen beyde Kräfte einander gleich und entgegengesetzt in ihren Richtungen seyn.

Sey endlich $n = 90°$, oder die schiefe Fläche so wie die Richtung der Schwere vertikal, so ist

$$P' \, Sin \, \alpha' = -P$$

In dem letzten Falle ist nämlich der Körper in seiner Bewegung frey, und blofs der Schwere P, deren Richtung senkrecht ist, und einer Kraft P' unterworfen, deren Richtung mit der Achse der x den Winkel α' bildet. Da beyde Richtungen in der Ebene der xz liegen, so ist $\alpha = 90$, $\gamma = o$ und $\gamma' = 90 - \alpha'$ also

$$X = P \, Cos \, \alpha'$$

$$Z = P + P' \, Sin \, \alpha'$$

und die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes sind

$$X = o \quad Z = o$$

d. h. das Gleichgewicht hat statt, wenn $P = -P' \, Sin \, \alpha'$ ist, wie zuvor.

§. 13.

Man suche das Gleichgewicht von drey Körpern, die an einem unbiegsamen und unausdehnbaren Faden befestigt sind, und auf deren jeden eine gegebene Anzahl von Kräften nach gegebenen Richtungen wirken.

Man bringe zuerst alle Kräfte, die auf den ersten Körper wirken, nach §. 4. auf drey X Y Z, deren Richtungen parallel mit den senkrechten Coordinaten x y z dieses Körpers sind. Eben so seyen x' y' z' die Coordinaten des zweyten Körpers und X' Y' Z'

die auf ihn wirkenden senkrechten Kräfte. Für den dritten Körper seyen endlich dieselben Gröſsen $x'' y'' z''$ und $X'' Y'' Z''$. Nennt man a die Distanz des ersten Körpers von dem zweyten, und b die des zweyten von dem dritten, so sind die Bedingungsgleichungen der Aufgabe

$$da = o, \; db = o$$

so daſs also die Stange, an welcher die drey Körper befestigt sind, in dem Orte des zweyten Körpers unter irgend einem veränderlichen Winkel gebrochen seyn kann.

Dieſs vorausgesetzt ist also die Gleichung des Gleichgewichtes

$$\begin{aligned} o = & \; X dx + Y dy + Z dz \\ & + X' dx' + Y' dy' + Z' dz' \\ & + X'' dx'' + Y'' dy'' + Z'' dz'' \\ & + \lambda da + \lambda' db \end{aligned}$$

Es ist aber

$$a^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$
$$b^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2$$

Differentiirt man die beyden letzten Gleichungen in Beziehung auf $x\, x'\, x'' \ldots$ und substituirt man die so erhaltenen Werthe von $da\; db$ in der vorhergehenden Gleichung, und setzt endlich die Coefficienten von $dx\; dy \ldots$ jeden für sich gleich Null, so erhält man neun Gleichungen, welche durch die Elimination der beyden unbestimmten Factoren λ und λ' auf folgende sieben reducirt werden

$$X + X' + X'' = o$$
$$Y + Y' + Y'' = o$$
$$Z + Z' + Z'' = o$$
$$(X' + X'')(y' - y) - (Y' + Y'')(x' - x) = o$$
$$(X' + X'')(z' - z) - (Z' + Z'')(x' - x) = o$$
$$X''(y'' - y') - Y''(x'' - x') = o$$
$$X''(z'' - z') - Z''(x'' - x') = o$$

und diese sieben Gleichungen verbunden mit den zwey gegebenen Ausdrücken von a^2 und b^2 reichen hin, die Lage eines jeden der drey Körper für das Gleichgewicht zu bestimmen. Man sieht, wie leicht sich diese Auflösung auch auf mehr als drey Körper ausdehnen läſst.

Setzt man voraus, daſs der erste Körper fest ist, so sind die Ausdrücke $dx = dy = dz = o$ und die Glieder, welche diese Gröſsen zu Faktoren haben, verschwinden von selbst, so daſs von den letzten sieben Gleichungen auch die drey ersten verschwinden, während die vier letzten dieselben bleiben.

Wäre auch noch der dritte Körper fest, so gehen alle sieben Gleichungen in folgende einzelne über

$$\frac{X'(y''-y')-Y'(x''-x')}{X'(z''-z')-Z'(x''-x')}=\frac{x(y'-y'')-x'(y-y'')+x''(y-y')}{x(z'-z'')-x'(z-z'')+x''(z-z')}$$

II. Um die Kraft, die von der Reaction des Fadens auf den Körper kömmt, d. h. um die Spannung des Fadens zu finden, hat man

$$dL=da=\frac{(x'-x)(dx'-dx)+(y'-y)(dy'-dy)+(z'-z)(dz'-dz)}{a}$$

also auch für den ersten Körper

$$\frac{dL}{dx}=-\frac{(x'-x)}{a},\ \frac{dL}{dy}=-\frac{(y'-y)}{a},\ \frac{dL}{dz}=-\frac{(z'-z)}{a}$$

und daher

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}=1$$

woraus folgt (§. 3.), daſs der erste Körper von den andern eine Gegenwirkung $=\lambda$ erhält, deren Richtung senkrecht auf die Fläche ist, deren Gleichung $dL=da=0$ ist. Diese Gleichung gehört aber für eine Kugel, deren Halbmesser a ist und deren Mittelpunkt zu den Coordinaten $x'\,y'\,z'$ gehört, also wird diese Kraft die Richtung dieses Halbmessers, d. h. die Richtung des Fadens haben, der den ersten Körper mit dem zweyten verbindet. Eben so wird man finden, daſs eine der vorigen gleiche Kraft λ auf den zweyten Körper wirke, deren Richtung ebenfalls der Faden a ist, und daſs auf denselben zweyten Körper noch eine zweyte Kraft λ' wirke, deren Richtung der Faden b ist, welcher den zweyten Körper mit den dritten verbindet.

III. Wäre der Faden nach seiner Länge ausdehnbar, oder elastisch, und A, B die Contractionskräfte der Theile a, b des Fadens, so würden diese Kräfte das Moment $Ada+Bdb$ geben, und man hätte für das Gleichgewicht

$$\begin{aligned}&Xdx+Ydy+Zdz\\+\ &X'dx'+Y'dy'+Z'dz'\\+\ &X''dx''+Y''dy''+Z''dz''\\&+Ada+Bdb=0\end{aligned}$$

oder kürzer

$$\Sigma\,(Xdx+Ydy+Zdz)+Ada+Bdb=0$$

wo Σ wieder das bekannte Summenzeichen ist; und da diese Gleichung der für einen unelastischen Faden gefundenen ähnlich ist, so wird man nur in der vorhergehenden Auflösung $\lambda=A$ und $\lambda'=B$ setzen. (Lagrange. Mec. anal.)

IV. Soll bey einem unelastischen Faden der mittlere Körper längst dem Faden gleiten können, so wäre die Bedingung der Aufgabe, daſs bloſs die Summe der Abstände des ersten Körpers

von dem zweyten und des zweyten von dem dritten beständig ist, und man hätte für das Gleichgewicht

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) + \lambda (da + db) = o$$

V. Wir wollen endlich annehmen, daſs die drey Punkte durch zwey unbiegsame gerade Linien so mit einander verbunden sind, daſs diese drey Punkte immer dieselbe Entfernung von einander behalten, oder daſs diese drey Punkte in den Scheiteln eines Dreyecks liegen, während auf den ersten derselben die Kraft P, auf den zweyten die Kraft P', auf den dritten die Kraft P'' nach gegebenen Richtungen wirke.

Sind $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Winkel der Richtung der Kraft P mit den drey Achsen der Coordinaten, und x y z die Coordinaten des ersten Körpers, und bezeichnet man dieselben Gröſsen für den zweyten und dritten Körper mit einem und mit zwey Strichen, so hat man für die nach denselben Achsen zerlegte Kraft P

$$X = P \operatorname{Cos} \alpha, \; Y = P \operatorname{Cos} \beta, \; Z = P \operatorname{Cos} \gamma$$

und eben so für die zweyte und dritte Kraft

$$X' = P' \operatorname{Cos} \alpha', \; Y' = P' \operatorname{Cos} \beta', \; Z' = P' \operatorname{Cos} \gamma'$$
$$X'' = P'' \operatorname{Cos} \alpha'', \; Y'' = P'' \operatorname{Cos} \beta'', \; Z'' = P'' \operatorname{Cos} \gamma''$$

Ohne daher auf die Bedingungen der Aufgabe Rücksicht zu nehmen, würde man für das Gleichgewicht dieser drey Punkte haben

$$\begin{aligned} o = {} & Xdx + Ydy + Zdz \\ & + X'dx' + Y'dy' + Z'dz' \\ & + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' \ldots (1) \end{aligned}$$

Allein die Bedingung der Aufgabe ist, daſs die drey Distanzen der Körper untereinander constant seyn sollten. Nennt man daher a die Distanz des zweyten Körpers von dem dritten, a' die des ersten von dem dritten, und a'' die des ersten von dem zweyten, so hat man

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= (x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2 \\ a'^2 &= (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2 \\ a''^2 &= (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

und da diese Gröſsen a a' a'' unveränderlich seyn sollen, so hat man da = o, da' = o, da'' = o, wo diese Differentialien in Beziehung auf x x' x'' y.... genommen werden, so daſs man hat

$$da = \frac{(x''-x')(dx''-dx')+(y''-y')(dy''-dy')+(z''-z')(dz''-dz')}{a}$$

und so weiter für die übrigen.

Daraus folgt also, daſs man, um die vollständige Gleichung des Gleichgewichtes zu erhalten, zu der Gleichung (1) noch die Gröſse

$$\lambda da + \lambda' da' + \lambda'' da''$$

addiren müsse, wo $\lambda\ \lambda'\ \lambda''$ unbestimmte Faktoren sind.

Substituirt man dann in der Gleichung, die man so erhält, die angezeigten Werthe von da, da′, da″, so hat man, da die Grössen dx, dx′, dx″, dy.... von einander unabhängig sind, folgende Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} X - \frac{\lambda''}{a''}(x'-x) - \frac{\lambda'}{a'}(x''-x) = 0 \\ Y - \frac{\lambda''}{a''}(y'-y) - \frac{\lambda'}{a'}(y''-y) = 0 \\ Z - \frac{\lambda''}{a''}(z'-z) - \frac{\lambda'}{a'}(z''-z) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} X' + \frac{\lambda''}{a''}(x'-x) - \frac{\lambda}{a}(x''-x') = 0 \\ Y' + \frac{\lambda''}{a''}(y'-y) - \frac{\lambda}{a}(y''-y') = 0 \\ Z' + \frac{\lambda''}{a''}(z'-z) - \frac{\lambda}{a}(z''-z) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} X'' + \frac{\lambda}{a}(x''-x') + \frac{\lambda'}{a'}(x''-x) = 0 \\ Y'' + \frac{\lambda}{a}(y''-y') + \frac{\lambda'}{a'}(y''-y) = 0 \\ Z'' + \frac{\lambda}{a}(z''-z') + \frac{\lambda'}{a'}(z''-z) = 0 \end{array}\right\}$$

Eliminirt man aus diesen neun Gleichungen die Grössen $\lambda\ \lambda'\ \lambda''$, so erhält man sechs Gleichungen, die mit den drey Gleichungen (2) verbunden, hinreichen, den Ort jedes der drey Körper für das Gleichgewicht zu bestimmen.

Addirt man von den letzten neun Gleichungen die 1, 4, 7 und 2, 5, 8, und endlich 3, 6, 9, so erhält man folgende drey Gleichungen zwischen den Grössen X, X′...

$$\left.\begin{array}{l} X + X' + X'' = 0 \\ Y + Y' + Y'' = 0 \\ Z + Z' + Z'' = 0 \end{array}\right\} \text{(A)}$$

und nun ist es leicht, noch drey andere zu finden, nähmlich

$$\left.\begin{array}{l} Xy - Yx + X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' = 0 \\ Xz - Zx + X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' = 0 \\ Yz - Zy + Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' = 0 \end{array}\right\} \ldots \text{(B)}$$

und (A) und (B) sind die sechs gesuchten Gleichungen. Man kann ihnen leicht noch andere Formen geben. Substituirt man

z. B. in den Gleichungen (B) die Werthe von X'', Y'', Z'' aus (A), so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} X(y-y'') - Y(x-x'') + X'(y'-y'') - Y'(x'-x'') = 0 \\ X(z-z') - Z(x-x') + X''(z''-z') - Z''(x''-x') = 0 \\ Y'(z'-z) - Z'(y'-y) + Y''(z''-z) - Z''(y''-y) = 0 \end{array}\right\}(B')$$

und auch die Gleichungen (A), (B′) bestimmen das Gleichgewicht.

Sind ferner A B C die Winkel der Distanz a mit den Achsen der x y z und bezeichnet man dieselben Gröfsen für a' mit einem und für a'' mit zwey Strichen, so ist

$$\begin{array}{lll} x''-x' = a \operatorname{Cos} A & x''-x = a' \operatorname{Cos} A' & x'-x = a'' \operatorname{Cos} A'' \\ y''-y' = a \operatorname{Cos} B & y''-y = a' \operatorname{Cos} B' & y'-y = a'' \operatorname{Cos} B'' \\ z''-z' = a \operatorname{Cos} C & z''-z = a' \operatorname{Cos} C' & z'-z = a'' \operatorname{Cos} C'' \end{array}$$

also auch die Gleichungen (B′), wenn man die vorigen Werthe von X Y Z wieder herstellt,

$$\left.\begin{array}{l} Pa'(\operatorname{Cos} A' \operatorname{Cos} \beta - \operatorname{Cos} B' \operatorname{Cos} \alpha) + P'a(\operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} \beta' - \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} \alpha') = 0 \\ Pa''(\operatorname{Cos} A'' \operatorname{Cos} \gamma - \operatorname{Cos} C'' \operatorname{Cos} \alpha) + P''a(\operatorname{Cos} C \operatorname{Cos} \alpha'' - \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} \gamma'') = 0 \\ P'a''(\operatorname{Cos} C'' \operatorname{Cos} \beta' - \operatorname{Cos} B'' \operatorname{Cos} \gamma') + P''a'(\operatorname{Cos} C' \operatorname{Cos} \beta'' - \operatorname{Cos} B' \operatorname{Cos} \gamma'') = 0 \end{array}\right\}\ldots(B'')$$

Liegen die Richtungen der Kräfte alle in der Ebene des Dreyeckes, welches durch die drey Körper geht, und nimmt man diese Ebene für die Ebene der xy an, so ist $z = z' = z'' = 0$, und die Winkel $\alpha + \beta$, $\alpha' + \beta'$, so wie die $A + B$, $A' + B'$ sind rechte Winkel, für welchen Fall daher die erste der Gleichungen (B″) in folgende übergeht:

$$\frac{P}{P'} = -\frac{a \operatorname{Sin}(\alpha' - A)}{a' \operatorname{Sin}(\alpha - A')}$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man für $\frac{P}{P''}$ und $\frac{P'}{P''}$, und aus ihnen findet man leicht, dafs für das Gleichgewicht dreyer Kräfte je zwey derselben sich verhalten müssen, wie verkehrt die Lothe von dem Mittelpunkte der dritten Kraft auf die Richtungen der beyden anderen Kräfte, worin bekanntlich die ganze Theorie des gebrochenen Hebels besteht.

Sind die Richtungen der Kräfte unter sich parallel, und ist der Hebel geradlinigt, so ist $\alpha = \alpha' = \alpha''$, und $A = A' = A''$ also jene Gleichungen

$$\frac{P}{P'} = -\frac{a}{a'}, \quad \frac{P}{P''} = -\frac{a}{a''}, \quad \frac{P'}{P''} = -\frac{a'}{a''}$$

oder je zwey Kräfte verhalten sich, wie verkehrt ihre Entfernungen von der dritten Kraft. Aus der zweyten dieser Gleichungen folgt auch

$$\frac{P}{P''-P} = -\frac{a}{a''}$$

und diese mit der ersten verglichen gibt

$$P + P' - P'' = o$$

übereinstimmend mit den Gleichungen (A).

§. 14.

Man suche endlich das Gleichgewicht eines biegsamen und unausdehnbaren Fadens, auf dessen alle Theile gegebene Kräfte $P\ P'\ P''\ldots$ nach gegebenen Richtungen wirken.

Da der Faden hier schon wie ein Körper betrachtet wird, wie ein Cylinder von durchaus gleicher Dicke und gleicher Dichtigkeit der Maſse, so werden wir die Gleichung anwenden, welche §. 9. I gegeben wurde. Nachdem also alle auf den Faden wirkenden Kräfte auf drey andere $X\ Y\ Z$, welche den Achsen der Coordinaten parallel sind, gebracht worden, hat man, vermöge jener Gleichung, wenn die Aufgabe von keiner Nebenbedingung beschränkt war, für das Gleichgewicht des Fadens die Gleichung

$$o = S\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm$$

wo dm das Element des Fadens bezeichnet, welches hier dem Elemente ds der von dem Faden gebildeten Curve durch die Dicke des Fadens multiplicirt proportional ist.

Allein die Aufgabe ist einer Bedingung unterworfen, auf welche wir bisher nicht Rücksicht genommen haben. Da nämlich der Faden unausdehnbar seyn soll, so hat man die Bedingungsgleichung $\delta.ds = o$. Man wird daher der vorigen Gleichung (nach §. 9. I) noch die Gröſse $S\lambda\delta.ds$ hinzufügen. Es ist aber

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ also } \delta.ds = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{ds}$$

also auch

$$S\lambda\delta.ds = S\lambda\frac{dx}{ds}\delta dx + S\lambda\frac{dy}{ds}\delta dy + S\lambda\frac{dz}{ds}\delta dz$$

Es ist aber das Integral

$$S\lambda\frac{dx}{ds}\delta dx \text{ oder was dasselbe ist,}$$

$$S\lambda\frac{dx}{ds}d\delta x = \lambda\frac{dx}{ds}\delta x - \int\delta x.d.\lambda\frac{dx}{ds}$$

und wenn wir dieses Integral zwischen zwey Gränzpunkten nehmen, deren einem die Coordinaten $x'y'z'$ und dem andern $x''y''z''$ angehören, so ist

$$S\lambda\frac{dx}{ds}d\delta x = \frac{\lambda''dx''}{ds''}\delta x'' - \frac{\lambda'dx'}{ds'}\delta x - S\delta x.d.\lambda\frac{dx}{ds}$$

Das übrig bleibende Integral $S\delta x.d.\frac{\lambda dx}{ds}$ zwischen den beyden

Gränzen über die ganze Länge des Fadens ausgedehnt. Aehnliche Ausdrücke hat man für

$$S\lambda \frac{dy}{ds} d\delta y \text{ und } S\lambda \frac{dz}{ds} d\delta z$$

Die allgemeine Gleichung des Gleichgewichtes ist daher (§. 9. I)

$$o = S\left[\left(Xdm - d.\lambda \frac{dx}{ds}\right)\delta x + \left(Ydm - d.\lambda \frac{dy}{ds}\right)\delta y + \left(Zdm - d.\lambda \frac{dz}{ds}\right)\delta z\right]$$
$$+ \frac{\lambda''}{ds''}\left(dx''\delta x'' + dy''\delta y'' + dz''\delta z''\right)$$
$$- \frac{\lambda'}{ds''}\left(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z'\right) \ldots . (1)$$

Diese Gleichung kann aber nur bestehen, wenn der unter dem Integralzeichen begriffene Ausdruck für sich gleich Null ist. Da überdiefs die Gröfsen δx, δy und δz von einander unabhänging sind, so hat man (§. 6.)

$$o = Xdm - d.\lambda \frac{dx}{ds},\quad o = Ydm - d.\lambda \frac{dy}{ds},\quad o = Zdm - d.\lambda \frac{dz}{ds}$$

und da diese Gleichungen allein die Variationen d, ohne δ, enthalten, so bestimmen sie die Figur, welche der Faden im Zustande des Gleichgewichts annehmen mufs. Ihre Integrationen geben

$$\frac{\lambda dx}{ds} = A + \int X dm,\quad \frac{\lambda dy}{ds} = B + \int Y dm,\quad \frac{\lambda dz}{ds} = C + \int Z dm$$

wo A B C constante Gröfsen sind. Eliminirt man λ aus diesen drey Gleichungen, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \int Y dm}{A + \int X dm} \text{ und } \frac{dz}{dx} = \frac{C + \int Z dm}{A + \int X dm}$$

welches die gesuchten Gleichungen der Curve sind, die der Faden annimmt, wenn er im Gleichgewichte ist.

I. Ist $X = Y = o$ und $Z = g$ die constante Schwere, und $dm = ds$ das Differential des Bogens der krummen Linie, so sind die vorhergehenden Gleichungen, da $y = o$ ist

$$\lambda \frac{dx}{ds} = A \text{ und } \lambda \frac{dz}{ds} = C + gs$$

also, wenn man aus ihnen die Gröfse λ eliminirt,

$$A \frac{dz}{dx} = C + gs$$

die bekannte einfache Gleichung der Kettenlinie. Substituirt man in ihr für dx die Gröſse $\sqrt{ds^2 - dz^2}$, so erhält man die Gleichung

$$dz = \frac{(C + gs)\, ds}{\sqrt{A^2 + (C + gs)^2}}$$

deren Integral ist

$$z + A' = \frac{1}{g} \cdot \sqrt{A^2 + (C + gs)^2}$$

also ist die Kettenlinie rectificabel, wie bekannt. Endlich ist die Spannung des Fadens in jedem seiner Punkte

$$\lambda . \sqrt{\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2}} = \sqrt{A^2 + (C + gs)^2} = g\,(A' + z)$$

II. Sollte der Faden auf einer Fläche liegen, deren Gleichung $dz = pdx + qdy$ ist, so hat man auch $\delta z = p\delta x + q\delta y$, und wenn man diesen Werth von δz in der vorhergehenden Gleichung des Gleichgewichtes substituirt, und die Factoren der nun von einander unabhängigen Gröſsen δx und δy, jeden für sich, gleich Null setzt, so erhält man für das Gleichgewicht des Fadens die beyden Gleichungen

$$o = Xdm - d.\frac{\lambda dx}{ds} + p\left(Zdm - d.\frac{\lambda dz}{ds}\right)$$

$$o = Ydm - d.\frac{\lambda dy}{ds} + q\left(Zdm - d.\frac{\lambda dy}{ds}\right)$$

III. Noch haben wir die Glieder der Gleichung (1) zu berücksichtigen, welche auſser dem Integralzeichen stehen, und welche sich daher auf die zwey Endpunkte des Fadens beziehen. Setzt man voraus, daſs der Faden an seinen beyden Endpunkten fest ist, so sind die Gröſsen $\delta x'$, $\delta x''$.... alle selbst Null, und man hat weiter keine Rücksicht auf diese Glieder der Gleichung (1) zu nehmen.

Nimmt man aber z. B. an, daſs das eine Ende des Fadens auf der Fläche $dz' = p'dx' + q'dy'$ und das andere Ende auf der Fläche $dz'' = p''dx'' + q''dy''$ bleiben soll, so hat man noch $\delta z' = p'\delta x' + q'\delta y'$ und $\delta z'' = p''\delta x'' + q''\delta y''$. Man wird also diese Werthe von $\delta z'$ und $\delta z''$ in jenen Gliedern der Gleichung (1) substituiren, und dann, wie zuvor, die Coefficienten von $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$ und $\delta y''$ einzeln gleich Null setzen, wodurch man vier Gleichungen erhält, welche die Lage der Endpunkte auf ihren Flächen für das Gleichgewicht bestimmen werden. Lagrange. Méc. anal.

§. 15.

Wir haben im §. 10. die allgemeinen Ausdrücke der Coordinaten des Schwerpunktes gegeben. Um auch diese Ausdrücke

auf einige besondere Fälle anzuwenden, wollen wir zuerst den Schwerpunkt eines Kreisbogens suchen, dessen Länge b und der Halbmesser des Kreises a seyn soll. — Nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten in dem Mittelpunkte des Kreises, so hat man nach §. 10. III

$$X = \frac{\int x ds}{s},\ Y = \frac{\int y ds}{s},\ Z = 0$$

und wenn man für die Achse der x den Halbmesser annimmt, welcher durch die Mitte des Bogens b geht, so ist offenbar auch $Y = 0$, weil der Schwerpunkt in diesem Halbmesser liegen mufs. Wir haben daher zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes die einzige Gleichung

$$X = \frac{\int x ds}{b}.$$

Es ist aber $x = a \operatorname{Cos} \frac{s}{a}$ und daher, wenn man von $s = + \frac{1}{2} b$ bis $s = - \frac{1}{2} b$ integrirt,

$$X = \frac{1}{b} . \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} a ds \operatorname{Cos} \frac{s}{a} = \frac{2a^2}{b} . \operatorname{Sin} \frac{b}{2a}$$

Da aber, wenn c die Sehne des Bogens b bezeichnet, $c = 2a \operatorname{Sin} \frac{b}{2a}$ ist, so hat man auch $X = \frac{ac}{b}$ oder die Distanz des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises ist die vierte Proportionale zu der Länge, der Sehne, und dem Halbmesser des Bogens.

I. Sucht man den Schwerpunkt einer ebenen Figur, die durch die Achse der x und durch eine ebene Curve begrenzt ist, so hat man nach §. 10. IV

$$X = \frac{\int yx dx}{\int y dx} \text{ und } Y = \frac{\frac{1}{2} \int y^2 dx}{\int y dx}$$

Für den Abschnitt des so eben betrachteten Kreises zwischen der Sehne c und dem Bogen b, hat man, wenn man wieder die Achse der x auf dem Halbmesser annimmt, welcher den Bogen, also auch den Abschnitt des Kreises halbirt,

$$Y = 0, \text{ und } X = \frac{\int x dx \sqrt{a^2 - x^2}}{\int dx \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Das Integral des Zählers ist $\int x dx . \sqrt{a^2 - x^2} = - \frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

also auch dieses Integral zwischen $x = a$ und $x = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$ genommen, gleich $\frac{c^3}{12}$. Nennt man also $A = \int y dx$ die Fläche

des Abschnittes selbst und c die sie begränzende Sehne, so ist $X = \frac{c^3}{12A}$.

II. Sucht man den Schwerpunkt der Oberfläche des Kugelabschnittes, der durch die Umdrehung des bisher betrachteten Kreisabschnittes um denjenigen seiner Halbmesser entsteht, der durch die Mitte des Abschnittes geht, so wird der Schwerpunkt auf demselben Halbmesser liegen, und seine Entfernung von dem Mittelpunkte der Kugel wird (nach §. 10. V) seyn.

$$X = \frac{\int xy \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int y \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Behält man aber die vorigen Bezeichnungen bey, so ist

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ und } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ also auch}$$

$$\int y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int a\,dx \text{ und } \int xy \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int ax\,dx.$$

Nennt man daher h die senkrechte Entfernung der Sehne dieses Abschnittes von dem Mittelpunkte, und nimmt man diese beyden Integrale von x = h bis x = a, so erhält man

$$\int y \sqrt{dx^2 + dy^2} = a(a - h) \text{ und } \int xy \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a}{2}(a^2 - h^2)$$

also ist $X = \frac{a + h}{2}$ oder der gesuchte Schwerpunkt liegt in der Mitte zwischen der Sehne und dem Endpunkte jenes Halbmessers.

III. Man suche den Schwerpunkt des Theiles einer Kugel, der zwischen zwey auf der Achse der x senkrechten gegebenen Ebenen enthalten ist.

Da die Kugel aus der Umdrehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser entsteht, so haben wir, wenn wir diesen Durchmesser für die Achse der x nehmen, nach §. 10. VI für den Abstand des Schwerpunktes in dieser Achse von dem Mittelpunkte der Kugel

$$X = \frac{\int y^2 x\,dx}{\int y^2\,dx}$$

Ist a der Halbmesser des erzeugenden Kreises, so ist die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ und daher

$$X = \frac{\int (a^2 - x^2)\,x\,dx}{\int (a^2 - x^2)\,dx} = \frac{\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}}{a^2x - \frac{x^3}{3}}$$

Ist ferner A der Abstand der ersten und B der Abstand der zwey-

ten, das Kugelstück begränzenden Ebene von dem Mittelpunkte der Kugel, so ist der Werth von X zwischen den Gränzen $x=A$ und $x=B$ genommen

$$X = \frac{\frac{a^2}{2}(A^2-B^2)-\frac{1}{4}(A^4-B^4)}{a^2(A-B)-\frac{1}{3}(A^3-B^3)} = \frac{3}{4}(A+B)\frac{2a^2-A^2-B^2}{3a^2-A^2-B^2-AB}$$

und dieses ist die gesuchte Entfernung des Schwerpunktes des gegebenen Kugelstückes von dem Mittelpunkte der Kugel. Für die Halbkugel ist $A = o$ und $B = a$ also $X = \frac{3a}{8}$, und für die ganze Kugel ist $A = B = o$, also auch $X = o$.

Nicht weniger einfach ist die Bestimmung des Schwerpunktes auch für alle diejenigen Körper, die wenigstens in Beziehung auf eine einzige ihrer drey senkrechten Achsen symmetrisch sind. Denn ist dieses z. B. die Achse der z, so kann man den Körper durch unendlich viele Ebenen, die alle auf diese Achse der z senkrecht stehen, in seine Elemente zerlegen, und jedes dieser Elemente als einen Cylinder betrachten, dessen Höhe gleich dz, und dessen Basis der Durchschnitt W des Körpers mit einer jener Ebenen ist, so dafs das Integral $\int W dz$ zwischen $z = A$ und $z = B$ genommen, das Volum des Körpers ausdrückt, welches zwischen den zwey auf die Achse der z senkrechten Ebenen enthalten ist, deren Abstände von dem Anfangspunkte der Coordinaten A und B sind. Da dann der Schwerpunkt dieses Theiles des Körpers wegen seiner vorausgesetzten um die Achse der z symetrischen Form in dieser Achse selbst liegen mufs, so hat man für den Abstand des Schwerpunktes von dem Anfangspunkte der Coordinaten

$$Z = \frac{\int Wz\,dz}{\int W dz}$$

Um auch dieses durch ein Beyspiel zu erläutern, so wollen wir den Schwerpunkt eines Ellipsoids suchen, dessen drey Achsen a b c sind. Die Gleichung der Oberfläche dieses Körpers zwischen den jenen Achsen parallelen Coordinaten x y z ist bekanntlich

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Der Schnitt dieses Ellipsoids mit einer der xy parallelen Ebene, deren Abstand von dem Anfangspunkte der Coordinaten gleich z ist, hat zur Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$$

Dieser Schnitt ist also eine Ellipse, deren halbe Achsen

$$\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2} \text{ und } \frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2} \text{ sind.}$$

Da die Oberfläche einer Ellipse gleich dem Produkte ihrer beyden halben Achsen in die Zahl $\pi = 3.14159\ldots.$ ist, so ist die Fläche dieser Ellipse

$$W = \frac{ab\pi}{c^2}(c^2-z^2) \quad \text{und daher}$$

$$Z = \frac{\int Wz\,dz}{\int W\,dz} = \frac{\frac{c^2z^2}{2}-\frac{z^4}{4}}{c^2z-\frac{z^3}{3}}$$

oder wenn man diese Integralien zwischen den Gränzen $z = A$ und $z = B$ nimmt

$$Z = \frac{\frac{c^2}{2}(A^2-B^2)-\frac{1}{4}(A^4-B^4)}{c^2(A-B)-\frac{1}{3}(A^3-B^3)} = \frac{3}{4}(A+B)\frac{2c^2-A^2-B^2}{3c^2-A^2-B^2-AB}$$

welcher Ausdruck also unabhängig von den beyden anderen Achsen a und b des Ellipsoids ist. Für die Hälfte des Ellipsoids ist $A = 0$ und $B = c$, also

$$Z = \frac{3c}{8}$$

also wie bey der Halbkugel, deren Halbmesser c ist.

IV. Um endlich auch zu sehen, wie die allgemeinen dreyfachen Integrale des §. 10. VI anzuwenden sind, für einen Körper von irgend einer Gestalt, so wollen wir zuerst den körperlichen Inhalt K eines Kugelstückes suchen, welches zwischen zwey parallelen Ebenen enthalten ist, deren Abstände von dem Mittelpunkte der Kugel A und B sind.

Ist a der Halbmesser der Kugel, also ihre Gleichung

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

so ist überhaupt

$$K = \int\int\int dx\,dy\,dz$$

und es ist willkührlich, in welcher Ordnung diese drey Integrationen in Beziehung auf dx, dy und dz vorgenommen werden. Nimmt man sie z. B in der Ordnung z x y vor, so ist

$$K = \int dy \int dx \int dz$$

und davon gibt das erste Integral $\int dz = z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ so daſs man hat

$$K = \int dy \int dx \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

Es ist aber

$$\int dx \sqrt{a^2-x^2-y^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(a^2-y^2) \text{ Arc Sin } \frac{x}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

Nimmt man dieses Integral von dem Mittelpunkte oder von $x=o$ bis zu dem unbestimmten Punkte $x=\sqrt{a^2-y^2}$, so hat man

$$\int dx \sqrt{a^2-x^2-y^2} = \frac{\pi}{4}(a^2-y^2)$$

wo $\pi = 3{,}14159\ldots$ und daher

$$K = \int dy . \int dx \sqrt{a^2-x^2-y^2} = \frac{\pi}{4} \int dy\,(a^2-y^2) = \frac{\pi}{4}(a^2 y - \tfrac{1}{3} y^3)$$

und wenn man dieses Integral zwischen den Gränzen $y = A$ und $y = B$ nimmt, für das gesuchte Kugelstück

$$K = \frac{\pi}{4}[a^2(A-B) - \tfrac{1}{3}(A^3 - B^3)]$$

$$= \frac{\pi}{4}(A-B)[a^2 - \tfrac{1}{3}(A^2+B^2+AB)]$$

Für $A = a$ und $B = o$ gibt der letzte Ausdruck den achten Theil der Kugel gleich $\frac{\pi a^3}{6}$, also die ganze Kugel $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Um eben so den körperlichen Inhalt K eines senkrechten Kegels mit kreisförmiger Basis zu finden, sey a der Halbmesser der Basis, und b die Höhe der Spitze des Kegels über der Grundfläche desselben, so ist die Gleichung der Oberfläche des Kegels

$$a^2(b-z)^2 = b^2(x^2+y^2)$$

und daher das gesuchte Volum desselben

$$K = \int dx \int dy \int dz = \int dx \int z\, dy = \frac{b}{a} \int dx \int dy\,(a - \sqrt{x^2+y^2})$$

Es ist aber

$$\int dy\,(a-\sqrt{x^2+y^2}) = ay - \tfrac{1}{2} y \sqrt{x^2+y^2} - \tfrac{1}{2} x^2 \text{ Log } \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{\text{Const}}$$

wo die Constante der Integration auch eine Function von x seyn kann. Wird dieses Integeal von $y=o$ bis $y=\sqrt{a^2-x^2}$ genommen, so hat man

$$\int dy\,(a-\sqrt{x^2+y^2}) = \tfrac{1}{2} a \sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{1}{2} x^2 \text{ Log } \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

und daher

$$K = \frac{b}{2} \int dx \sqrt{a^2-x^2} - \frac{b}{2a} \int x^2\, dx . \text{Log } \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \quad \text{oder}$$

$$K = \frac{bx}{3}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2 b}{6}\,\text{Arc Sin}\,\frac{x}{a} - \frac{bx^3}{6a}\,\text{Log}\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

für den Theil des Volums des Kegels, der zwischen zwey auf der Achse der x senkrechten Ebenen enthalten ist, deren die eine durch den Mittelpunkt der Basis, und durch die Spitze des Kegels geht, und die andere um die Größe x von der ersten entfernt ist. Setzt man in dem letzten Ausdrucke $x = a$, so erhält man den vierten Theil des Kegels $\frac{\pi a^2 b}{2}$, also den ganzen $2\pi a^2 b$.

Der berühmte Kepler gab sich (Nova stereometria doliorum) viele Mühe, den körperlichen Inhalt eines solchen Kegelabschnittes zu finden, ohne seinen Zweck zu erreichen, da zu seiner Zeit die höhere Geometrie noch sehr unvollkommen, und die eigentliche Analysis des Unendlichen noch ganz unbekannt war.

§. 16.

Es gibt aber noch eine andere Art, diese Integration auszudrücken, die oft viel bequemer ist als die vorhergehende.

Aus irgend einem willkührlichen Punkte A im Innern des Körpers denke man sich eine gerade Linie r an irgend einen andern willkührlichen Punkt M der Oberfläche des Körpers. Sey ϑ der Winkel der r mit der Achse der z, und w der Winkel der Projection von r auf der Ebene der xy mit der Achse der x. Man ziehe aus dem Punkte A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r zwey unter einander senkrechte Kreisbogen, die sich in dem Punkte M unter einem rechten Winkel schneiden, und von denen der eine senkrecht auf der Ebene der xy steht, während der andere mit dieser Ebene parallel ist. Durch einen andern Punkt N der Oberfläche des Körpers, welcher dem vorhergehenden Punkte M unendlich nahe ist, ziehe man aus demselben Mittelpunkte A und mit demselben Halbmesser r zwey andere unter einander senkrechte Kreisbogen, welche die beyden vorhergehenden Kreisbogen in den Punkten M′ und N′ schneiden sollen. Die Ebenen dieser vier Kreise begränzen einen Theil des Körpers, der die Gestalt einer Pyramide hat, deren Scheitel der gemeinschaftliche Mittelpunkt A aller dieser Kreise, und deren Basis der Theil MNM′N′ der Oberfläche des Körpers ist, und man sieht leicht, daſs man hat $MM' = NN' = r d\vartheta$ und $MN' = NM' = r \sin\vartheta\, dw$, so daſs also die Fläche der Basis der Pyramide durch den Ausdruck $r^2 d\vartheta\, dw \sin\vartheta$ dargestellt werden kann. Da aber die Höhe dieser Pyramide gleich r ist, so ist der körperliche Inhalt derselben $\frac{1}{3} r^3 d\vartheta\, dw \sin\vartheta$.

Denkt man sich aber in dem Halbmesser AM und AN zwey andere Punkte m und n, welche den vorhergehenden M und N unendlich nahe und in dem Innern des Körpers liegen, so daſs

ihre Entfernungen von dem Punkte A gleich A m = A n = r — dr sind, und zieht man dann aus demselben Mittelpunkte A wieder vier Kreisbogen, deren sich je zwey in m und n unter rechten Winkeln schneiden, so erhält man eine andere Pyramide, deren Basis $(r-dr)^2\, d\vartheta\, dw \,\mathrm{Sin}\, \vartheta$, und deren Höhe $r-dr$, deren körperlicher Inhalt also gleich $\frac{1}{3}\,(r-dr)^3\, d\vartheta\, dw\, \mathrm{Sin}\, \vartheta$ ist.

Die Differenz der beyden Pyramiden ist

$$\frac{r^3-(r-dr)^3}{3}\,.\, d\vartheta\, dw\, \mathrm{Sin}\, \vartheta.$$

oder wenn man die Differentialien der vierten und höheren Ordnungen wegläſst

$$dK = r^2\, \mathrm{Sin}\, \vartheta\,.\, dr\, d\vartheta\, dw$$

und dieser Ausdruck kann eben sowohl als das Element des ganzen Körpers angesehen werden, wie zuvor der unendlich kleine Würfel dx dy dz.

I. Es gibt noch ein anderes allgemeines Verfahren, diese Verwandlung der Coordinaten vorzunehmen. Hätte man z. B. den Ausdruck U dx dy dz, wo U eine Function von x y z ist, in einen gleichbedeutenden zu verwandeln, der von den neuen Coordinaten r w ϑ abhängt, so wird man annehmen

$$\left.\begin{aligned} dx &= \alpha\, d\vartheta + \beta\, dw + \gamma\, dr \\ dy &= \alpha'\, d\vartheta + \beta'\, dw + \gamma'\, dr \\ dz &= \alpha''\, d\vartheta + \beta''\, dw + \gamma''\, dr \end{aligned}\right\}\ \text{I.}$$

wo $\alpha\, \alpha'$.. Functionen von r w ϑ sind.

Da nun der Ausdruck $\int\!\int\!\int U\, dx\, dy\, dz$ dreymahl integrirt werden soll, das erstemahl z. B. in Beziehung auf x, das heiſst in Beziehung auf y = z = Const. oder auf dy = dz = o, so findet man den entsprechenden Werth von dx durch folgende drey Gleichungen

$$\begin{aligned} dx &= \alpha\, d\vartheta + \beta\, dw + \gamma\, dr \\ o &= \alpha'\, d\vartheta + \beta'\, dw + \gamma'\, dr \\ o &= \alpha''\, d\vartheta + \beta''\, dw + \gamma''\, dr \end{aligned}$$

Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen die Gröſse dw und dr, und setzt man der Kürze wegen

$$T = \alpha\,(\beta'\gamma''-\beta''\gamma') + \beta\,(\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'') + \gamma\,(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')$$

so ist

$$dx = \frac{T\,.\,d\vartheta}{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}$$

und dieser Werth von dx bringt das Produkt dx dy dz auf die drey varibleu Gröſsen ϑ, y und z. Um weiter eben so dy zu finden, wird man $d\vartheta$ = dz = o setzen, wodurch die zwey letzten die Gleichungen (I) werden.

$$dy = \beta' \, dw + \gamma' \, dr \text{ und } o = \beta'' \, dw + \gamma'' \, dr,$$

woraus man durch Elimination von dr erhält

$$dy = (\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma') \frac{dw}{\gamma''}$$

so dafs man hat $dx\,dy = \frac{T \,.\, d\vartheta \, dw}{\gamma''}$, wodurch also das Produkt $dx\,dy\,dz$ auf die drey veränderlichen Gröfsen ϑ, w und z gebracht wird. Um endlich noch dz zu finden, wird man $d\vartheta = dw = o$ setzen, wodurch die letzte der Gleichungen (I) gibt $dz = \gamma'' dr$, so dafs man hat $dx\,dy\,dz = T \,.\, d\vartheta\,dw\,dr$ oder

$$\int\!\!\int\!\!\int U \, dx \, dy \, dz = \int\!\!\int\!\!\int U \, T \,.\, d\vartheta \, dw \, dr,$$

in welchem letzten Ausdrucke die Gröfse U ebenfalls als eine Funktion von r, w, ϑ zu betrachten ist.

Behält man, um die Anwendung des Vorhergehenden zu zeigen, die obige Bezeichnung der Gröfsen r w ϑ bey, so ist

$$x = r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} w \quad y = r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} w \quad z = r \operatorname{Cos} \vartheta.$$

Differentiirt man diese drey Gleichungen nach allen in ihnen enthaltenen Gröfsen, so erhält man

$$\begin{array}{lll} \alpha = r \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} w & \beta = - r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} w & \gamma = \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} w \\ \alpha' = r \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} w & \beta' = r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} w & \gamma' = \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} w \\ \alpha'' = - r \operatorname{Sin} \vartheta & \beta'' = o & \gamma'' = \operatorname{Cos} \vartheta \end{array}$$

also ist $T = r^2 \operatorname{Sin} \vartheta$. Setzt man daher $U = 1$, so ist das Element des Volums des Körpers

$$dK = dx\,dy\,dz = T \,.\, dr\,dw\,d\vartheta = r^2 \, dr \, dw \, d\vartheta \operatorname{Sin} \vartheta \text{ wie zuvor.}$$

Hätte man aber die Winkel ϑ und w so angenommen, dafs man hat

$$x = r \operatorname{Cos} \vartheta \quad y = r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} w \quad z = r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} w$$

so würde man ebenfalls finden $T = r^2 \operatorname{Sin} \vartheta$ also auch

$$dK = r^2 \, dr \, dw \, d\vartheta \operatorname{Sin} \vartheta \text{ wie zuvor.}$$

II. Verwickelter wird der Ausdruck in r, w, ϑ für das Element der Oberfläche der Körper, das bekanntlich in rechtwinklichten Coordinaten x y z gleich

$$dS = dx\,dy \,.\, \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \text{ ist.}$$

Man kann aber die drey Gröfsen x y z, wenn man die Gleichung für die gegebene Fläche zu Hülfe nimmt, immer auf zwey andere Gröfsen p und q zurückführen, so dafs man hat

$$\begin{aligned} dx &= \alpha \, dp + \beta \, dq \\ dy &= \alpha' dp + \beta' dq \\ dz &= \alpha'' dp + \beta'' dq \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen drey Gleichungen die zwey Gröſsen dp, dq, so erhält man

$$(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')\,dx+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')\,dy+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\,dz=0$$

Die Gleichung einer Ebene, in welcher bekanntlich immer die Coefficienten von dx, dy, dz die Cosinus der Winkel sind, welche diese Ebene in derselben Ordnung mit den coordinirten Ebenen der yz, xz und xy bildet. Daraus folgt, daſs jedes Element dS der gegebenen Fläche zu seinen Projectionen in den coordinirten Ebenen der yz, xz und xy in derselben Ordnung die Ausdrücke habe

$$(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')\,dp\,dq,\quad(\alpha''\beta-\alpha\beta'')\,dp\,dq,\quad(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\,dp\,dq,$$

und da bekanntlich das Quadrat jeder ebenen Figur gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drey unter einander senkrechten Ebenen ist, so hat man für das Element der Fläche des gegebenen Körpers

$$dS=dp\,dq.\sqrt{[(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')^2+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2]}$$

Nähere Anwendungen dieser Ausdrücke werden wir weiter unten kennen lernen.

III. Wendet man das Vorhergehende auf die Bestimmung der Coordinaten X Y Z des Schwerpunktes an, so hat man, wenn ϱ die veränderliche Dichte des Körpers bezeichnet, nach §. 10. VI.

$$X=\frac{\int\int\int x\,dK}{K},\quad Y=\frac{\int\int\int y\,dK}{K},\quad Z=\frac{\int\int\int z\,dK}{K},$$

$$\text{wo } K=\int\int\int\varrho r^2\,\text{Sin}\,\vartheta\,dr\,d\vartheta\,dw$$

und da man nach der oben angenommenen Bezeichnung der Gröſsen ϑ und w hat

$$x=r\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,w,\ y=r\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Sin}\,w \text{ und } z=r\,\text{Cos}\,\vartheta$$

so erhält man für die gesuchten Coordinaten des Schwerpunktes

$$X=\frac{\int\int\int\varrho r^3.\,\text{Sin}^2\vartheta\,\text{Cos}\,w.\,dr\,d\vartheta\,dw}{\int\int\int\varrho r^2.\,\text{Sin}\,\vartheta\,dr\,d\vartheta\,dw}$$

$$Y=\frac{\int\int\int\varrho r^3.\,\text{Sin}^2\vartheta\,\text{Sin}\,w\,dr\,d\vartheta\,dw}{\int\int\int\varrho r^2.\,\text{Sin}\,\vartheta.\,dr\,d\vartheta\,dw}$$

$$Z=\frac{\int\int\int\varrho r^3\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,\vartheta\,dr\,d\vartheta\,dw}{\int\int\int\varrho r^2\,\text{Sin}\,\vartheta\,dr\,d\vartheta\,dw}$$

Alle diese Integralien werden von w = o bis w = 360 dann von ϑ = o bis ϑ = 180 und endlich von r = o bis zu dem Werthe von r genommen, der zu irgend einem Punkte der Oberfläche des Körpers gehört.

Suchen wir zum Beyspiel den Schwerpunkt eines Kugelausschnittes, zu welchem der Halbmesser a und der Winkel 2α der

$$dy = \beta' dw + \gamma' dr \text{ und } o = \beta'' dw + \gamma'' dr,$$

woraus man durch Elimination von dr erhält

$$dy = (\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma') \frac{dw}{\gamma''}$$

so daſs man hat $dx\, dy = \frac{T \,.\, d\vartheta\, dw}{\gamma''}$, wodurch also das Produkt dx dy dz auf die drey veränderlichen Gröſsen ϑ, w und z gebracht wird. Um endlich noch dz zu finden, wird man $d\vartheta = dw = o$ setzen, wodurch die letzte der Gleichungen (I) gibt $dz = \gamma'' dr$, so daſs man hat $dx\, dy\, dz = T \,.\, d\vartheta\, dw\, dr$ oder

$$\int\!\!\int\!\!\int U\, dx\, dy\, dz = \int\!\!\int\!\!\int U\, T \,.\, d\vartheta\, dw\, dr,$$

in welchem letzten Ausdrucke die Gröſse U ebenfalls als eine Funktion von r, w, ϑ zu betrachten ist.

Behält man, um die Anwendung des Vorhergehenden zu zeigen, die obige Bezeichnung der Gröſsen r w ϑ bey, so ist

$$x = r \sin \vartheta \cos w \quad y = r \sin \vartheta \sin w \quad z = r \cos \vartheta.$$

Differentiirt man diese drey Gleichungen nach allen in ihnen enthaltenen Gröſsen, so erhält man

$$\begin{array}{lll} \alpha = r \cos \vartheta \cos w & \beta = -r \sin \vartheta \sin w & \gamma = \sin \vartheta \cos w \\ \alpha' = r \cos \vartheta \sin w & \beta' = r \sin \vartheta \cos w & \gamma' = \sin \vartheta \sin w \\ \alpha'' = -r \sin \vartheta & \beta'' = o & \gamma'' = \cos \vartheta \end{array}$$

also ist $T = r^2 \sin \vartheta$. Setzt man daher $U = 1$, so ist das Element des Volums des Körpers

$$dK = dx\, dy\, dz = T \,.\, dr\, dw\, d\vartheta = r^2\, dr\, dw\, d\vartheta \sin \vartheta \text{ wie zuvor.}$$

Hätte man aber die Winkel ϑ und w so angenommen, daſs man hat

$$x = r \cos \vartheta \quad y = r \sin \vartheta \cos w \quad z = r \sin \vartheta \sin w$$

so würde man ebenfalls finden $T = r^2 \sin \vartheta$ also auch

$$dK = r^2\, dr\, dw\, d\vartheta \sin \vartheta \text{ wie zuvor.}$$

II. Verwickelter wird der Ausdruck in r, w, ϑ für das Element der Oberfläche der Körper, das bekanntlich in rechtwinklichten Coordinaten x y z gleich

$$dS = dx\, dy \,.\, \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \text{ ist.}$$

Man kann aber die drey Gröſsen x y z, wenn man die Gleichung für die gegebene Fläche zu Hülfe nimmt, immer auf zwey andere Gröſsen p und q zurückführen, so daſs man hat

$$\begin{aligned} dx &= \alpha\, dp + \beta\, dq \\ dy &= \alpha' dp + \beta' dq \\ dz &= \alpha'' dp + \beta'' dq \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen drey Gleichungen die zwey Gröfsen dp, dq, so erhält man

$$(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')\,dx + (\alpha''\beta-\alpha\beta'')\,dy + (\alpha\beta'-\alpha'\beta)\,dz = o$$

Die Gleichung einer Ebene, in welcher bekanntlich immer die Coefficienten von dx, dy, dz die Cosinus der Winkel sind, welche diese Ebene in derselben Ordnung mit den coordinirten Ebenen der yz, xz und xy bildet. Daraus folgt, dafs jedes Element dS der gegebenen Fläche zu seinen Projectionen in den coordinirten Ebenen der yz, xz und xy in derselben Ordnung die Ausdrücke habe

$$(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')\,dp\,dq, \quad (\alpha''\beta-\alpha\beta'')\,dp\,dq, \quad (\alpha\beta'-\alpha'\beta)\,dp\,dq,$$

und da bekanntlich das Quadrat jeder ebenen Figur gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drey unter einander senkrechten Ebenen ist, so hat man für das Element der Fläche des gegebenen Körpers

$$dS = dp\,dq.\sqrt{[(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2 + (\alpha''\beta-\alpha\beta'')^2 + (\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2]}$$

Nähere Anwendungen dieser Ausdrücke werden wir weiter unten kennen lernen.

III. Wendet man das Vorhergehende auf die Bestimmung der Coordinaten X Y Z des Schwerpunktes an, so hat man, wenn ϱ die veränderliche Dichte des Körpers bezeichnet, nach §. 10. VI.

$$X = \frac{\int\int\int x\,dK}{K}, \quad Y = \frac{\int\int\int y\,dK}{K}, \quad Z = \frac{\int\int\int z\,dK}{K},$$

$$\text{wo } K = \int\int\int \varrho r^2 \,\text{Sin}\,\vartheta\, dr\, d\vartheta\, dw$$

und da man nach der oben angenommenen Bezeichnung der Gröfsen ϑ und w hat

$$x = r\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,w,\; y = r\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Sin}\,w \text{ und } z = r\,\text{Cos}\,\vartheta$$

so erhält man für die gesuchten Coordinaten des Schwerpunktes

$$X = \frac{\int\int\int \varrho r^3.\,\text{Sin}^2\,\vartheta\,\text{Cos}\,w.\,dr\,d\vartheta\,dw}{\int\int\int \varrho r^2.\,\text{Sin}\,\vartheta\,dr\,d\vartheta\,dw}$$

$$Y = \frac{\int\int\int \varrho r^3.\,\text{Sin}^2\,\vartheta\,\text{Sin}\,w\,dr\,d\vartheta\,dw}{\int\int\int \varrho r^2.\,\text{Sin}\,\vartheta.\,dr\,d\vartheta\,dw}$$

$$Z = \frac{\int\int\int \varrho r^3\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,\vartheta\,dr\,d\vartheta\,dw}{\int\int\int \varrho r^2\,\text{Sin}\,\vartheta\,dr\,d\vartheta\,dw}$$

Alle diese Integralien werden von w = o bis w = 360 dann von ϑ = o bis ϑ = 180 und endlich von r = o bis zu dem Werthe von r genommen, der zu irgend einem Punkte der Oberfläche des Körpers gehört.

Suchen wir zum Beyspiel den Schwerpunkt eines Kugelausschnittes, zu welchem der Halbmesser a und der Winkel 2α der

beyden äuſsersten Halbmesser gehört. Der körperliche Inhalt dieses Kugelausschnittes ist

$$K = \iiint \varrho\, r^2 . \operatorname{Sin} \vartheta . dr\, d\vartheta\, dw.$$

Wenn 2π die ganze Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, bezeichnet, so ist das erste Integral von K in Beziehung auf w von $w = o$ bis $w = 2\pi$ genommen,

$$K = 2\pi \iint \varrho\, r^2\, dr . \operatorname{Sin} \vartheta\, d\vartheta$$

und davon ist das Integral in Beziehung auf ϑ

$$K = -\,2\pi \operatorname{Cos} \vartheta . \int \varrho\, r^2\, dr$$

also auch dieses Integral von $\vartheta = o$ bis $\vartheta = \alpha$ genommen

$$K = 2\pi\, (1 - \operatorname{Cos} \alpha) \int \varrho\, r^2\, dr$$

und eben so findet man, daſs die beyden Integrale $\iiint \varrho\, r^3 . \operatorname{Sin}^2 \vartheta \operatorname{Cos} w . dr\, d\vartheta\, dw$ und $\iiint \varrho\, r^3 . \operatorname{Sin}^2 \vartheta \operatorname{Sin} w . dr\, d\vartheta dw$ zwischen denselben Gränzen genommen, gleich Null sind. Endlich ist

$$\iiint \varrho\, r^3 . \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \vartheta . dr\, d\vartheta\, dw = \pi \operatorname{Sin}^2 \alpha . \int \varrho\, r^3\, dr.$$

Wir haben daher für die Coordinaten des Schwerpunktes

$$X = Y = o \text{ und } Z = \frac{\operatorname{Sin}^2 \alpha \int \varrho\, r^3\, dr}{2\, (1 - \operatorname{Cos} \alpha) \int \varrho\, r^2\, dr} = \frac{1 + \operatorname{Cos} \alpha}{2} . \frac{\int \varrho\, r^3\, dr}{\int \varrho\, r^2\, dr}$$

Nimmt man an, daſs die Dichte der Kugel von dem Mittelpunkte wie die n^{te} Potenz der Entfernung wächst, so ist $\varrho = r^n$, also der körperliche Inhalt des Segmentes

$$K = \frac{4\pi}{n+3} . a^{n+3} \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{und } Z = \frac{n+3}{n+4} . a \operatorname{Cos}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Ist die Dichte der Kugel in allen ihren Theilen dieselbe, so ist $n = o$ oder

$$K = \frac{4\pi}{3} . a^3 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} \text{ und } Z = \frac{3a}{4} \operatorname{Cos}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Für die halbe Kugel ist $\alpha = 90$ also

$$K = \frac{2\pi}{3} . a^3 \text{ und } Z = \frac{3a}{8}, \text{ wie zuvor.}$$

ZWEYTES KAPITEL.

Von der Bewegung überhaupt.

§. 1.

Wenn ein Körper ruht, oder im Gleichgewichte ist, so kann er sich selbst keine Bewegung geben, weil er in sich selbst keinen Grund enthalten kann, diese Ruhe aufzugeben. Wird er aber von irgend einer Ursache aufser dem Körper in Bewegung gesetzt, und dann sich selbst überlassen, so wird er sich immer auf dieselbe Art und in derselben Richtung fortbewegen, weil kein weiterer Grund da ist, der die Richtung seiner Bewegung, oder diese Bewegung selbst ändern kann. Diese Eigenschaft aller Körper in dem einmal angenommenen Zustande zu verharren heifst man Trägheit.

Die Bewegungen der Körper können unter einander sehr verschieden seyn. Die einfachste unter allen aber ist offenbar die, in welcher sich die von dem Körper zurückgelegten Räume wie die Zeiten verhalten, in welchen diese Räume zurückgelegt werden. Man nennt diese Bewegungen gleichförmige.

Die gleichförmigen Bewegungen sind daher unter einander blofs durch die gröfseren und kleineren Räume verschieden, welche in derselben Zeit zurückgelegt werden. Aus diesem Unterschiede ist der Begriff der Geschwindigkeit entstanden, der bey der gleichförmigen Bewegung das Verhältnifs des Raumes zu der Zeit ist, in welcher dieser Raum beschrieben wird. Ist also s der Raum, t die Zeit, in welcher jener Raum beschrieben wird, und v die Geschwindigkeit, so ist

$$v = \frac{s}{t}$$

Alle andern nicht gleichförmigen Bewegungen werden also eine veränderliche Geschwindigkeit haben. Da uns aber die innere Ursache aller Bewegung unbekannt ist, so können wir nicht wissen, ob bey der ungleichförmigen Bewegung die Veränderung der Geschwindigkeit ohne Aufhören statt hat, d. h. ob sie stätig fortgeht, oder ob die aufeinanderfolgenden Aenderungen der Ge-

schwindigkeit durch Zeiten von unbemerkbarer Dauer von einander getrennt sind. Es ist aber klar, daſs unter beyden Voraussetzungen die Erscheinungen für uns dieselben seyn werden, so wie eine krumme Linie für uns dieselbe bleibt, sie mag durch die stetige Bewegung eines Punktes oder aus einen Polygon von unendlich kleinen Seiten entstanden seyn. Wir werden annehmen, daſs die aufeinanderfolgenden Aenderungen der Geschwindigkeit durch unmerkliche Zeiten von einander getrennt sind, woraus dann folgt, daſs man jede Bewegung während einer unendlich kleinen Zeit als gleichförmig ansehen kann. Ist daher dt das Element der Zeit, in welcher ds das Element des Raumes zurückgelegt wird, so ist für jede Bewegung

$$v = \frac{ds}{dt} \ldots \text{(I)}$$

Ist also die Geschwindigkeit eines Körpers im Anfange eines Augenblickes $v = \frac{ds}{dt}$, so wird sie im Anfange des folgenden Augenblickes $v' = v + dv$ oder $v' = \frac{ds}{dt} + d.\frac{ds}{dt}$ seyn, wo dt das constante Element der Zeit bezeichnet.

Der erste Theil $\frac{ds}{dt}$ dieser neuen Geschwindigkeit ist eine Folge der Trägheit des Körpers: der zweyte aber $d.\frac{ds}{dt}$ kann eben wegen dieser Trägheit seine Ursache nicht in dem Körper selbst haben. Wir müssen daher die Ursache dieser Aenderung der Geschwindigkeit, welche Ursache wir mit dem Nahmen Kraft bezeichnen wollen, irgendwo auſser dem bewegten Körper annehmen. Da uns aber die innere Natur dieser Kraft, und ihre Art zu wirken gänzlich unbekannt ist, so sind wir gezwungen, ihre Wirkungen, welche wir allein kennen, für sie selbst zu substituiren.

Es ist auch in der That am einfachsten, für das Maaſs dieser Kraft die Geschwindigkeit anzunehmen, welche von dieser Kraft in einer bestimmten Zeit hervorgebracht wird, d. h. die Kraft der von ihr erzeugten Geschwindigkeit proporzionirt anzunehmen, und wir werden in der Folge sehen, daſs diese Annahme der Natur und den Erfahrungen vollkommen gemäſs ist.

Diese Annahme des Verhältnisses der Kraft zu der von ihr hervorgebrachten Geschwindigkeit, und die der Trägheit, sind daher als zwey ursprüngliche Naturgesetze zu betrachten, die uns durch die Beobachtungen gegeben werden: sie sind die einfachsten, die man voraussetzen kann, und zugleich die einzigen, welche die Mechanik von der Erfahrung entlehnt.

Nach dem Vorhergehenden wird also die augenblickliche Wirkung einer Kraft gleich $d.\frac{ds}{dt}$ seyn. Es ist aber klar, dafs man die augenblickliche Wirkung einer Kraft desto beträchtlicher annehmen mufs, je gröfser erstens die Intensität dieser Kraft, und je gröfser ferner die Zeit ist, während welcher sie wirkt. Daher verhält sich die augenblickliche Wirkung einer Kraft wie ihre Intensität multiplicirt in das Element der Zeit, während welcher sie wirkt. Heifst also p die Intensität einer Kraft und dt das Element der Zeit, während welcher sie wirkt, so wird die Wirkung dieser Kraft während dieser Zeit gleich p. dt seyn. Dieselbe Wirkung ist aber auch nach dem Vorhergehenden $d.\frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt}$, wenn man die Aenderungen der Zeiten als constant, oder die Zeit selbst als gleichförmig fortgehend betrachtet, also ist die Kraft selbst

$$p = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

oder auch

$$p = \frac{dv}{dt}$$

Aus den beyden Gleichungen (I), (II) folgt, dafs die Geschwindigkeit das erste, und die Kraft das zweyte Differential des Raumes in Beziehung auf die Zeit ist. Da sonach die Kräfte sich wie die Geschwindigkeiten verhalten, so gilt von der Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten dasselbe, was wir oben Cap. 1 §. 3. von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte gesagt haben.

§. 2.

Auf einen körperlichen Punkt wirke eine Anzahl von gegebenen Kräften nach gegebenen Richtungen. Man suche seine Bewegung.

Alle diese Kräfte lassen sich nach Cap. I auf drey andere X Y Z bringen, die in derselben Ordnung den rechtwinklichten Coordinaten x y z des Punktes parallel sind.

Am Ende irgend einer Zeit t wird also nach dem Vorhergehenden der Körper nach den Richtungen der drey Coordinaten die Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

haben, und wenn man am Ende dieser Zeit den Körper sich selbst überliefse, so würde er diese Geschwindigkeiten nach dem Gesetze der Trägheit unverändert beybehalten. Da aber am Ende der Zeit t die Kräfte X Y Z wieder auf den Körper wirken, so wird der Körper in dem nächstfolgenden Augenblicke dt die Geschwindigkeiten haben

$$\frac{dx}{dt} + Xdt, \quad \frac{dy}{dt} + Ydt, \quad \frac{dz}{dt} + Zdt$$

oder mit andern Worten, er wird die Geschwindigkeiten haben

$$\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt} - d.\frac{dx}{dt} + Xdt \text{ nach } x$$

$$\frac{dy}{dt} + d.\frac{dy}{dt} - d.\frac{dy}{dt} + Ydt \text{ nach } y$$

$$\frac{dz}{dt} + d.\frac{dz}{dt} - d.\frac{dz}{dt} + Zdt \text{ nach } z$$

Allein in diesem neuen Augenblicke sind offenbar auch die mit den drey Coordinaten parallelen Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} + d.\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} + d.\frac{dz}{dt}$$

woraus daher folgt, dafs die Geschwindigkeiten oder die Kräfte

$$\left.\begin{array}{l} - d.\frac{dx}{dt} + Xdt \\ - d.\frac{dy}{dt} + Ydt \\ - d.\frac{dz}{dt} + Zdt \end{array}\right\}$$

in diesem neuen Augenblicke s i c h a u f h e b e n, und dafs, wenn blofs diese letzten drey Kräfte auf den Körper wirkten, er vermöge dieser Kräfte im G l e i c h g e w i c h t e seyn würde.

Die allgemeine Gleichung des Gleichgewichtes (I Cap. §. 5. 9.) wird also zugleich die allgemeine Gleichung der Bewegung seyn, wenn man nur in jener den Kräften X Y Z noch die in entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte

$$-\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -\frac{d^2z}{dt^2} \text{ hinzufügt.}$$

I. Sind daher, wie dort, $L = o$, $L' = o$, $L'' = o \ldots$ die Gleichungen, durch welche gegebene Nebenbedingungen der Aufgabe ausgedrückt werden, und λ, λ', λ'' unbestimmte Gröfsen, so ist die allgemeine Gleichung der Bewegung (Cap. I §. 6. Gl. V)

$$o = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z$$
$$+ P\delta p + Q\delta q + \ldots + \lambda dL + \lambda' dL' + \ldots \text{ (III)}$$

oder wenn alle Kräfte P, Q.... auf drey andere X Y Z gebracht werden, welche nach den Achsen der x y z gerichtet sind,

$$o = \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z$$
$$+ \lambda dL + \lambda' dL' + \ldots \text{ (III)}$$

und man wird diese Gleichung eben so, wie oben die des Gleichgewichtes behandeln. Soll z. B. der Körper sich auf einer Fläche bewegen, deren Gleichung

$$dL = P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o$$

ist, wo also P, Q, R nicht mehr die vorhergehende Bedeutung haben, so erhält man für die Bewegung dieses Körpers die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} - X - \lambda P \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} - Y - \lambda Q \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} - Z - \lambda R \end{aligned}\right\} \ldots \text{ (IV)}$$

und der Druck des Körpers auf die Fläche wird seyn

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2} = \lambda\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$

Ist die Bewegung des Körpers ganz frey, so wird man in den letzten drey Gleichungen die Größe λ gleich Null setzen.

II. Sucht man die Bewegung mehrerer körperlichen Punkte oder Massenelemente, m, m′, m″... auf deren ersten die Kräfte mX, mY, mZ parallel mit den Coordinaten x y z dieses Punktes; auf den zweyten die Kräfte m′X′, m′Y′, m′Z′ parallel mit den analogen Coordinaten x′ y′ z′ dieses zweyten Punktes wirken u. s. w. so hat man nach Cap. I §. 9.

$$o = \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) m\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right) m\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right) m\delta z$$
$$+ \left(\frac{d^2x'}{dt^2} - X'\right) m'\delta x' + \left(\frac{d^2y'}{dt^2} - Y'\right) m'\delta y' + \left(\frac{d^2z'}{dt^2} - Z'\right) m'\delta z'$$
$$+ \lambda dL + \lambda' dL' + \ldots \text{ (V)}$$

III. Sucht man endlich die Gleichungen der Bewegung eines Körpers von irgend einer Gestalt, so wird man ebenfalls in den

sechs letzten Gleichungen des §. 9. Cap. I statt den Gröfsen X, Y, Z die folgenden

$$\frac{d^2x}{dt^2} - X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} - Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} - Z$$

setzen, wodurch man, wenn dm das Element der Masse des Körpers bezeichnet, folgende sechs Gleichungen erhält

$$\left.\begin{aligned} S\,dm.\frac{d^2x}{dt^2} &= S.\,X\,dm \\ S\,dm.\frac{d^2y}{dt^2} &= S.\,Y\,dm \\ S\,dm.\frac{d^2z}{dt^2} &= S.\,Z\,dm \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} S\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}\right)dm &= S\,(Yx-Xy)\,dm \\ S\left(\frac{zd^2x-xd^2z}{dt^2}\right)dm &= S\,(Xz-Zx)\,dm \\ S\left(\frac{yd^2z-zd^2y}{dt^2}\right)dm &= S\,(Zy-Yz)\,dm \end{aligned}\right\}$$

Die drey ersten dieser sechs Gleichungen bestimmen die Bewegung des Schwerpunktes des Körpers, und die drey letzten bestimmen die Rotation des Körpers um seinen Schwerpunkt, wo x y z die Coordinaten jedes Elementes des Körpers in Beziehung auf den Schwerpunkt des ganzen Körpers sind. Wird der Körper von einem fixen Punkt zurück gehalten, so kann seine Bewegung nur in einer Drehung um diesen fixen Punkt bestehen, und dann wird seine Bewegung blofs durch die drey letzten dieser Gleichungen bestimmt, vorausgesetzt, dafs man diesen fixen Punkt zum Anfang der Coordinaten x y z macht.

§. 3.

Für uns ist vorzüglich der Fall der Natur interessant, nach welchem sich bekanntlich alle himmlischen Körper im geraden Verhältnisse ihrer Massen und im verkehrten des Quadrates ihrer Entfernungen von einander anziehen.

Es seyen x y z die rechtwinklichten Coordinaten eines dieser Körper; x′ y′ z′ die den vorigen parallelen Coordinaten des zweyten, die denselben Anfangspunkt haben u. s. w. Auf den ersten Körper sollen parallel mit den Achsen der x y z die Kräfte X Y Z, auf den zweyten die Kräfte X′ Y′ Z′ wirken u. s. w. Ist aufser der Wirkung dieser Kräfte die Bewegung dieser Körper frey, und nimmt man an, dafs die Kräfte X, X′.... die Entfernungen x, x′.... zu vermindern streben, so werden wir in der Gleichung (V)

diese Kräfte X, X′.... negativ annehmen, und da dann die Gröfsen δx, δy, δz, $\delta x'$.... unabhängig sind, so wird man vermöge dieser Gleichung haben

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + X, \quad o = \frac{d^2y}{dt^2} + Y, \quad o = \frac{d^2z}{dt^2} + Z.$$

$$o = \frac{d^2x'}{dt^2} + X', \quad o = \frac{d^2y'}{dt^2} + Y', \quad o = \frac{d^2z'}{dt^2} + Z'$$

u. s. f.

Ist n die Anzahl dieser Körper, so ist 3n die Anzahl dieser Gleichungen, und ihre zweyten Integralien werden 6n Constanten enthalten, durch welche die Elemente der n Bahnen dieser Körper bestimmt werden. Diese 3n Integralgleichungen werden auch die Werthe der 3n Gröfsen x y z x′... in Functionen von t geben, wodurch also der Ort eines jeden dieser Körper für jede gegebene Zeit bestimmt wird.

I. Diefs vorausgesetzt wollen wir annehmen, dafs im Anfange der Coordinaten ein Körper sey, dessen Masse M ist. Die Entfernung dieses Central-Körpers von dem ersten der oben betrachteten Körper, dessen Coordinaten x y z sind, ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und daher die Kraft, mit welcher der Central-Körper auf jene wirkt, gleich $\frac{M}{r^2}$. Zerlegt man diese Kraft parallel mit den drey Coordinaten x y z, so erhält man für diese Seitenkräfte

$$X = \frac{M}{r^2} \cdot \frac{x}{r}, \quad Y = \frac{M}{r^2} \cdot \frac{y}{r}, \quad Z = \frac{M}{r^2} \cdot \frac{z}{r}$$

Ist daher nur dieser eine jener Körper da, so werden die vorhergehenden 3n Gleichungen in folgende drey übergehen

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Mx}{r^3}, \quad o = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{My}{r^3}, \quad o = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Mz}{r^3}$$

und diese drey Gleichungen werden die Bewegung des ersten Körpers bestimmen.

II. Nehmen wir jetzt an, dafs blofs die zwey ersten dieser Körper, ohne dem Central-Körper, da sind, und suchen wir ebenfalls ihre Bewegung. Diese beyden Körper sind also blofs ihren gegenseitigen Anziehungen unterworfen Es sey m die Masse des ersten und m′ die des zweyten Körpers. Die Distanz beyder ist $\varrho = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$ und daher die Wirkung von m′ auf m gleich $\frac{m'}{\varrho^2}$, woraus die Seitenkräfte nach x y z entstehen

$$\frac{m'(x'-x)}{\varrho^3},\quad \frac{m'(y'-y)}{\varrho^3},\quad \frac{m'(z'-z)}{\varrho^3}$$

also die ersten jener drey Gleichungen

$$o=\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{m'(x'-x)}{\varrho^3},\quad o=\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{m'(y'-y)}{\varrho^3},\quad o=\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{m'(z'-z)}{\varrho^3}$$

und eben so die drey folgenden

$$o=\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{m(x'-x)}{\varrho^3},\quad o=\frac{d^2y'}{dt^2}-\frac{m(y'-y)}{\varrho^3},\quad o=\frac{d^2z'}{dt^2}-\frac{m(z'-z)}{\varrho^3}$$

und die Bestimmung der Bewegung dieser beyden Körper wird von der doppelten Integration der letzten sechs Gleichungen abhängen.

III. Wären blofs die drey ersten Körper da, deren Massen m m' m'' seyn sollen, so sey

$$\varrho^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$
$$\varrho'^2 = (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2$$
$$\varrho''^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2$$

und die Bewegung dieser drey Körper, die blofs ihren gegenseitigen Anziehungen unterworfen sind, wird durch die folgenden neun Gleichungen gegeben seyn.

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m'}{\varrho^3}(x'-x) + \frac{m''}{\varrho'^3}(x''-x),$$
$$o = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{m'}{\varrho^3}(y'-y) + \frac{m''}{\varrho'^3}(y''-y),$$
$$o = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m'}{\varrho^3}(z'-z) + \frac{m''}{\varrho'^3}(z''-z)$$
$$o = \frac{d^2x'}{dt^2} - \frac{m}{\varrho^3}(x'-x) + \frac{m''}{\varrho''^3}(x''-x'),$$
$$o = \frac{d^2y'}{dt^2} - \frac{m}{\varrho^3}(y'-y) + \frac{m''}{\varrho''^3}(y''-y'),$$
$$o = \frac{d^2z'}{dt^2} - \frac{m}{\varrho^3}(z'-z) + \frac{m''}{\varrho''^3}(z''-z')$$
$$o = \frac{d^2x''}{dt^2} - \frac{m}{\varrho'^3}(x''-x) - \frac{m'}{\varrho''^3}(x''-x'),$$
$$o = \frac{d^2y''}{dt^2} - \frac{m}{\varrho'^3}(y''-y) - \frac{m'}{\varrho''^3}(y''-y'),$$
$$o = \frac{d^2z''}{dt^2} - \frac{m}{\varrho'^3}(z''-z) - \frac{m'}{\varrho''^3}(z''-z')$$

und so fort für mehrere Körper. Allein die doppelte Integration

dieser sehr zusammengesetzten Gleichungen biethet Schwierigkeiten dar, welche für den gegenwärtigen Zustand unserer Analysis unübersteiglich sind, und es vielleicht immer seyn werden.

IV. Um hier schon die Hindernisse einiger Maſsen schätzen zu lernen, welche sich der Integration solcher Gleichungen entgegensetzen, wollen wir den einfachsten Fall von drey Körpern annehmen, die in einer g e r a d e n Linie liegen, und sich gegenseitig anziehen. Ist m die Masse des ersten Körpers, und x seine Entfernung von einem gegebenen festen Punkt jener geraden Linie, und bezeichnet man für den zweyten Körper dieselben Gröſsen durch m' x' und für den dritten durch m'' x'', wo ich $x' > x$ und $x'' > x'$ annehme, so ist $(x' - x)$ die Entfernung des ersten Körpers vom zweyten, und $(x'' - x)$ des ersten vom dritten, also die Wirkung des zweyten auf den ersten $\frac{m'}{(x'-x)^2}$, und die des dritten auf den ersten $\frac{m''}{(x''-x)^2}$ und eben so für die übrigen. Wir haben daher für die gesuchten Gleichungen der Bewegung dieser drey Körper folgende drey einfache Gleichungen:

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{m'}{(x'-x)^2} - \frac{m''}{(x''-x)^2}$$

$$o = \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{m}{(x'-x)^2} - \frac{m''}{(x''-x')^2}$$

$$o = \frac{d^2x''}{dt^2} + \frac{m}{(x''-x)^2} + \frac{m'}{(x''-x')^2}$$

Von diesen drey Gleichungen aber kann offenbar keine für sich allein integrirt werden, sondern man muſs sie zuerst unter einander combiniren, um sie integrabel zu machen. Multiplicirt man die erste durch m, die zweyte durch m' und die dritte durch m'', so gibt die Summe dieser Producte

$$\frac{m\,d^2x + m'\,d^2x' + m''\,d^2x''}{dt^2} = o$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$m\,dx + m'\,dx' + m''\,dx'' = C.dt$ und davon ist das Integral

$m\,x + m'x' + m''x'' = C.t + C'$ wo C und C' constante Gröſsen bezeichnen. Dieſs ist eines der gesuchten vollständigen Integrale.

Multiplicirt man die erste derselben durch $m\,dx$, die zweyte durch $m'dx'$ und die dritte durch $m''dx''$, so gibt ihre Summe

$$\frac{m\,dx\,d^2x + m'dx'd^2x' + m''dx''d^2x''}{dt^2}$$

$$= \frac{m\,m'(dx-dx')}{(x-x')^2} + \frac{m\,m''(dx-dx'')}{(x-x'')^2} + \frac{m'm''(dx'-dx'')}{(x'-x'')^2}$$

wovon das Integral ist

$$\frac{m\,dx^2 + m'\,dx'^2 + m''\,dx''^2}{2\,dt^2} = \frac{m\,m'}{x'-x} + \frac{m\,m''}{x''-x} + \frac{m'\,m''}{x''-x} + C''$$

wo C'' wieder eine constante Gröfse ist. Diese Gleichung ist die zweyte der gesuchten Integralien, aber nur der ersten Ordnung. Es scheint sehr schwer zu seyn, noch eine dritte Integralgleichung, selbst nur wieder der ersten Ordnung, wie die letzte zu finden. Aber selbst wenn sie gefunden wäre, würde doch die vollständige Auflösung dieser Aufgabe, oder die Aufsuchung dreyer vollständiger zweyten Integrale der drey gegebenen Gleichungen noch sehr grofse Schwierigkeiten darbiethen.

§. 4.

Da wir aber bey den himmlischen Körpern, welche hier den vorzüglichsten Gegenstand unserer Untersuchungen ausmachen, nicht ihre absoluten, sondern nur ihre relativen Bewegungen, der Planeten um die Sonne und der Satelliten um ihre Hauptplaneten, beobachten können, so müssen wir die Gleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern suchen, die sich um einen derselben, als um einen Central-Körper bewegen.

Sey also M die Masse des Central-Körpers, und $m\ m'\ m'' \ldots$ die Massen der anderen Körper, deren relative Bewegung um M man sucht. Seyen ferner X Y Z die rechtwinklichten Coordinaten von M und $X + x$, $Y + y$, $Z + z$ die den vorigen parallelen Coordinaten von m, und $X + x'$, $Y + y'$, $Z + z'$ die von m' u. s. w. so dafs also x y z die Coordinaten von m in Beziehung auf M und $x'\ y'\ z'$ die von m' in Beziehung auf M sind u. s. w. Nennt man dann $r\ r' \ldots$ die Entfernungen der Körper $m,\ m' \ldots$ von M, so ist $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ u. s. w.

Dieses vorausgesetzt ist die Wirkung des Körpers m auf den Central-Körper gleich $\frac{m}{r^2}$ und die Richtung dieser Kraft fällt mit der Richtung der Distanz r zusammen. Um daher diese Kraft in der Richtung der Achse der x zerlegt zu erhalten, wird man sie mit dem Cosinus des Winkels multipliciren, welchen die Distanz r mit der Achse der x macht. Dieser Cosinus ist aber gleich $\frac{x}{r}$, also ist die Kraft von m auf M nach der Richtung der Achse der x gleich $\frac{mx}{r^3}$, und eben so ist auch $\frac{m'x'}{r'^3}$ die Kraft von m' auf M nach derselben Richtung zerlegt, und so fort für alle übrigen Körper des Systems. Wir haben daher für alle auf den Central-Körper nach der Richtung der Achse der x wirkenden Kräfte den Ausdruck

$$\frac{mx}{r^3}+\frac{m'x'}{r'^3}+\frac{m''x''}{r''^3}+\ldots$$

für welchen wir der Kürze wegen $\Sigma.\frac{mx}{r^3}$ setzen wollen.

Ganz eben so wird die Wirkung aller Körper m, m', m''.. auf M nach der Richtung der Achse der y zerlegt, gleich $\Sigma.\frac{my}{r^3}$, und endlich nach der Richtung der Achse der z zerlegt gleich $\Sigma.\frac{mz}{r^3}$ seyn. Wir erhalten daher für die Bewegung des Central-Körpers durch die Wirkung aller andern Körper des Systems nach der letzten Gleichung des §. 2. II

$$o=\frac{d^2X}{dt^2}-\Sigma.\frac{mx}{r^3}$$

$$o=\frac{d^2Y}{dt^2}-\Sigma.\frac{my}{r^3}$$

$$o=\frac{d^2Z}{dt^2}-\Sigma.\frac{mz}{r^3}$$

I. Wir wollen nun eben so die Bewegung eines der anderen Körper des Systems z. B. die des m suchen.

Die Wirkung des Körpers M auf m ist $-\frac{M}{r^2}$ also nach der Achse der x zerlegt, $-\frac{Mx}{r^3}$, das negative Zeichen, weil diese Wirkung der des Körpers m auf M (oder der Wirkung $\frac{mx}{r^3}$, die wir als positiv angenommen haben) in ihrer Richtung eine entgegengesetzte Lage hat.

Um die Wirkung des Körpers m' auf m zu finden, bemerken wir, dafs die Distanz dieser beyden Körper gleich $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$ und daher der Cosinus des Winkels dieser Distanz mit der Achse der x gleich

$$\frac{x'-x}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} \text{ ist,}$$

so dafs man für die Wirkung des m' auf m parallel mit der Achse der x hat

$$\frac{m'(x'-x)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Eben so ist die Wirkung von m'' auf m gleich

$$\frac{m''(x''-x)}{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

und so fort für alle übrigen Körper, so daſs man für die erste Gleichung der Bewegung des Körpers m erhält

$$o=\frac{d^2(X+x)}{dt^2}+\frac{Mx}{r^3}-\frac{m'(x'-x)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{m''(x''-x)}{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]^{\frac{3}{2}}}-\ldots$$

Substituirt man in dieser Gleichung für $\frac{d^2X}{dt^2}$ den oben gefundenen Werth

$$\frac{mx}{r^3}+\frac{m'x'}{r'^3}+\frac{m''x''}{r''^3}+\ldots$$

so erhält man

$$o=\frac{d^2x}{dt^2}+(M+m)\frac{x}{r^3}+\frac{m'x'}{r'^3}+\frac{m''x''}{r''^3}+\ldots$$

$$-\frac{m'(x'-x)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{m''(x''-x)}{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]^{\frac{3}{2}}}-\ldots$$

Um diesen Ausdruck einfacher zu machen, wollen wir eine Hülfsgröſse R so annehmen, daſs man hat

$$R=\frac{m'}{r'^3}(xx'+yy'+zz')+\frac{m''}{r''^3}(xx''+yy''+zz'')+\ldots$$

$$-\frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2(+z'-z)^2}}$$

$$-\frac{m''}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2}}-\ldots$$

so erhält man

$$o=\frac{d^2x}{dt^2}+(M+m)\frac{x}{r^3}+\left(\frac{dR}{dx}\right)$$

Zwey ähnliche Gleichungen wird man erhalten, wenn man dasselbe Verfahren auch in Beziehung auf die Achsen der y und der z wiederholt, oder einfacher, wenn man bloſs in dem letzten Ausdrucke die Gröſse x in y und in z verwandelt. Wir haben also für die ralative Bewegung des Körpers m durch die Wirkung aller übrigen Körper des Systems die drey Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} + (M+m)\frac{x}{r^3} + \left(\frac{dR}{dx}\right) \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} + (M+m)\frac{y}{r^3} + \left(\frac{dR}{dy}\right) \\ o &= \frac{dz^2}{dt^2} + (M+m)\frac{z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right) \end{aligned}\right\}$$

Verwandelt man in diesen Gleichungen die Gröſsen m r x y z in m′ r′ x′ y′ z′; m″ r″ x″ y″ z″ u. s. f. und umgekehrt, so erhält man die Gleichungen der Bewegung der Körper m′, m″ u. f. um den Central-Körper M.

II. Man kann diesen Gleichungen noch auf folgende Art eine einfachere Gestalt geben:

Sey $Q = \frac{M+m}{r} - R$ so ist

$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\left(\frac{M+m}{r^2}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right) - \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Aber $\left(\frac{dr}{dx}\right) = \frac{x}{r}$ also

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\left(\frac{M+m}{r^3}\right) x - \left(\frac{dR}{dx}\right)$$

und ähnliche Ausdrücke erhält man auch für

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) \text{ und } \left(\frac{dQ}{dz}\right).$$

Substituirt man sie in den vorhergehenden Gleichungen, so ist

$$\left.\begin{aligned} o &= \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) \\ o &= \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dQ}{dy}\right) \\ o &= \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) - \left(\frac{dQ}{dz}\right) \end{aligned}\right\}$$

III. Sind auſser dem Central-Körper M nur zwey Körper m und m′ zu betrachten, und sucht man die Bewegung von m um M, so gehen die vorhergehenden Gleichungen in folgende über

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} + (M+m)\frac{x}{r^3} + \frac{m'x'}{r'^3} - \frac{m'(x'-x)}{\Delta^3} \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} + (M+m)\frac{y}{r^3} + \frac{m'y'}{r'^3} - \frac{m'(y'-y)}{\Delta^3} \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} + (M+m)\frac{z}{r^3} + \frac{m'z'}{r'^3} - \frac{m'(z'-z)}{\Delta^3} \end{aligned}\right\}$$

wo $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$
$$\Delta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$ ist.

IV. Ist endlich außer dem Körper M nur ein einziger m übrig, und sucht man die Bewegung von m um M, so hat man

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} + (M+m)\frac{x}{r^3} \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} + (M+m)\frac{y}{r^3} \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} + (M+m)\frac{z}{r^3} \end{aligned}\right\}$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist.

§. 5.

Man kann in allen vorhergehenden Gleichungen statt den rechtwinklichten Coordinaten x y z auch andere einführen, wodurch ihre Integration oft sehr erleichtert wird. Dazu dient folgende Methode, welche zugleich den Vortheil hat, den neuen Gleichungen die möglichst einfache Form zu geben.

Die allgemeine Gleichung der Bewegung besteht nach dem Vorhergehenden aus zwey wesentlich von einander verschiedenen Theilen, von welchen der erste

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) m$$

und der andere $S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,m$ ist, und statt dem letzten kann man auch $S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots)\,m$ setzen, wenn P, Q, R, ... die nach den Richtungen p q r ... wirkenden Kräfte bezeichnen.

Es sey nun A irgend eine Function von x, y, z und dx, dy, dz. Wenn man die Werthe von x y und z durch andere veränderliche Größen $\alpha\ \beta\ \gamma$ ausdrückt, so wird auch A als eine Function von $\alpha\ \beta\ \gamma$ und $d\alpha\ d\beta\ d\gamma$ zu betrachten seyn, und das vollständige Differential von A in Beziehung auf die Characteristik δ wird seyn

$$\delta A = \frac{\delta A}{\delta x}\delta x + \frac{\delta A}{\delta y}\delta y + \frac{\delta A}{\delta z}\delta z + \frac{\delta A}{\delta dx}\delta dx + \frac{\delta A}{\delta dy}\delta dy + \frac{\delta A}{\delta dz}\delta dz$$
$$= \frac{\delta A}{\delta\alpha}\delta\alpha + \frac{\delta A}{\delta\beta}\delta\beta + \frac{\delta A}{\delta\gamma}\delta\gamma + \frac{\delta A}{\delta d\alpha}\delta d\alpha + \frac{\delta A}{\delta d\beta}\delta d\beta + \frac{\delta A}{\delta d\gamma}\delta d\gamma$$

Es ist aber, wenn man nach dem Ausdrucke $\int u\,dt = ut - \int t\,du$ integrirt

$\int \frac{\delta A}{\delta dx}\delta dx$ oder was dasselbe ist

$$\int \frac{\delta A}{\delta dx}\, d\,\delta x = \frac{\delta A}{\delta dx}\delta x - \int d.\frac{\delta A}{\delta dx}.\delta x$$

und eben so

$$\int \frac{\delta A}{\delta d\alpha} \delta d\alpha = \int \frac{\delta A}{\delta d\alpha} d\delta\alpha = \frac{\delta A}{\delta d\alpha} \delta\alpha - \int d. \frac{\delta A}{\delta d\alpha}. \delta\alpha \text{ u. s. w.}$$

Substituirt man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung, so gibt der erste Theil derselben

$$\int \frac{\delta A}{\delta x} \delta x + \int \frac{\delta A}{\delta y} \delta y + \int \frac{\delta A}{\delta z} \delta z$$

$$- \int d. \frac{\delta A}{\delta dx}. \delta x - \int d. \frac{\delta A}{\delta dy}. \delta y - \int d. \frac{\delta A}{\delta dz}. \delta z$$

$$+ \frac{\delta A}{\delta dx} \delta x + \frac{\delta A}{\delta dy} \delta y + \frac{\delta A}{\delta dz}. \delta z$$

und der zweyte

$$\int \frac{\delta A}{\delta \alpha} \delta\alpha + \frac{\delta A}{\delta \beta} \delta\beta + \int \frac{\delta A}{\delta \gamma} \delta\gamma$$

$$- \int d. \frac{\delta A}{\delta d\alpha}. \delta\alpha - \int d. \frac{\delta A}{\delta d\beta}. \delta\beta - \int d. \frac{\delta A}{\delta d\gamma}. \delta\gamma$$

$$+ \frac{\delta A}{\delta d\alpha} \delta\alpha + \frac{\delta A}{\delta d\beta}. \delta\beta + \frac{\delta A}{\delta d\gamma}. \delta\gamma.$$

Da aber beyde Theile einander gleich seyn müssen, und die Glieder unter dem Integralzeichen ganz heterogene Gröſsen von jenen sind, welche diese Integralzeichen nicht enthalten, so müssen die Glieder des ersten Theiles, welche dieses Zeichen haben, zusammengenommen der Summe der Glieder des zweyten Theiles, welche unter demselben Zeichen stehen, gleich seyn, oder man hat die Gleichung

$$\left(\frac{\delta A}{\delta x} - d. \frac{\delta A}{\delta dx}\right) \delta x + \left(\frac{\delta A}{\delta y} - d. \frac{\delta A}{\delta dy}\right) \delta y + \left(\frac{\delta A}{\delta z} - d. \frac{\delta A}{\delta dz}\right) \delta z$$

$$= \left(\frac{\delta A}{d\alpha} - d. \frac{\delta A}{\delta d\alpha}\right) \delta\alpha + \left(\frac{\delta A}{\delta \beta} - d. \frac{\delta A}{\delta d\beta}\right) \delta\beta + \left(\frac{\delta A}{\delta \gamma} - d. \frac{\delta A}{\delta d\gamma}\right) \delta\gamma$$

Es sey z. B. der besondere Fall $A = \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ gegeben. Da A kein x y z enthält, so ist

$$\frac{\delta A}{\delta x} = \frac{\delta A}{\delta y} = \frac{\delta A}{\delta z} = 0 \text{ und } \frac{\delta A}{\delta dx} = dx, \frac{\delta A}{\delta dy} = dy, \frac{\delta A}{\delta dz} = dz$$

also die letzte Gleichung

$$-d^2x\,\delta x - d^2y\,\delta y - d^2z\,\delta z = \left(\frac{\delta A}{\delta\alpha} - d.\frac{\delta A}{\delta d\alpha}\right)\delta\alpha$$
$$+\left(\frac{\delta A}{\delta\beta} - d.\frac{\delta A}{\delta d\beta}\right)\delta\beta$$
$$+\left(\frac{\delta A}{\delta\gamma} - d.\frac{\delta A}{\delta d\gamma}\right)\delta\gamma$$

Daraus folgt also, daſs man den Werth von dem gegebenen Ausdrucke

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)m$$

als eine Function von $\alpha\ \beta\ \gamma$ erhält, wenn man bloſs den Werth der Gröſse

$$S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)m$$

als Function von $\alpha\ \beta\ \gamma$ sucht. Denn nennt man T diese Function, so hat man sofort für den verlangten Werth von dem gegebenen Ausdrucke

$$\left(d.\frac{\delta T}{\delta d\alpha} - \frac{\delta T}{\delta\alpha}\right)\delta\alpha + \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\beta} - \frac{\delta T}{\delta\beta}\right)\delta\beta + \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\gamma} - \frac{\delta T}{\delta\gamma}\right)\delta\gamma$$

Was endlich den zweyten Theil $P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots$ betrifft, so läſst er sich immer leicht auf eine Function von $\alpha\ \beta\ \gamma$ bringen, weil man nur die Ausdrücke der Distanzen p, q, r.,. und der Kräfte P Q R.... auf diese Functionen bringen darf. Ist dieser zweyte Theil ein vollständiges Differential, und $d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$ also auch $\delta\Pi = P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots$ so hat man, wenn man den letzten Ausdruck durch m multiplicirt, und die Summe für alle Körper des Systems nimmt

$$S\,(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots)\,m = S\,\delta\Pi m = \delta.\,S\,\Pi m$$

weil das Zeichen S von dem Zeichen δ unabhängig ist. Man sucht daher bloſs den Werth der Gröſse $S\,\Pi m$ in Functionen von $\alpha\beta\gamma$; heiſst dann V dieser Werth von $S\,\Pi m$, so ist

$$\delta V = \frac{dV}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{dV}{d\beta}\delta\beta + \frac{dV}{d\gamma}\delta\gamma$$

und die allgemeine Gleichung der Bewegung geht in folgende über:

$$o = \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\alpha} - \frac{\delta T}{\delta\alpha} + \frac{\delta V}{\delta\alpha}\right)\delta\alpha + \left(d.\frac{\delta T}{\delta d\beta} - \frac{\delta T}{\delta\beta} + \frac{\delta V}{\delta\beta}\right)\delta\beta$$
$$+\left(d.\frac{\delta T}{\delta d\gamma} - \frac{\delta T}{\delta\gamma} + \frac{\delta V}{\delta\gamma}\right)\delta\gamma$$

$$\text{wo } T = S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\right) m$$

$$d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ und } V = S\,.\,\Pi m \text{ ist}$$

I. Um das Vorhergehende auf einige besondere Fälle anzuwenden, wollen wir die Gleichungen der Bewegung eines Körpers suchen, auf welchen eine veränderliche Kraft S in der Richtung $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ wirkt. Nach §. 2. II sind diese Gleichungen in Beziehung auf die rechtwinklichten Coordinaten x y z

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{Sx}{r} \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{Sy}{r} \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{Sz}{r} \end{aligned}\right\}$$

Es sey nun ϑ der Winkel der Distanz r des Körpers von dem Mittelpunkte der Kraft mit der Projection dieser Distanz in der Ebene der xy und ν der Winkel dieser Projection mit der Achse der x. Man suche die Gleichungen der Bewegung in Beziehung auf die Coordinaten r ϑ und ν

$$\begin{aligned} \text{Es ist } x &= r \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \nu \\ y &= r \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \nu \\ z &= r \operatorname{Sin} \vartheta \end{aligned}$$

also in §. 4.

$$T = \frac{r^2 (d\nu^2 \operatorname{Cos}^2 \vartheta + d\vartheta^2) + dr^2}{2\,dt^2} \text{ und } V = \int S dr$$

Man hat daher

$$\frac{\delta T}{\delta r} = \frac{r}{dt^2}(dr^2 \operatorname{Cos}^2 \vartheta + d\vartheta^2),\ \frac{\delta T}{\delta\, dr} = \frac{dr}{dt^2}$$

$$\frac{\delta V}{\delta r} = S,\ \frac{\delta V}{\delta \nu} = \frac{\delta T}{\delta \nu} \ldots = o$$

also die gesuchten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r}{dt^2}(d\nu^2 \operatorname{Cos}^2 \vartheta + d\vartheta^2) + S = o \\ &d.\left(\frac{r^2\, d\nu \operatorname{Cos}^2 \vartheta}{dt^2}\right) = o \\ &d.\left(\frac{r^2\, d\vartheta}{dt^2}\right) + r^2 \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \vartheta . \frac{d\nu^2}{dt^2} = o \end{aligned}\right\}$$

Würde der Körper nach zwey festen Punkten gezogen, nach den ersten von der Kraft S in der Richtung der r, und nach der zwey-

ten von der Kraft S' in der Richtung der r'. so würde T den vorigen Werth behalten, und $V = \int S\,dr + \int S'dr'$ seyn, und man würde, um die Gleichungen der Bewegung des Körpers zu erhalten, bloſs der ersten der drey vorhergehenden Gleichungen die Gröſse $\frac{S'dr'}{dr}$, der zweyten $\frac{S'dr'}{d\nu}$, der dritten $\frac{S'dr'}{d\vartheta}$ hinzufügen, woraus man zugleich sieht, wie man auch für mehr als zwey Kräfte verfahren soll.

II. Auf eine ähnliche Art lassen sich auch die allgemeinen Gleichungen des §. 4. II behandeln, die man durch folgende einzelne ausdrücken kann:

$$\frac{d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dQ}{dz}\right)\delta z$$

wo die Variationen δx, δy und δz von einander unabhängig sind.

Vergleicht man diese Gleichung mit dem oben gegebenen Ausdrucke, so ist, wie zuvor,

$$T = \frac{r^2(d\nu^2 \operatorname{Cos}^2 \vartheta + d\vartheta^2) + dr^2}{2\,dt^2},$$

also behält auch $\frac{\delta T}{\delta r}$ und $\frac{\delta T}{\delta dr}$ seine obigen Werthe. Die Gröſse $\delta\Pi$ aber ist gleich

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dQ}{dz}\right)\delta z$$

oder $\delta\Pi$ ist das vollständige Differential von Q in Beziehung auf x, y und z. Allein das vollständige Differential derselben Gröſse in Beziehung auf r ν und ϑ ist eben so

$$\left(\frac{dQ}{dr}\right)\delta r + \left(\frac{dQ}{dr}\right)\vartheta\nu + \left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right)\delta\vartheta$$

$$\text{also ist } \frac{\delta V}{\delta r} = \left(\frac{dQ}{dr}\right), \frac{\delta V}{\vartheta\nu} = \left(\frac{dQ}{d\nu}\right) \text{ und } \frac{\delta V}{\delta\vartheta} = \left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right)$$

Substituirt man daher diese Werthe von T und V und ihre Differentialien in der letzten Gleichung von I und nimmt die Grössen δr, $\delta\nu$ und $\delta\vartheta$ als von einander unabhängig an, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r}{dt^2}(dr^2 \operatorname{Cos}^2 \vartheta + d\vartheta^2) &= \left(\frac{dQ}{dr}\right) \\ d.\left(\frac{r^2\,d\nu \operatorname{Cos}^2\vartheta}{dt^2}\right) &= \left(\frac{dQ}{d\nu}\right) \\ d.\left(\frac{r^2\,d\vartheta}{dt^2}\right) + r^2 \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\vartheta.\frac{d\nu^2}{dt^2} &= \left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right) \end{aligned}\right\}$$

III. Um endlich den letzten Gleichungen noch eine andere für die Anwendung bequeme Gestalt zu geben, sey $u = \frac{1}{r \operatorname{Cos} \vartheta}$ und $s = \operatorname{Tang} \vartheta$, also u gleich der Einheit dividirt durch die Projection des Radius Vectors r auf die Ebene der xy und s gleich der Tangente der Breite von m über derselben coordinirten Ebene. Dieſs vorausgesetzt ist die zweyte der drey letzten Gleichungen, wenn man sie durch $\frac{dv}{u^2}$ multiplicirt

$$\frac{dv . d . \left(\frac{dv}{u^2 dt}\right)}{u^2 dt} = \left(\frac{dQ}{dr}\right) \frac{dv}{u^2}$$

und ihr Integral, wenn h eine Constante ist,

$$\left(\frac{dv}{u^2 dt}\right)^2 = h^2 + 2 \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \frac{dv}{u^2} \ldots . (i)$$

Multiplicirt man aber die erste jener drey Gleichungen durch $- \operatorname{Cos} \vartheta$, und die dritte durch $\frac{1}{r} \operatorname{Sin} \vartheta$; so gibt die Summe beyder Producte

$$\frac{\frac{dv^2}{u} + r d^2 \vartheta \operatorname{Sin} \vartheta - d^2 r \operatorname{Cos} \vartheta + 2 dr d\vartheta \operatorname{Sin} \vartheta + r d\vartheta^2 \operatorname{Cos} \vartheta}{dt^2}$$

$$= \left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right) \frac{\operatorname{Sin} \vartheta}{r} - \left(\frac{dQ}{dr}\right) \operatorname{Cos} \vartheta \ldots . (\alpha)$$

Es ist aber $d . \frac{1}{u} = dr \operatorname{Cos} \vartheta - r d\vartheta \operatorname{Sin} \vartheta$ und daher

$$d^2 . \frac{1}{u} = - r d^2 \vartheta \operatorname{Sin} \vartheta + d^2 r \operatorname{Cos} \vartheta - 2 dr d\vartheta \operatorname{Sin} \vartheta - r d\vartheta^2 \operatorname{Cos} \vartheta$$

also auch der erste Theil der Gleichung (a) gleich

$$\frac{dv^2}{u dt^2} + d . \left(\frac{du}{u^2 dt^2}\right)$$

Da ferner Q eine Function von r v ϑ und von v s u ist, so hat man für das vollständige Differential von Q

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dr}\right) dr + \left(\frac{dQ}{dv}\right) dv + \left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right) d\vartheta$$

$$= \left(\frac{dQ}{dv}\right) dv + \left(\frac{dQ}{ds}\right) ds + \left(\frac{dQ}{du}\right) du$$

also ist

$$\left(\frac{dQ}{dr}\right) dr + \left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right) d\vartheta = \left(\frac{dQ}{ds}\right) ds + \left(\frac{dQ}{du}\right) du$$

und überdieſs

$$ds = \frac{d\vartheta}{\mathrm{Cos}^2\vartheta} \text{ und } du = -\frac{dr}{r^2 \mathrm{Cos}\,\vartheta} + \frac{d\vartheta \,\mathrm{Sin}\,\vartheta}{r \mathrm{Cos}^2\vartheta}$$

wodurch die vorhergehende letzte Gleichung in folgende zwey übergeht:

$$\left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right) \frac{\mathrm{Sin}\,\vartheta}{r \mathrm{Cos}^2\vartheta} + \left(\frac{dQ}{ds}\right) \frac{1}{\mathrm{Cos}^2\vartheta}$$

$$\left(\frac{dQ}{dr}\right) = -\left(\frac{dQ}{du}\right) . \frac{1}{r^2 \mathrm{Cos}\,\vartheta}$$

so daſs also der letzte Theil der Gleichung (a) ist

$$\left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right) \frac{\mathrm{Sin}\,\vartheta}{r} - \left(\frac{dQ}{dr}\right) \mathrm{Cos}\,\vartheta = u^2 \left(\frac{dQ}{du}\right) + us \left(\frac{dQ}{ds}\right)$$

Diese Gleichung (a) ist daher

$$\frac{d\nu^2}{u\,dt^2} + d \cdot \left(\frac{du}{u^2\,dt^2}\right) = u^2 \left(\frac{dQ}{du}\right) + us \left(\frac{dQ}{ds}\right)$$

Sey der Kürze wegen

$$K = \sqrt{h^2 + 2 \int \left(\frac{dQ}{d\nu}\right) \frac{d\nu}{u^2}}$$

so gibt die Gleichung (1)

$$dt = \frac{d\nu}{Ku^2} \text{ also ist } \frac{d\nu^2}{u\,dt^2} = Ku\,d\nu \text{ und}$$

$$d . \left(\frac{du}{u^2\,dt}\right) = d . \left(\frac{K\,du}{d\nu}\right),$$

also auch die letzte Gleichung (a)

$$0 = \frac{d^2u}{d\nu^2} + u + \frac{1}{K^2} \left(\frac{dQ}{d\nu}\right) \left(\frac{du}{u^2\,d\nu}\right)$$

$$- \frac{1}{K^2} \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{K^2 u} \left(\frac{dQ}{ds}\right) \ldots (2)$$

Endlich ist noch die letzte der drey Gleichungen in II

$$\frac{r^2 d^2\vartheta + 2r\,dr\,d\vartheta + r^2 d\nu^2 \,\mathrm{Sin}\,\vartheta \,\mathrm{Cos}\,\vartheta}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right)$$

Aber $\frac{r^2 d^2\vartheta + 2r\,dr\,d\vartheta}{dt^2} = K^2 u^2 \frac{d^2 s}{d\nu^2} + \left(\frac{dQ}{d\nu}\right) \cdot \frac{ds}{d\nu}$

$$\frac{r^2 d\nu^2 \, Sin\vartheta Cos\vartheta}{dt^2} = K^2 u^2 . s$$

und überdieſs

$$\left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right) = \left(\frac{dQ}{ds}\right)\left(\frac{ds}{d\vartheta}\right) + \left(\frac{dQ}{du}\right)\left(\frac{du}{d\vartheta}\right) \text{ das heiſst}$$

$$\left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right) = \left(\frac{dQ}{ds}\right)(1 + s^2) + \left(\frac{dQ}{du}\right) us$$

Substituirt man jene Werthe in der letzten jener drey Gleichungen, so ist

$$o = K^2 u^2 \left(\frac{d^2 s}{d\nu^2} + s\right) + \left(\frac{dQ}{d\nu}\right)\frac{ds}{d\nu}$$
$$- \left(\frac{dQ}{ds}\right)(1 + s^2) - \left(\frac{dQ}{du}\right) us \ldots\ldots (3)$$

Sammelt man die Gleichungen 1, 2, 3, so hat man für die gesuchten Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l}
(A) \ldots dt = \frac{d\nu}{u^2 K} \text{ wo } K^2 = h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{d\nu}\right) \cdot \frac{d\nu}{u^2} \text{ ist} \\
(B) \ldots o = \left(\frac{d^2 u}{d\nu^2} + u\right) K^2 + \left(\frac{dQ}{d\nu}\right) \frac{du}{u^2 d\nu} \\
\qquad - \left(\frac{dQ}{du}\right) - \left(\frac{dQ}{ds}\right) \frac{s}{u} \\
(C) \ldots o = \left(\frac{d^2 s}{d\nu^2} + s\right) u^2 K^2 + \left(\frac{dQ}{d\nu}\right) \frac{ds}{d\nu} \\
\qquad - \left(\frac{dQ}{du}\right) us - \left(\frac{dQ}{ds}\right)(1 + s^2)
\end{array}\right\}$$

und diese drey Gleichungen bestimmen ebenfalls die Bewegung des Körpers m um M. In ihnen ist das Differential $d\nu$ constant und $x = \frac{1}{u} Cos\, \nu$, $y = \frac{1}{u} Sin\, \nu$, $z = \frac{s}{u}$ so wie $x' = \frac{1}{u'} Cos\, \nu'$, $y' = \frac{1}{u'} Sin\, \nu'$, $z' = \frac{s'}{u'}$. Hat man bloſs zwey Körper m und m' nebst dem Central-Körper M, und nimmt man die Summe M + m für die Einheit der Maſsen, so ist

$$Q = \frac{1}{r} - \frac{m'}{r'^3}(xx' + yy' + zz')$$
$$+ \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}}$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes ist

$$\frac{m'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2xx' - 2yy' - 2zz'}}$$

also auch, wenn man die Distanz r′ sehr grofs gegen r annimmt, und dieses letzte Glied nach den negativen Potenzen von r′ entwickelt,

$$\frac{m'}{r'} + \frac{m'(xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}r^2)}{r'^3} + \frac{\frac{3}{2}m'(xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}r^2)^2}{r'^5}$$

oder wenn man für x x′ . . . die angezeigten Werthe substituirt;

$$\text{und } r = \frac{\sqrt{1+s^2}}{u},\; r' = \frac{\sqrt{1+s'^2}}{u'} \text{ setzt;}$$

$$Q = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{m'u'}{\sqrt{1+s'^2}} \times$$

$$\left\{1 + \frac{\frac{3}{2}[uu'\operatorname{Cos}(v - v') + uu'.ss' - \frac{1}{2}u'^2(1+s^2)]^2}{(1+s'^2)^2 . u^4} - \frac{(1+s^2)u'^2}{2(1+s'^2)u^2}\right\}$$

Ist s so klein, dafs man es ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann, so hat man den einfachen Ausdruck

$$Q = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + m'u + \frac{m'u'^3}{4u^2}[1 + 3\operatorname{Cos}(2v - 2v') - 2s^2]$$

auf welche Gleichungen wir bey der Theorie des Mondes wieder zurückkommen werden.

DRITTES KAPITEL.

Allgemeine Gesetze der Bewegung.

§. 1.

Sind ξ, υ, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes eines Körpers, dessen ganze Masse durch m bezeichnet wird, so hat man nach Cap. I

$$m\xi = Sx\,dm,$$
$$m\upsilon = Sy\,dm,$$
$$m\zeta = Sz\,dm,$$

wo das Integralzeichen S sich auf die Masse des ganzen Körpers bezieht. Differentiirt man diese Gleichungen zweymahl, so ist

$$\frac{m\,d^2\xi}{dt^2} = Sdm.\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{m\,d^2\upsilon}{dt^2} = Sdm.\frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{m\,d^2\zeta}{dt^2} = Sdm.\frac{d^2z}{dt^2}$$

und wenn man diese Ausdrücke in den drey vorletzten Gleichungen des Cap. II §. 2. substituirt,

$$\frac{m\,d^2\xi}{dt^2} = S\,Xdm,\ \frac{m\,d^2\upsilon}{dt^2} = S\,Ydm,\ \frac{m\,d^2\zeta}{dt^2} = S\,Zdm$$

woraus folgt, daſs wenn der Körper durch keinen festen Punkt zurückgehalten wird, d. h. wenn die drey letzten Gleichungen des Cap. II §. 2. von selbst wegfallen, daſs dann der Schwerpunkt des Körpers sich so im Raume bewegt, als ob die ganze Masse des Körpers in seinem Schwerpunkte vereinigt wäre, und als ob alle auf den Körper wirkenden Kräfte unmittelbar an diesem Schwerpunkte angebracht wären. Dasselbe gilt auch von einem Systeme von Körpern, deren Massen m, m', m''... sind. Ist dann $M = m + m' + m'' + \ldots$ die Summe aller dieser Massen, und sind wieder ξ, υ, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes des ganzen Systems, so ist

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma\,Xm,\ M\frac{d^2\upsilon}{dt^2} = \Sigma\,Ym,\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma\,Zm,$$

$$\text{wo } \Sigma X m = Xm + X'm' + X''m'' + \ldots$$

Ist daher die gegenseitige Anziehung der Elemente des Körpers, oder ist die gegenseitige Anziehung der einzelnen Massen des Systemes die einzige Kraft, welche auf den Körper oder auf das System der Körper wirkt, so ist die Bewegung des Schwerpunktes gleichförmig und geradlinicht. Denn da in diesem Falle die Gröſsen X, Y, Z verschwinden, so sind jene drey vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{m\,d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{m\,d^2\upsilon}{dt^2} = 0, \quad \frac{m\,d^2\zeta}{dt^2} = 0$$

und deren Integrale

$$m\xi = at + b, \quad m\upsilon = a't + b', \quad m\zeta = a''t + b''$$

wo a, b, a',... die Constanten der Integration sind.

Diese allgemeine Eigenschaft der Bewegung wird der Grundsatz der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts genannt.

§. 2.

Multiplicirt man von denselben drey vorletzten Gleichungen des Cap. II §. 2. die erste durch y, und die zweyte durch — x, so gibt ihre Summe

$$S\,dm\left(\frac{y\,d^2x - x\,d^2y}{dt^2} + Yx - Xy\right) = 0$$

und eben so

$$S\,dm\left(\frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{dt^2} + Zx - Xz\right) = 0$$

$$S\,dm\left(\frac{z\,d^2y - y\,d^2z}{dt^2} + Zy - Yz\right) = 0$$

vergl. Cap. II §. 2. die drey letzten Gleichungen. Integrirt man diese Ausdrücke in Beziehung auf dt, so erhält man

$$S\,dm\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dt}\right) + S.\int dm\,(Yx - Xy)\,dt = C$$

$$S\,dm\left(\frac{z\,dx - x\,dz}{dt}\right) + S.\int dm\,(Zx - Xz)\,dt = C'$$

$$S\,dm\left(\frac{z\,dy - y\,dz}{dt}\right) + S.\int dm\,(Zy - Yz)\,dt = C''$$

wo C, C', C'' die drey Constanten der Integration sind.

Wirken keine äuſseren Kräfte auf den Körper, oder auf das System der unter einander auf irgend eine Art verbundenen Körper, so ist $X = Y = Z = 0$. Wirken aber auch äuſsere Kräfte auf dasselbe, doch nur solche, die sämmtlich nach dem Anfangspunkte der Coordinaten gerichtet sind, so ist

$$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y},\ \frac{X}{Z} = \frac{x}{z} \text{ und } \frac{Y}{Z} = \frac{y}{z}.$$

In diesen beyden Fällen sind also die zweyten Theile der drey vorletzten Gleichungen gleich Null, und man hat daher

$$S\,dm\,(y\,dx - x\,dy) = C\,dt$$
$$S\,dm\,(z\,dx - x\,dz) = C'.dt$$
$$S\,dm\,(z\,dy - y\,dz) = C''.dt$$

Es sind aber $y\,dx - x\,dy$, $z\,dx - x\,dz$, $z\,dy - y\,dz$ die auf die Ebenen der xy, xz, yz projicirten doppelten Winkelflächen, welche die von dem Anfangspunkte der Coordinaten nach den verschiedenen Elementen des Körpers oder nach den verschiedenen Körpern des Systemes gezogenen Radien in der Zeit dt beschreiben. Die Summe dieser Winkelflächen, jede mit der Masse ihres Körpers multiplicirt, ist also in jenen beyden Fällen der Zeit dt proportionirt, in welcher diese Winkelflächen beschrieben werden; diese Winkelflächen sind selbst in einer endlichen Zeit t dieser Zeit proportionirt, und diese allgemeine Eigenschaft der Bewegung heifst der Grundsatz der Erhaltung der Flächen.

§. 3.

Nach Cap. II §. 2. Nro. I ist die allgemeine Gleichung der Bewegung eines Körpers

$$o = S\,dm \left(\frac{d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z}{dt^2} + P\,\delta p + Q\,\delta q + \right)$$

wo P, Q... die äufsern auf den Körper wirkenden Kräfte, und dm das Element der Mafse des Körpers bezeichnet. Verwandelt man in diesem Ausdrucke das Zeichen S dm in Sm, so dafs $Sm = m + m' + m'' + ..$ so erhält man nach Cap. II §. 2. Nro. II die allgemeine Gleichung der Bewegung eines Systems von Körpern, deren Massen m, m', m''... sind.

Man kann in dieser Gleichung die Zeichen d und δ immer als gleichbedeutend annehmen, so lange die äufsern Bedingungsgleichungen $\lambda\,dL$, $\lambda'\,dL'$, ... der Bewegung nicht die Zeit t selbst enthalten. Nimmt man ferner an, dafs $P\,dp + Q\,dq + .. = d\Pi$, ein vollständiges Differential ist, was immer seyn wird, wenn die Kräfte P, Q.. blofse Functionen ihrer Entfernungen sind, wie diefs in der Natur der Fall ist, so hat man

$$o = Sm \left(\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} + d\,\Pi \right)$$

und dessen Integral

$$A = Sm \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + \Pi \right)$$

wo A eine constante Gröſse, und

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$

bekanntlich die Geschwindigkeit des Körpers bezeichnet. (Cap. II §. 1. Gleichung (I)).

Man nennt aber in der Mechanik das Product der Masse eines Körpers in das Quadrat seiner Geschwindigkeit die lebendige Kraft des Körpers. Die lebendige Kraft eines Körpers oder eines Systemes von Körpern hängt also bloſs von den äuſseren Kräften, und keineswegs von der Verbindung der Körper unter einander oder von den krummen Linien ab, welche diese Körper beschreiben, und wenn keine äuſsern Kräfte auf das System wirken, so ist die lebendige Kraft desselben eine constante Gröſse. Diese Eigenschaft der Bewegung heiſst der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Wenn man von den allgemeinen Gleichungen (IV) des Cap. II die erste durch dx, die zweyte durch dy, und die dritte durch dz multiplicirt, so ist die Summe dieser Producte, da

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o \text{ ist,}$$

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

Ist aber $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d.U$ ein vollständiges Differential, so erhält man, wenn man die vorhergehende Gleichung integrirt,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = A + 2U,$$

wo A eine beständige Gröſse ist, oder wenn v die Geschwindigkeit des Körpers bezeichnet $v^2 = A + 2U$. Wirken daher keine äuſsern Kräfte auf den Körper, so ist $U = o$ und das Quadrat der Geschwindigkeit desselben ist eine constante Gröſse, wie zuvor.

I. Wenn keine äuſsern Kräfte auf den Körper wirken, der sich auf der Fläche $dL = o$ bewegen soll, so ist nach Cap. II §. 2. I

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} - \lambda\left(\frac{dL}{dx}\right),\; o = \frac{d^2y}{dt^2} - \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right),\; o = \frac{d^2z}{dt^2} - \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right)$$

und der Druck des Körpers auf die Fläche ist (ebendaselbst) gleich

$$\lambda.\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$$

Da hier keine äuſsern Kräfte wirken, so ist, nach dem so eben erklärten Grundsatze der Erhaltung der lebendigen Kraft, die Geschwindigkeit v des Körpers constant, und da man überhaupt

hat, (Cap. II §. 1.) $ds = v\,dt$, wo ds das Element des von dem Körper beschriebenen Bogens, und dt das immer als constant vorausgesetzte Element der Zeit bezeichnet, so ist, auch das Element ds des beschriebenen Bogens selbst constant. Substituirt man aber in den vorhergehenden Gleichungen für dt seinen Werth $\frac{ds}{v}$, so erhält man

$$\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right) = \frac{v^2 d^2x}{ds^2},\ \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right) = \frac{v^2 d^2y}{ds^2},\ \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right) = \frac{v^2 d^2z}{ds^2}$$

und daher ist auch der Druck des Körpers auf die gegebene Fläche, auf welcher er während seiner Bewegung zu bleiben gezwungen ist, gleich

$$\frac{v^2}{ds^2}\cdot\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}$$

Allein, wenn ds constant ist, so ist bekanntlich der Krümmungshalbmesser ϱ einer jeden Curve von doppelter Krümmung

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}$$

woraus daher folgt, daſs der Druck des Körpers auf die gegebene Fläche gleich

$$\frac{v^2}{\varrho}$$

oder gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der Curve ist, welche der Körper auf der Fläche beschreibt, wenn keine äuſsern Kräfte auf ihn wirken. Wirken aber auch äuſsere Kräfte auf den Körper, so wird man zu jenem Drucke $\frac{v^2}{\varrho}$ noch den Theil des Druckes addiren, welcher aus der Wirkung jener Kräfte entsteht.

§. 4.

Bezeichnet, wie zuvor, v die Geschwindigkeit des Körpers, oder ist

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

so hat man nach §. 3.

$$Sm\left(\frac{v^2}{2} + \Pi\right) = A,\ \text{also auch}$$

$$Sm\,(v\,\delta v + \delta\Pi) = 0$$

Dadurch geht die erste Gleichung des §. 3. in folgende über:

$$\mathrm{Sm}\left(\frac{d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z}{dt^2} - v\delta v\right) = 0$$

Es ist aber

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z =$$
$$d.(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) - dx\,d\delta x - dy\,d\delta y - dz\,d\delta z$$

Der letzte Theil dieses Ausdruckes ist

$$\begin{aligned} dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z &= dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz \\ &= \tfrac{1}{2}\delta(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\delta(v^2\,dt^2) = \tfrac{1}{2}\delta(ds)^2 \\ &= ds\,.\,\delta ds \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\frac{d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z}{dt^2} = \frac{d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt^2} - \frac{v^2\delta\,.\,ds}{ds}$$

und daher die vorhergehende Gleichung

$$\mathrm{Sm}\left(d.\left(\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt^2}\right) - \frac{v^2.\,\delta\,ds}{ds} - v\,\delta v\right) = 0$$

oder wenn man alle Glieder durch die constante Gröſse $dt = \frac{ds}{v}$ multiplicirt, und bemerkt, daſs

$$\delta(v\,ds) = v\,\delta ds + ds\,\delta v \text{ ist,}$$

$$\mathrm{Sm}\left(\frac{d.(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt} - \delta(v\,ds)\right) = 0$$

oder endlich, da das Zeichen S sich nur auf m, aber nicht auf d und δ bezieht,

$$\frac{d\,.\,\mathrm{Sm}\,(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt} - \delta.\,\mathrm{Sm}.\,v\,ds = 0$$

Integrirt man diese Gleichung in Beziehung auf d, und zeigt man diese Integration durch $\int$ an, so ist

$$\frac{\mathrm{S\,dm}\,(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt} - \int\delta.\mathrm{Sm}.v\,ds = C$$

Da aber das Zeichen $\int$ in dem letzten Gliede dieser Gleichung nur auf die Gröſse v und s, und keineswegs auf die Zeichen S und δ sich beziehen kann, so ist

$$\int\delta.\,\mathrm{Sm}\,.\,v\,ds = \delta.\,\mathrm{Sm}\,.\int v\,ds$$

Setzt man also voraus, daſs für den Anfangspunkt des Integrals $\int v\,ds$ sey $\delta x = 0 = \delta y = \delta z$, so wird auch die Constante C gleich Null seyn, oder man wird haben

$$\delta . Sm . \int v\, ds = \frac{S\, dm\, (dx\, \delta x + dy\, \delta y + dz\, \delta z)}{dt}$$

Setzt man endlich noch voraus, dafs auch für den Endpunkt des Integrals $\int v\, ds$ die Gröfsen δx, δy, δz, verschwinden, so ist

$$\delta . Sm . \int v\, ds = o$$

das heifst: die Variation der Gröfse $Sm . \int v\, ds$ ist für diesen Fall gleich Null, also diese Gröfse selbst ein Gröfstes oder ein Kleinstes.

Wenn daher die Körper eines Systems von inneren Kräften, oder auch von solchen äufseren Kräften, die blofse Functionen ihrer Entfernungen sind, getrieben werden, so verhalten sich die Curven, welche von diesen Körpern beschrieben werden, und die Geschwindigkeiten, mit welchen sie beschrieben werden, immer so, dafs die Summe der Producte jeder Masse, multiplicirt in das Integral $\int v\, ds$ ein Maximum oder ein Minimum ist, vorausgesetzt, dafs man den Anfangs- und Endpunkt der Curve als gegeben, also die Variationen der Coordinaten für diese beyden äufsersten Punkte als Null betrachtet. Diese allgemeine Eigenschaft der Bewegung heifst der **Grundsatz der kleinsten Wirkung.**

I. Dieser Grundsatz ist sehr allgemein, und er enthält die gesammte Theorie der Bewegung, wie man leicht auf folgende Art zeigen kann.

Da, wie bereits erinnert wurde, das Zeichen δ von $\int$ und S unabhängig ist, so ist

$$\delta . Sm \int v\, ds = Sm \int \delta (v\, ds) = Sm \int (ds\, \delta v + v\, \delta ds) = o$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist

$$Sm \int ds\, \delta v = Sm \int v\, dv . dt = \int dt . Sm . v\, dv$$

Aber nach §. 3. ist $S v^2 m = 2 A - 2 S \Pi m$, wo

$$d\Pi = P\, dp + Q\, dq +$$

also ist $Sm . v \delta v = - S \delta \Pi m = - S(P\, dp + Q\, dq +) . m$

Der zweyte Theil jenes Ausdruckes ist $Sm \int v \delta ds$, oder

$$Sm \int v \left(\frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z}{ds} \right) =$$

$$= Sm \int \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z}{dt}$$

$$\text{Aber} \int \frac{dx\, d\delta x}{dt} = \frac{dx}{dt} . \delta x - \int dx\, d . \frac{dx}{dt}, \text{ u. s. f.}$$

also der zweyte Theil

$$- Sm \int \left(\frac{d^2 x}{dt}\, \delta x + \frac{d^2 y}{dt}\, \delta y + \frac{d^2 z}{dt}\, \delta z \right)$$

und daher die ganze erste Gleichung, wenn man die Zeichen S und $\int$ versetzt,

$$\int dt . S \left\{\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z + P\delta p + Q\delta q + \right\} m = o$$

welches die oben gegebene allgemeine Gleichung der Bewegung ist.

§. 5.

Sind also X, Y, Z die Kräfte, welche parallel mit den Achsen der x, y, z auf einen Punkt wirken, der gezwungen ist, auf einer gegebenen Fläche zu bleiben, und nimmt man an, daſs die Gröſsen, δx, δy, δz schon dieser Fläche angehören, so hat man nach dem Vorhergehenden für die Bewegung des Punktes auf der Fläche:

$$o = \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z$$

Wirken aber keine Kräfte auf den Körper, sondern bewegt er sich bloſs durch einen ersten augenblicklichen Stoſs, so geht die vorige Gleichung in folgende über

$$o = d^2x . \delta x + d^2y . \delta y + d^2z . \delta z.$$

Nach dem Grundsatze der kleinsten Wirkung (§. 4.) aber ist, wenn keine Kräfte auf den Körper wirken, oder wenn v constant ist, die von dem Körper auf der gegebenen Fläche beschriebene Curve die kürzeste, die man auf dieser Fläche zwischen den beyden Endpunkten des Weges des Körpers ziehen kann. Also ist auch die letzte Gleichung, verbunden mit der Gleichung der gegebenen Fläche, die gesuchte Gleichung der kürzesten Curve, die auf der Fläche zwischen jenen Endpunkten gezogen werden kann.

Es sey daher $u = o$ die Gleichung der gegebenen Fläche, wo u eine Function von x y z ist, so ist auch

$$\delta u = \left(\frac{du}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dz}\right)\delta z = o$$

Eliminirt man aus den beyden letzten Gleichungen die Gröſse δx, so erhält man

$$\left[\left(\frac{du}{dx}\right)d^2y - \left(\frac{du}{dy}\right)d^2x\right]\delta y + \left[\left(\frac{du}{dx}\right)d^2z - \left(\frac{du}{dz}\right)d^2x\right]\delta z = o$$

und da δy und δz von einander unabhängig sind, so hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right)d^2y - \left(\frac{du}{dy}\right)d^2x = o$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)d^2z - \left(\frac{du}{dz}\right)d^2x = o$$

also auch

$$\left(\frac{du}{dy}\right) d^2z - \left(\frac{du}{dz}\right) d^2y = o$$

welches die gesuchten Gleichungen der kürzesten Linie auf der gegebenen Fläche sind.

I. Man kann diese Gleichungen noch durch eine andere Betrachtung finden, die ebenfalls der Mechanik angehört.

Ist wie zuvor, u = o die Gleichung der Fläche, so ist die Gleichung der diese Fläche tangirenden Ebene

$$x\left(\frac{du}{dx}\right) + y\left(\frac{du}{dy}\right) + z\left(\frac{du}{dz}\right) + \alpha = o \ldots\ldots (1)$$

Die kürzeste Linie, welche auf dieser Fläche zwischen zwey gegebenen Punkten gezogen werden kann, wird die seyn, welche ein auf dieser Fläche zwischen jenen Endpunkten frey gespannter Faden beschreibt, d. h. ein so gespannter Faden, dessen Elemente alle im Gleichgewichte, in Ruhe auf der Fläche liegen. Dieses Gleichgewicht wird aber nur dann Statt haben, wenn der Druck, der aus der Spannung des Fadens auf die Fläche entsteht, in allen Punkten des Fadens senkrecht auf die Fläche, oder in der Richtung des Krümmungshalbmessers der Fläche liegt. Die gesuchte kürzeste Linie wird also die Eigenschaft haben, daſs ihre Krümmungshalbmesser alle senkrecht auf die Fläche sind. Sey

$$x + Ay + Bz = o \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

die Gleichung der Ebene des Krümmungskreises der gesuchten Curve, so hat man auch

$$dx + A\,dy + B\,dz = o$$
$$A\,d^2y + B\,d^2z = o$$

woraus man für A und B die Werthe erhält

$$A = \frac{dx\,d^2z}{dz\,d^2y - dy\,d^2z}, \quad B = -\frac{dx\,d^2y}{dz\,d^2y - dy\,d^2z}$$

Da aber nach dem Vorhergehenden die berührende Ebene und die Ebene des Krümmungskreises auf einander senkrecht stehen müssen, so werden sich die Ebenen (1) und (2) unter rechten Winkeln schneiden, welche Bedingung durch folgende Gleichung ausgedrückt wird

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + A\left(\frac{du}{dy}\right) + B\left(\frac{du}{dz}\right) = o$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Differential der Gleichung (1) oder mit

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz = o$$

so erhält man

$$\left(A - \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(B - \frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{du}{dz}\right) = 0$$

oder wenn man die vorhergehenden Werthe von A und B substituirt und die Gleichung durch

$$ds^3 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}$$

dividirt

$$\frac{dx^2\, d^2z + dy^2\, d^2z - dy\, dz\, d^2y}{ds^3}\left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$-\frac{dx^2\, d^2y + dz^2\, d^2y - dy\, dz\, d^2z}{ds^3}\left(\frac{du}{dz}\right) = 0$$

Da aber

$$d^2s = \frac{dy\, d^2y + dz\, d^2z}{ds}$$ für $dx = \text{Const.}$ ist, so hat man

$$d.\frac{dz}{ds} = \frac{(ds\, d^2z - dz\, d^2s)\, ds}{ds^3} = \frac{dx^2\, d^2z + dy^2\, d^2z - dy\, dz\, d^2y}{ds^3}$$

und eben so

$$d.\frac{dy}{ds} = \frac{dx^2\, d^2y + dz^2\, d^2y - dy\, dz\, d^2z}{ds^3}$$

und daher die vorhergehende Gleichung

$$\left(\frac{du}{dy}\right) d.\frac{dz}{ds} - \left(\frac{du}{dz}\right) d.\frac{dy}{ds} = 0$$

Für die gesuchte kürzeste Curve auf der gegebenen Fläche, wie zuvor.

VIERTES KAPITEL.

Bewegung eines Körpers von gegebener Gestalt.

§. 1.

Wir haben bereits im zweyten Capitel §. 2. III die Gleichungen für die fortschreitende sowohl, als für die drehende Bewegung eines Körpers von irgend einer Gestalt gegeben. Die Wichtigkeit dieses Gegenstandes fordert aber noch eine nähere Betrachtung dieser Gleichungen, besonders der letzten. Setzt man der Kürze wegen

$$N = S\int (Yx - Xy)\, dt . dm$$
$$N' = S\int (Zx - Xz)\, dt . dm$$
$$N'' = S\int (Zy - Yz)\, dt . dm$$

so gehen die drey letzten jener Gleichungen, wenn man sie in Beziehung auf dt integrirt, in folgende über

$$\left.\begin{array}{l} S\,(x\,dy - y\,dx)\,\dfrac{dm}{dt} = N \\[2ex] S\,(x\,dz - z\,dx)\,\dfrac{dm}{dt} = N' \\[2ex] S\,(y\,dz - z\,dy)\,\dfrac{dm}{dt} = N'' \end{array}\right\}(I)$$

und diese Gleichungen enthalten die Theorie der Rotation der Körper.

Wir wollen zuerst annehmen, dafs ein Körper, dessen Oberfläche durch eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x, y, z, gegeben ist, blofs durch die Wirkung eines augenblicklichen Stofses sich um die Achse der z drehe, ohne dafs sonst äufsere Kräfte auf ihn wirken. Heifst dann ϑ die Rotationsgeschwindigkeit irgend eines seiner Elemente dm, dessen Entfernung von der Achse der z gleich r ist, so ist die wahre Geschwindigkeit dieses Elements $v = r . \vartheta$

Wenn aber ein Punkt gezwungen ist, während seiner Bewegung auf einer gegebenen Fläche zu bleiben, so übt er gegen diese Fläche einen Druck oder eine Kraft aus, welche nach Cap. III. §. 3. I gleich ist dem Quadrate seiner Geschwindigkeit dividirt durch den Krümmungshalbmesser der von dem Punkte beschriebenen Curve, wenn, wie hier vorausgesetzt wird, keine äufseren Kräfte auf den Körper wirken. Da aber diese Curve hier, wo wir die Rotation um eine Achse betrachten, ein Kreis des Halbmessers r ist, so ist die Kraft, welche das Element dm senkrecht auf die Peripherie des von ihm beschriebenen Kreises d. h. senkrecht auf die Rotationsachse der z ausübt, gleich $\frac{v^2 \, dm}{r}$, oder wenn man die Winkelgeschwindigkeit $\varkappa = \frac{v}{r}$ der Kürze wegen gleich der Einheit annimmt, gleich $v\,dm$. Diese Kraft nach der Richtung der r gibt, wenn man sie nach den Richtungen der Achsen der x, und y zerlegt, und wenn man α den Winkel nennt, welchen r mit der Achse der x bildet, die Kraft

$$dX = r\,dm \cos\alpha \text{ nach } x, \text{ und}$$
$$dY = r\,dm . \sin\alpha \text{ nach } y$$

oder da $x = r \cos\alpha$, und $y = r \sin\alpha$ ist, so hat man $dX = x\,dm$, und $dY = y\,dm$. Diese Kräfte dX, und dY entspringen also blofs aus der Rotation des Körpers um die Achse der z, und die erste derselben strebt die Achse der z um ihren Anfangspunkt nach der Richtnng der x mit einem Momente zu drehen, welches dem Produkte dieser Kraft in ihre Entfernung von dem Anfangspunkte gleich ist (Cap. I §. 8.), das heifst, mit dem Momente $z\,dX$. Eben so ist das Moment der zweyten Kraft, um die Achse der z nach der Richtung der y zu drehen, gleich $z\,dY$.

Also auch dann, wenn keine äufseren Kräfte auf den Körper wirken, wird die Achse der z doch durch die blofsen, aus der Rotation entstehenden Schwungkräfte von jedem Elemente dm des Körpers den Druck $z\,dX = xz\,dm$ nach der Richtung der x, und den Druck $z\,dY = yz\,dm$ nach der Richtung der y leiden, und daher wird der aus der Rotation entstehende Druck des ganzen Körpers auf die Achse der z seyn

$$\int xz\,dm \text{ nach } x, \text{ und } \int yz\,dm \text{ nach } y$$

Wenn daher diese Achse der z durch die Rotation keinen Druck leiden soll, oder wenn der Körper um diese Achse sich frey drehen soll, ohne diese Achse, auch wenn sie nicht unterstützt ist, selbst zu bewegen, so müssen diese beyden Kräfte $\int xz\,dm$ und $\int yz\,dm$, jede für sich, gleich Null seyn. Eben so wird auch die Achse der y keinen Druck leiden, wenn $\int xy\,dm = 0$ und $\int yz\,dm = 0$ ist, und die Achse der x, wenn $\int xy\,dm = 0$ und $\int xz\,dm = 0$ ist.

Man nennt eine solche Achse, welche durch die Rotation des Körpers um sie keinen Druck leidet, eine freye Achse. Ein Körper wird sich also um jede seiner drey Coordinatenachsen x, y, z frey drehen können, oder jede dieser drey Achsen wird eine freye Achse seyn, wenn man hat

$$\int xy\,dm = 0,\ \int xz\,dm = 0,\ \int yz\,dm = 0$$

I. Ein Körper, der um eine solche freye Achse rotirt, ohne daſs äuſsere Kräfte auf ihn wirken, setzt seine Rotation um diese freye Achse mit der einmahl erhaltenen Winkelgeschwindigkeit unverändert fort, und die Achse bleibt unbeweglich, gleichsam als wenn sie befestigt wäre, ohne daſs eine Kraft, sie zu halten, erfordert wird. So sind z. B. die drey conjugirten Durchmesser a, b, c eines homogenen Ellipsoids zugleich die drey freyen Achsen desselben. Denn nimmt man diese Durchmesser für die Achsen der x, y, z, so fällt der Anfangspunkt dieser Coordinaten in den Mittelpunkt des Körpers, welcher zugleich der Schwerpunkt desselben ist, und man hat für die Gleichung seiner Oberfläche

$$a^2 b^2 z^2 + a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 = a^2 b^2 c^2$$

Jede der drey coordinirten Ebenen der xy, xz, und yz theilt diesen Körper in zwey gleiche und ähnliche Hälften. Betrachtet man also z. B. irgend ein Element dm des Körpers über der Ebene der xy, zu welchem die drey Coordinaten x, y, z gehören, so wird es immer ein anderes, jenem an Masse gleiches Element unter der Ebene xy geben, dessen Coordinaten x, y, und — z sind, so daſs die Differenzialien xz dm, und yz dm, welche zu diesen beyden Elementen gehören, für die erste xz dm und — xz dm, und für die zweyte yz dm, und — yz dm seyn werden, wo daher jedes der beyden Integralien $\int xz\,dm$ und $\int yz\,dm$ die Summe einer unendlichen Anzahl von Differentialien ist, die sich gegenseitig paarweise aufheben, so daſs also diese beyden Integralien $\int xz\,dm$ und $\int yz\,dm$, und eben so auch $\int xy\,dm$ für diesen Körper immer gleich Null seyn werden, wenn nur die Achsen der x, y, z den Durchmessern a, b, c parallel sind, und beyde sich in dem Mittelpunkte oder dem Schwerpunkte des Körpers schneiden.

§. 2.

Es sey die Gleichung der Oberfläche eines Körpers durch drey willkührliche senkrechte Coordinaten x, y, z gegeben, die sich in dem Schwerpunkte des Körpers durchschneiden. Man suche die Lage der freyen Rotationsachse des Körpers gegen jene drey gegebenen Coordinatenachsen der x, y, z.

Zu diesem Zwecke wollen wir zuerst die drey senkrechten Coordinaten x, y, z auf drey andere ebenfalls unter sich senkrechte Coordinaten x', y', z' bringen, die denselben Anfangspunkt haben, und so liegen, daſs die neue Ebene x'y' gegen

die vorige Ebene der xy unter dem Winkel ϑ geneigt sey, und daſs die Durchschnittslinie dieser beyden Ebenen mit der Achse der x den Winkel ψ, und mit der Achse der x′ den Winkel φ bilde. Dieses vorausgesetzt, hat man bekanntlich die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x = {} & x' (\mathrm{Cos}\,\vartheta\ \mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\varphi) \\
& + y' (\mathrm{Cos}\,\vartheta\ \mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\psi\ \mathrm{Sin}\,\varphi) \\
& + z'\ \mathrm{Sin}\,\vartheta\ \mathrm{Sin}\,\psi \\
y = {} & x' (\mathrm{Cos}\,\vartheta\ \mathrm{Cos}\,\psi\ \mathrm{Sin}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\varphi) \\
& + y' (\mathrm{Cos}\,\vartheta\ \mathrm{Cos}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Sin}\,\varphi) \\
& + z'\ \mathrm{Sin}\,\vartheta\ \mathrm{Cos}\,\psi \\
z = {} & - x'\ \mathrm{Sin}\,\vartheta\ \mathrm{Sin}\,\varphi \\
& - y'\ \mathrm{Sin}\,\vartheta\ \mathrm{Cos}\,\varphi \\
& + z'\ \mathrm{Cos}\,\vartheta
\end{aligned}
$$

oder umgekehrt, wenn man diese Werthe von x, y, z nach der Ordnung durch die Coefficienten von x′, von y′ und von z′ multiplicirt, und diese drey Produkte addirt

$$
\begin{aligned}
x' = {} & x (\mathrm{Cos}\,\vartheta\ \mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\varphi) \\
& + y (\mathrm{Cos}\,\vartheta\ \mathrm{Cos}\,\psi\ \mathrm{Sin}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\varphi) \\
& - z\ \mathrm{Sin}\,\vartheta\ \mathrm{Sin}\,\varphi \\
y' = {} & x (\mathrm{Cos}\,\vartheta\ \mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\psi\ \mathrm{Sin}\,\varphi) \\
& + y (\mathrm{Cos}\,\vartheta\ \mathrm{Cos}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Sin}\,\varphi) \\
& - z\ \mathrm{Sin}\,\vartheta\ \mathrm{Cos}\,\varphi \\
z' = {} & x\ \mathrm{Sin}\,\vartheta\ \mathrm{Sin}\,\psi \\
& + y\ \mathrm{Sin}\,\vartheta\ \mathrm{Cos}\,\psi \\
& + z\ \mathrm{Cos}\,\vartheta
\end{aligned}
$$

Man erhält diese Gleichungen am einfachsten auf folgende Art:

Gehen die Coordinaten x, y, z in andere ξ, υ, ζ über, wo $\xi\upsilon$ in derselben Ebene mit xy liegt, und wo die Achsen der ξ und x unter einander den Winkel ψ bilden, so ist

$$
\begin{aligned}
x &= \xi\ \mathrm{Cos}\,\psi + \upsilon\ \mathrm{Sin}\,\psi & \text{oder} \quad \xi &= x\ \mathrm{Cos}\,\psi - y\ \mathrm{Sin}\,\psi \\
y &= \upsilon\ \mathrm{Cos}\,\psi - \xi\ \mathrm{Sin}\,\psi & \upsilon &= x\ \mathrm{Sin}\,\psi + y\ \mathrm{Cos}\,\psi \\
z &= \zeta & \zeta &= z
\end{aligned}
$$

Gehen aber diese Coordinaten ξ, υ, ζ in andere ξ', υ', ζ' über, wo die Ebene der $\xi'\upsilon'$ mit der Ebene der $\xi\upsilon$ den Winkel ϑ bildet, und wo die Durchschnittslinie dieser beyden Ebenen zugleich die Achse der ξ und der ξ' ist, so hat man

$\xi = \xi'$ oder $\xi' = \xi$

$\upsilon = \upsilon' \operatorname{Cos} \vartheta + \zeta' \operatorname{Sin} \vartheta \qquad \upsilon' = \upsilon \operatorname{Cos} \vartheta - \zeta \operatorname{Sin} \vartheta$

$\zeta = \zeta' \operatorname{Cos} \vartheta - \upsilon' \operatorname{Sin} \vartheta \qquad \zeta' = \upsilon \operatorname{Sin} \vartheta + \zeta \operatorname{Cos} \vartheta$

Gehen endlich die Coordinaten ξ', υ', ζ', in andere x', y', z' über, wo $x' y'$ in derselben Ebene mit $\xi' \upsilon'$ liegt, und wo die Achsen der x' und ξ' unter einander den Winkel φ bilden, so ist, wie zuvor

$\xi' = x' \operatorname{Cos} \varphi - y' \operatorname{Sin} \varphi$ oder $x' = \upsilon' \operatorname{Sin} \varphi + \xi' \operatorname{Cos} \varphi$

$\upsilon' = y' \operatorname{Cos} \varphi + x' \operatorname{Sin} \varphi \qquad y' = \upsilon' \operatorname{Cos} \varphi - \xi' \operatorname{Sin} \varphi$

$\zeta' = z' \qquad z' = \zeta'$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Gröfsen ξ, υ, ζ und ξ', υ', ζ' so erhält man die oben gegebenen Ausdrücke zwischen $x\ y\ z$ und $x'\ y'\ z'$.

I. Stellt man die drey ersten dieser Gleichungen durch

$$x = a\,x' + b\,y' + c\,z'$$
$$y = a'x' + b'y' + c'\,z'$$
$$z = a''x' + b''y' + c''z'$$

vor, so sind die drey letzten

$$x' = ax + a'y + a''\,z$$
$$y' = bx + b'y + b''\,z$$
$$z' = cx + c'y + c''\,z$$

Man sieht leicht, dafs diese Gröfsen $a\ b\ c$ resp. die Cosinus der Winkel sind, welche die Achse der x, mit den Achsen der x', y', z' bildet, so wie $a' b' c'$ die Cosinus der Winkel der y mit x', y', z', und endlich $a''\ b''\ c''$ die Cosinus der Winkel der z mit x', y', z' sind.

Da sich aber, wie wir so eben gesehen haben, die Gröfsen x', y', z' durch $x\ y\ z$ blofs mittelst drey Gröfsen $\varphi\ \psi$ und ϑ bestimmen lassen, so mufs es zwischen den neun Gröfsen $a\ b\ c\ a'\ b'\ c'\ a''\ b''\ c''$, welche dieselbe Bestimmung ausdrücken, sechs Bedingungsgleichungen geben, wodurch sie wieder auf drey von einander unabhängige Gröfsen zurückgeführt werden. Man erhält diese sechs Bedingungsgleichungen, wenn man die vorhergehenden Werthe von x, y, z in der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

substituirt, und die Factoren von $x'^2\ y'^2\ z'^2$, $x' y'$, $x' z'$ und $y' z'$ einander gleich setzt, so dafs man hat

$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \qquad ab + a'b' + a''b'' = 0$

$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \qquad ac + a'c' + a''c'' = 0$

$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \qquad bc + b'c' + b''c'' = 0$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad aa' + bb' + cc' = 0$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \qquad aa'' + bb'' + cc'' = 0$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \qquad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$$

II. Dieses vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, daſs eine Ebene durch die gesuchte freye Rotationsachse und durch die Achse der z die gegebene Ebene der xy in einer Linie schneidet, welche letzte mit der Rotationsachse den Winkel ψ, und mit der Abscissenachse der x den Winkel φ bilde. Da diese Ebene durch die Rotationsachse und durch die Achse der z, welche wir für die Ebene der neuen $x'y'$ annehmen wollen, auf der Ebene der xy senkrecht steht, so ist in den vorhergehenden Ausdrücken $\vartheta = 90^\circ$, und man erhält daher für die neuen Coordinaten $x'y'z'$ die Ausdrücke

$$x' = (x \operatorname{Cos} \psi - y \operatorname{Sin} \psi) \operatorname{Cos} \varphi - z \operatorname{Sin} \varphi$$
$$y' = -(x \operatorname{Cos} \psi - y \operatorname{Sin} \psi) \operatorname{Sin} \varphi - z \operatorname{Cos} \varphi$$
$$z' = x \operatorname{Sin} \psi + y \operatorname{Cos} \psi$$

Wenn aber die neue Achse der x' zugleich eine freye Achse seyn soll, so muſs nach dem Vorhergehenden $\int x'y'dm = 0$ und $\int x'z'dm = 0$ seyn. Da übrigens dieselbe Achse auch durch den Schwerpunkt des Körpers gehen soll, so ist (nach Cap. I §. 10. I) auch $\int y'dm = 0$, und $\int z'dm = 0$

Setzt man aber der Kürze wegen

$$\int x^2 dm = a \quad \text{und} \quad \int xy\, dm = d$$
$$\int y^2 dm = b \qquad \int xz\, dm = e$$
$$\int z^2 dm = c \qquad \int yz\, dm = f$$

so gibt die erste jener Bedingungsgleichungen, oder, so gibt die Gleichung $\int x'y'dm = 0$, wenn man in ihr die vorhergehenden Werthe von x' und y' substituirt,

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 f \operatorname{Sin} \psi - 2 e \operatorname{Cos} \psi}{a \operatorname{Cos}^2 \psi + b \operatorname{Sin}^2 \psi - c - 2 d \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} \psi}$$

und eben so gibt die zweyte $\int x'z'dm = 0$

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{d(\operatorname{Cos}^2 \psi - \operatorname{Sin}^2 \psi) + (a-b) \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} \psi}{e \operatorname{Sin} \psi + f \operatorname{Cos} \psi}$$

Substituirt man diesen Werth von $\operatorname{tg} \varphi$ in der Gleichung $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}$, so erhält man zwey Ausdrücke für $\operatorname{tg} 2\varphi$, und wenn man diese beyden Ausdrücke von $\operatorname{tg} 2\varphi$ einander gleich setzt, so erhält man eine Gleichung, in welcher bloſs die unbekannte Gröſse $\operatorname{tg} \psi$ vorkömmt, und die, wie man leicht sieht, für $\operatorname{tg} \psi$ des dritten Grades ist. Da aber eine Gleichung des

dritten Grades immer wenigstens eine mögliche Wurzel hat, so hat auch jeder Körper immer wenigstens eine freye Achse.

Um zu finden, ob er deren noch mehrere hat, nehme man die eben gefundene freye Achse zur Abscissenachse der x an, wodurch $\int xy\,dm = \int xz\,dm = 0$, also $d = e = 0$ wird. Wird dann die andere freye Achse, wie vorhin, durch die Winkel φ und ψ bestimmt, so erhält man, wie zuvor, für $tg\,2\varphi$ die Gleichungen

$$(a\,Cos^2\,\psi + b\,Sin^2\,\psi - c)\,tg\,2\varphi - 2f\,Sin\,\psi = 0 \text{ und}$$
$$(f\,tg\,\varphi + (b - a)\,Sin\,\psi)\,.\,Cos\,\psi = 0$$

und da die letzte Gleichung den Factor $Cos\,\psi$ enthält, so ist $\psi = 90$, also die erste Gleichung

$$tg\,2\varphi = \frac{2f}{b-c}$$

und da $tg\,2\varphi$ einen doppelten Werth hat, so gibt die letzte Gleichung auch einen doppelten Werth von 2φ, oder von φ. Ist nähmlich der erste dieser Werthe von φ gleich φ', so ist der zweyte gleich $90 + \varphi'$.

Man erhält also noch zwey andere freye Achsen, die wegen des rechten Winkels ψ alle beyde in die Ebene der $y'z'$ fallen, so, daſs also jeder Körper immer drey freye Achsen hat, die sich in dem Schwerpunkte des Körpers senkrecht durchschneiden.

So ist z. B. bey allen Körpern, die durch Umdrehung einer Curve um eine gerade Linie entstanden sind, diese gerade Linie eine freye Achse des Körpers, weil es in jedem auf dieser Achse senkrechten Schnitte des Körpers, in gleichen Entfernungen von der Achse, auch zwey gleiche Elemente gibt, deren Schwungkräfte oder deren Pressungen auf die Achse einander aufheben. Die beyden andern freyen Achsen liegen in dem durch den Schwerpunkt gehenden, auf der Rotationsachse senkrechten Schnitte, oder sie sind die Durchmesser dieser kreisförmigen Schnitte, und da diese Durchmesser sich unter einander durch nichts unterscheiden, so sind sie insgesammt freye Achsen, so wie endlich für die Kugel alle ihre Durchmesser zugleich freye Achsen sind (§. 1. I)

§. 3.

Wir wollen nun die Gleichungen (I) des §. 1. wieder vornehmen, und die drey Coordinaten x, y, z derselben auf drey andere x′, y′, z′ bringen, welche letzteren mit den drey freyen Achsen des Körpers zusammenfallen sollen. Zu diesem Zwecke werden wir in den Gleichungen (I) für x, y, z ihre Werthe in x′ y′ z′ aus den drey ersten Gleichungen in §. 2. substituiren.

Bey dieser Substitution werden wir also auch, da die Achsen der x′ y′ z′ zugleich die freyen Achsen des Körpers sind, nach

dem Vorhergehenden $\int x' y' dm = 0$, $\int x' z' dm = 0$, $\int y' z' dm = 0$ setzen. Ferner wollen wir der Kürze wegen annehmen

$$\int (y'^2 + z'^2)\, dm = A \quad \text{und} \quad p\, dt = d\varphi - d\psi \operatorname{Cos} \vartheta$$
$$\int (x'^2 + z'^2)\, dm = B \quad\quad q\, dt = d\psi \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \varphi - d\vartheta \operatorname{Cos} \varphi$$
$$\int (x'^2 + y'^2)\, dm = C \quad\quad r\, dt = d\psi \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \varphi + d\vartheta \operatorname{Sin} \varphi$$

also auch $\frac{d\vartheta}{dt} = r \operatorname{Sin} \varphi - q \operatorname{Cos} \varphi$

$$\frac{d\psi}{dt} \operatorname{Sin} \vartheta = r \operatorname{Cos} \varphi + q \operatorname{Sin} \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} . \operatorname{Sin} \vartheta = (r \operatorname{Cos} \varphi + q \operatorname{Sin} \varphi) \operatorname{Cos} \vartheta + p \operatorname{Sin} \vartheta$$

Führt man nun die angezeigte Substitution aus, so erhält man:

$$A q \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \varphi + B r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \varphi - C p \operatorname{Cos} \vartheta = - N$$
$$(A q \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \varphi + B r \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \varphi + C p \operatorname{Sin} \vartheta) \operatorname{Cos} \psi + (B r \operatorname{Sin} \varphi - A q \operatorname{Cos} \varphi) \operatorname{Sin} \psi = - N'$$
$$(A q \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \varphi + B r \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \varphi + C p \operatorname{Sin} \vartheta) \operatorname{Sin} \psi + (B r \operatorname{Sin} \varphi - A q \operatorname{Cos} \varphi) \operatorname{Cos} \psi = - N''$$

Wenn man diese drey Gleichungen differentiirt, und nach der Differentiation den Winkel $\psi = 0$ setzt, was erlaubt ist, da man die Lage der x in der Ebene der xy willkührlich annehmen kann, so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$B r \operatorname{Cos} \varphi + A q \operatorname{Sin} \varphi = P, \text{ und}$$
$$B r \operatorname{Sin} \varphi - A q \operatorname{Cos} \varphi = Q \text{ setzt}$$

$$d\vartheta . P \operatorname{Cos} \vartheta + \operatorname{Sin} \vartheta . dP - d . Cp \operatorname{Cos} \vartheta = - dN$$
$$d\psi . Q - d\vartheta . P \operatorname{Sin} \vartheta + \operatorname{Cos} \vartheta . dP + d . Cp \operatorname{Sin} \vartheta = - dN'$$
$$d . Q - d\psi . P \operatorname{Cos} \vartheta - Cp . d\psi . \operatorname{Sin} \vartheta = - dN''$$

oder auch, wenn man die erste dieser drey Gleichungen durch $\operatorname{Cos} \vartheta$, und die zweyte durch $\operatorname{Sin} \vartheta$ multiplicirt, und die Differenz dieser Produkte nimmt

$$\left.\begin{array}{l} C dp + (B - A) qr\, dt = dN \operatorname{Cos} \vartheta - dN' \operatorname{Sin} \vartheta \\ \text{und eben so} \\ A dq + (C - B) pr\, dt = -(dN \operatorname{Sin} \vartheta + dN' \operatorname{Cos} \vartheta) \operatorname{Sin} \varphi + dN'' \operatorname{Cos} \varphi \\ B dr + (A - C) pq\, dt = -(dN \operatorname{Sin} \vartheta + dN' \operatorname{Cos} \vartheta) \operatorname{Cos} \varphi - dN'' \operatorname{Sin} \varphi \end{array}\right\} \ldots (II)$$

und diese Gleichungen sind, wie wir später sehen werden, sehr geschickt, die Rotation der Körper zu bestimmen, wenn diese, wie es bey den Körpern des Himmels der Fall ist, nahe um eine freye Achse statt hat.

§. 4.

Die in dem Vorhergehenden eingeführten drey Gröfsen p, q, r

sind vorzüglich defswegen merkwürdig, weil sie es sind, welche die Lage der Rotationsachse des Körpers für jeden Augenblick bestimmen. Man hat nämlich für die Punkte, die in der Rotationsachse liegen, die drey Gleichungen, $dx = 0$, $dy = 0$ und $dz = 0$. Differentiirt man daher die durch die drey ersten Gleichungen des §. 2. gegebenen Werthe von x, y, z in Beziehung auf ϑ, φ und ψ und setzt wieder nach der Differentiation $\psi = 0$, so gehen diese drey Gleichungen $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$ nach der Ordnung in folgende über:

$$0 = x'(d\psi \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Sin}\varphi - d\varphi \operatorname{Sin}\varphi) + y'(d\psi \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Cos}\varphi - d\varphi \operatorname{Cos}\varphi) + z' d\psi \operatorname{Sin}\vartheta \ldots\ldots (1)$$

$$= x'(d\varphi \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Cos}\varphi - d\vartheta \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Sin}\varphi - d\psi \operatorname{Cos}\varphi) + y'(d\psi \operatorname{Sin}\varphi - d\varphi \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Sin}\varphi - d\vartheta \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\varphi) + z' d\vartheta \operatorname{Cos}\vartheta \ldots (2)$$

$$0 = x'(d\vartheta \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Sin}\varphi + d\varphi \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\varphi) + y'(d\vartheta \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Cos}\varphi - d\varphi \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Sin}\varphi) + z' d\vartheta \operatorname{Sin}\vartheta \ldots (3)$$

Combinirt man aber diese drey Gleichungen auf folgende Art

$-(1) \operatorname{Sin}\varphi + (2) \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Cos}\varphi + (3) \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\varphi$, und

$(1) \operatorname{Cos}\varphi + (2) \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Sin}\varphi + (3) \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Sin}\varphi$, und endlich

$+ (2) \operatorname{Sin}\vartheta \quad - (3) \operatorname{Cos}\vartheta$

so erhält man nach der Ordnung der drey Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 0 = px' - qz' \\ 0 = py' - rz' \\ 0 = qy' - rx' \end{array}\right\} (4)$$

von welchen jede eine Folge der beyden andern ist. Diese letzten Gleichungen gehören aber für eine gerade Linie, nähmlich für die gerade Linie, welche während der Rotation des Körpers in jedem Augenblick in Ruhe bleibt, d. h. sie gehören für die Rotationsachse, und wenn diese Rotationsachse mit den Achsen der x' y' z' nach der Ordnung die Winkel λ, μ, ν macht, so hat man

$$\operatorname{Cos}\lambda = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \operatorname{Cos}\mu = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \operatorname{Cos}\nu = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

Um endlich auch die Geschwindigkeit der Rotation des Körpers um diese Achse zu erhalten, wollen wir den Punkt der Achse der z' betrachten, der von dem Anfangspunkte der Coordinaten um eine Gröfse entfernt ist, die wir für die Einheit annehmen wollen. Für diesen Punkt ist also $x' = 0$, $y' = 0$ und $z' = 1$, also die drey ersten Gleichungen des §. 2.

$$x = \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Sin}\psi, \quad y = \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\psi, \quad z = \operatorname{Cos}\vartheta$$

Die Geschwindigkeit dieses Punktes, parallel mit den drey Coor-

dinaten x y z zerlegt, ist daher, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, und $\frac{dz}{dt}$, oder wenn man wieder nach der Differentiation $\psi = 0$ setzt

$$\frac{d\psi}{dt} \operatorname{Sin} \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dt} \operatorname{Cos} \vartheta \text{ und } - \frac{d\vartheta}{dt} \operatorname{Sin} \vartheta$$

und daher ist auch die eigentliche Geschwindigkeit dieses Punktes

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \frac{\sqrt{d\vartheta^2 + d\psi^2 \operatorname{Sin}^2 \vartheta}}{dt} = \sqrt{q^2 + r^2}$$

Da man aber die absolute Geschwindigkeit eines Punktes erhält, der sich um irgend eine Achse bewegt, wenn man die Winkelgeschwindigkeit desselben mit seiner Entfernung von dieser Achse multiplicirt, und da hier diese Entfernung gleich Sin ν ist, so ist die Winkelgeschwindigkeit $d\vartheta$ dieses Punktes, also auch die des Körpers selbst

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{q^2 + r^2}}{\operatorname{Sin} \nu}$$

oder da nach dem Vorhergehendem

$$\operatorname{Sin} \nu = \sqrt{\frac{q^2 + r^2}{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ist, so hat man für die gesuchte Winkelgeschwindigkeit des Körpers

$$d\vartheta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

also auch

$$p = d\vartheta . \operatorname{Cos} \nu$$
$$q = d\vartheta . \operatorname{Cos} \lambda, \text{ und}$$
$$r = d\vartheta . \operatorname{Cos} \mu$$

Die Lage der Rotationsachse, so wie die Winkelgeschwindigkeit des Körpers für jeden Augenblick hängt daher, wie die vorhergehenden Gleichungen zeigen, von den Gröſsen p, q, r ab, und man sieht zugleich, daſs auch die rotirende Bewegung eines Körpers, so wie die progressive sich in drey andere Drehungen um drey unter einander senkrechte Rotationsachsen auflösen läſst.

I. In dem Vorhergehenden sind die Achsen der x, y, z ihrer Lage nach willkührliche, aber im Raume fixe Linien, während die Achsen der x′ y′ z′, die denselben Anfangspunkt haben, in dem Körper fix, also mit dem Körper beweglich sind, und die mit ihnen parallelen Coordinaten x′ y′ z′ bestimmen die Lage eines Elementes des Körpers gegen den Anfangspunkt. Die Coordinaten x y z sind also, so wie die Gröſsen a b c

$a' b' c' \ldots$ (§ 2. I) in jedem Augenblicke dieselben für alle Elemente des Körpers, aber sie ändern sich mit jedem Augenblicke, oder sie sind Functionen der Zeit, während im Gegentheile die Gröfsen x' y' z' sich nur bey dem Uebergange von einem Elemente des Körpers zu einem andern Elemente sich ändern, aber für dasselbe Element immer dieselben Werthe haben, also von der Zeit unabhängig sind.

Differentiirt man daher, diesem gemäfs, die drey (in §. 2. I) für x, y, und z gegebenen Werthe in Beziehung auf die Zeit t, so erhält man

$$\frac{dx}{dt} = x' \frac{da}{dt} + y' \frac{db}{dt} + z' \frac{dc}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = x' \frac{da'}{dt} + y' \frac{db'}{dt} + z' \frac{dc'}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = x' \frac{da''}{dt} + y' \frac{db''}{dt} + z' \frac{dc''}{dt}$$

und diese Werthe von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ drücken für jeden Augenblick die nach der Richtung der Achsen der x, y, z zerlegten Geschwindigkeiten des Elementes aus, dessen Coordinaten $x' y' z'$ sind. Will man daher diejenigen Punkte des Körpers kennen, die in jedem Augenblicke in Ruhe sind, oder keine Geschwindigkeit haben, so hat man zu ihrer Bestimmung die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x' da + y' db + z' dc = 0 \\ x' da' + y' db' + z' dc' = 0 \\ x' da'' + y' db'' + z' dc'' = 0 \end{array}\right\} (5)$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{r} p dt = b da + b' da' + b'' da'' \\ q dt = c db + c' db' + c'' db'', \text{ und} \\ - r dt = c da + c' da' + c'' da'' \end{array}\right\} (6)$$

so hat man, vermöge der in §. 2. I gegebenen Bedingungsgleichungen zwischen den Gröfsen $a\, b\, c \ldots$ auch folgende Ausdrücke

$$- p dt = a db + a' db' + a'' db''$$

$$- q dt = b dc + b' dc' + b'' dc''$$

$$r dt = a dc + a' dc' + a'' dc''$$

Multiplicirt man nun die Gleichungen (5) nach der Ordnung durch c, c', c'', so erhält man für die Summe dieser Produkte (da nach §. 2. I.. $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$ also $c\, dc + c' dc' + c'' dc'' = 0$ ist) die Gleichung

$$qy' - rx' = o$$

Multiplicirt man dieselben Gleichungen nach der Ordnung durch b, b', b'', so erhält man

$$px' - qz' = o$$

und endlich eben so, wenn man sie durch $a\ a'\ a''$ multiplicirt

$$rz' - py' = o$$

und da diese drey Gleichungen mit den bereits oben erhaltenen Gleichungen (4) identisch sind, so sind auch die in (6) angenommenen Werthe von p, q, r identisch mit jenen, welche wir im Anfange des §. 3 angenommen haben, wie man sich auch leicht durch eine unmittelbare Vergleichung überzeugen kann, wenn man in (6) die oben durch $\varphi\ \psi$ und ϑ gegebenen Werthe von $a\ b\ c \ldots$ substituirt.

II. Zwischen diesen Gröſsen $a\ b\ c \ldots$ und $p\ q\ r$ gibt es noch einige merkwürdige Relationen, welche wir hier kurz anzeigen wollen.

Es war
$$\begin{aligned} r\,dt &= a\,dc + a'dc' + a''dc'' \\ -q\,dt &= b\,dc + b'dc' + b''dc'' \\ o &= c\,dc + c'dc' + c''dc'' \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Ordnung durch a, b, c so findet man $dc = (ar - bq)\,dt$.

Multiplicirt man sie aber durch $a'\ b'\ c'$ und dann durch $a''\ b''\ c''$, so erhält man

$$dc' = (a'r - b'q)\,dt, \quad \text{und}$$
$$dc'' = (a''r - b''q)\,dt$$

Behandelt man eben so die Gleichungen

$$\begin{aligned} q\,dt &= c\,db + c'db' + c''db'' \\ -p\,dt &= a\,db + a'db' + a''db'' \\ o &= b\,db + b'db' + b''db'' \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} db &= (c\,q - a\,p)\,dt \\ db' &= (c'q - a'p)\,dt \\ db'' &= (c''q - a''p)\,dt \end{aligned}$$

Behandelt man endlich eben so die Gleichungen

$$\begin{aligned} p\,dt &= b\,da + b'da' + b''da'' \\ -r\,dt &= c\,da + c'da' + c''da'' \\ o &= a\,da + a'da' + a''da'' \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} da &= (b\,p - c\,r)\,dt \\ da' &= (b'p - c'r)\,dt \\ da'' &= (b''p - c''r)\,dt \end{aligned}$$

Endlich hat man noch

$$q\,da + r\,db + p\,dc = o$$
$$q\,da' + r\,db' + p\,dc' = o$$
$$q\,da'' + r\,db'' + p\,dc'' = o$$

§. 5.

Man nennt **Moment der Trägheit** eines Körpers in Beziehung auf eine Achse, die Summe der Produkte aller Elemente des Körpers in das Quadrat ihrer Entfernung von dieser Achse. Die in §. 3. mit A, B, C bezeichneten Gröfsen sind also die Momente der Trägheit des Körpers in Beziehung auf die Achsen der x' y' z'.

Sey eben so C' das Moment der Trägheit desselben Körpers in Beziehung auf die Achse der z, so ist $C' = \int (x^2 + y^2)\,dm$. Substituirt man in diesem Ausdrucke die Werthe von x und y, welche wir in den zwey ersten Gleichungen §. 2. gegeben haben, und bemerkt man, dafs

$$\int x'y'dm = \int x'z'dm = \int y'z'dm = o$$

ist, so erhält man

$$C' = A \operatorname{Sin}^2 \vartheta \operatorname{Sin}^2 \varphi + B \operatorname{Sin}^2 \vartheta \operatorname{Cos}^2 \varphi + C \operatorname{Cos}^2 \vartheta$$

Sind aber $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Winkel, welche die Achse der z mit den Achsen der x' y' z' bildet, so ist bekanntlich

$$\operatorname{Cos} \alpha = \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \varphi$$
$$\operatorname{Cos} \beta = \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \varphi \text{ und}$$
$$\operatorname{Cos} \gamma = \operatorname{Cos} \vartheta,$$

also ist auch

$$C' = A \operatorname{Cos}^2 \alpha + B \operatorname{Cos}^2 \beta + C \operatorname{Cos}^2 \gamma$$

Wenn man daher die Momente der Trägheit in Beziehung auf die freyen Achsen des Körpers durch die Quadrate der Cosinus der Winkel multiplicirt, welche diese freyen Achsen mit irgend einer andern neuen, ebenfalls durch denselben Punkt gehenden Achse bilden, so ist die Summe dieser drey Produkte das Moment der Trägheit in Beziehung auf diese neue Achse. Da die Gröfsen A, B, C ihrer Natur nach immer positiv sind, so mufs, wie die letzte Gleichung zeigt, C' kleiner seyn als die gröfste der drey Gröfsen A, B, C, und gröfser als die kleinste dieser drey Gröfsen, so dafs daher das gröfste und kleinste Moment eines Körpers der freyen Achse desselben zugehört. Ist nämlich z. B. A das gröfste von den drey Momenten A, B, C, so läfst sich die letzte Gleichung, wenn man in ihr

$$\operatorname{Cos}^2 \alpha = 1 - \operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Cos}^2 \gamma$$

setzt, auch so ausdrücken

$$C' = A - (A - B) \operatorname{Cos}^2 \beta - (A - C) \operatorname{Cos}^2 \gamma$$

und da hier (A — B) und (A — C), so wie $\text{Cos}^2\,\beta$ und $\text{Cos}^2\,\gamma$ immer positive Gröſsen sind, so ist auch immer $C' < A$. Ist aber C das kleinste der drey Momente A, B, C, so ist $C' = C + (A - C)\,\text{Cos}^2\,\alpha + (B - C)\,\text{Cos}^2\,\beta$ und daher auch immer $C' > C$.

I. Sind für einen Körper die beyden Momente der Trägheit A und B einander gleich, so gibt die vorhergehende Gleichung

$$C' = A\,\text{Sin}^2\,\gamma + C\,\text{Cos}^2\,\gamma$$

also C' unabhängig von den Winkeln α und β. Nimmt man also an, daſs γ ein rechter Winkel ist, d. h. daſs die Achse der z senkrecht auf der Achse der z' steht, so ist $C' = A$, oder die Momente der Trägheit in Beziehung auf alle Achsen, die in der Ebene der x'y' liegen, sind unter einander gleich, und alle diese Achsen sind freye Achsen, wie dieses der Fall mit den durch Rotation einer Curve entstandenen Körpern ist (§. 2.). Hätte man endlich $A = B = C$, so wäre auch allgemein $C' = A$, oder dann sind alle Achsen des Körpers, die in irgend einer Richtung durch den Schwerpunkt desselben gehen, zugleich freye Achsen, wie dieses z. B. mit der Kugel der Fall ist.

II. Kennt man das Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf eine Achse, die durch seinen Schwerpunkt geht, so kann man daraus leicht auch das Moment der Trägheit für jede andere der ersteren parallelen Achse finden.

Sey z B. die erste gegebene Achse die der z, die also durch den Schwerpunkt geht, der zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten seyn soll. Die zweyte der ersten parallele Achse soll die Ebene xy in dem Punkte $x = \alpha$, $y = \beta$ schneiden. Sey a die Distanz des Schwerpunktes von dieser zweyten Achse, also $a^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Sey ferner r die Distanz eines Elementes dm des Körpers von der ersten, und r' von der zweyten Achse, also

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ und}$$
$$r'^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2, \text{ also auch}$$
$$r'^2 = x^2 + y^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha x + \beta y)$$
$$= r^2 + a^2 - 2(\alpha x + \beta y)$$

Multiplicirt man den letzten Ausdruck durch dm, und integrirt, so ist

$$\int r'^2\,dm = \int r^2\,dm + a^2 \int dm - 2\alpha \int x\,dm - 2\beta \int y\,dm$$

Da aber der Voraussetzung gemäſs, der Schwerpunkt in der Achse der z liegt, so ist (Cap. I §. 10. II)

$$\int x\,dm = \int y\,dm = 0$$

ferner ist $\int dm = m$ die Masse des ganzen Körpers,

$$\text{also auch} \quad \int r'^2\,dm = \int r^2\,dm + a^2 . m$$

Man erhält also das gesuchte Moment, wenn man zu dem gege-

benen Momente die Masse des Körpers, multiplicirt in das Quadrat der Entfernung des Schwerpunktes von der neuen Achse addirt. So ist für die Kugel, deren Halbmesser a ist, wie wir bald sehen werden,

$\int r^2 \, dm = \frac{8\pi a^5}{15}$, und $m = \frac{4\pi a}{3}$, also ist auch das Moment der Kugel für eine Achse, welche die Oberfläche der Kugel tangirt, gleich

$$\frac{8\pi a^5}{15} + \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{28}{15}\pi a^5$$

Nennt man überhaupt $m k^2$ das Moment $\int r^2 \, dm$ für eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Achse, so hat man

$$\int r'^2 \, dm = m(k^2 + a^2)$$

und da k^2 seiner Natur nach immer positiv seyn mufs, so sieht man, dafs das Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse immer kleiner ist, als das in Beziehung auf jede andere mit jener parallelen Achse, und dafs endlich die Momente der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf solche Achsen, die gleich weit von dem Schwerpunkte entfernt, und unter einander parallel sind, auch alle unter einander gleich seyn müssen.

§. 6.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir zuerst die Momente der Trägheit einiger Körper für besondere Fälle zu bestimmen suchen.

I. Man suche die Momente der Trägheit eines rechtwinklichten Parallelepipedums.

Sind a b c die Längen der drey Seiten desselben, die mit den Achsen der x y z parallel sind, so ist das Volum des Körpers gleich abc, und diesem Ausdrucke ist auch die Masse m des Körpers proportional, wenn die Dichte desselben in allen seinen Theilen dieselbe ist. Das Moment der Trägheit in Beziehung auf die Achse der z ist $\int (x^2 + y^2) \, dm$ oder $\int\int\int (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$. Integrirt man diesen Ausdruck zuerst in Beziehung auf z, von $z = 0$ bis $z = c$, so hat man $c . \int\int (x^2 + y^2) \, dx \, dy$; integrirt man diese Gröfse in Beziehung auf y von $y = 0$ bis $y = b$, so ist $c . \int \left(bx^2 + \frac{b^3}{3} \right) dx$; integrirt man endlich auch diese Gröfse in Beziehung auf x von $x = 0$ bis $x = a$, so ist $c . \left(\frac{a^3 b}{3} + \frac{ab^3}{3} \right)$, also ist das Moment der Trägheit in Beziehung auf die Achse der z gleich $\frac{abc}{3}(a^2 + b^2) = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$, und eben so in Be-

ziehung auf y gleich $\frac{m}{3}(a^2+c^2)$, und endlich in Beziehung auf x gleich $\frac{m}{3}(b^2+c^2)$, und diese Achsen der z y x gehen hier durch den Scheitel eines der acht Winkel des Körpers; gehen sie aber durch den Schwerpunkt des Körpers, der zugleich sein Mittelpunkt ist, und sind sie, so wie zuvor, den drey Seitenflächen des Parallelepipedums parallel, so hat man für die Momente der Trägheit in Beziehung auf die Achse der z, y und x die Ausdrücke

$$\frac{m}{12}(a^2+b^2); \; \frac{m}{12}(a^2+c^2) \text{ und } \frac{m}{12}(b^2+c^2).$$

Für den Würfel, dessen Seite gleich a ist, hat man daher in dem ersten Falle das Moment der Trägheit für jede der drey Achsen $\frac{2}{3}a^2m$, und in dem zweyten Falle $\frac{1}{6}a^2m$.

II. Man suche die Momente der Trägheit eines senkrechten Cylinders mit kreisförmiger Basis.

Sey 2a die Höhe des Cylinders, und c der Halbmesser der Basis, also $m = 2\pi a c^2$. Ist der Anfang der Coordinaten der Mittelpunkt der Achse 2a des Cylinders, in welcher auch die Achse der x liegt, während die Ebene xy mit der Ebene der Basis parallel ist, so hat man erstens $\int x^2 dm = \int x^2 dx\, dy\, dz$. Integrirt man diesen Ausdruck in Beziehurg auf z, und setzt nach der Integration

$$z = \sqrt{c^2-y^2}, \text{ so ist } \int x^2 dm = \int x^2 dx . \int dy \sqrt{c^2-y^2}.$$

Es ist aber $\int dy \sqrt{c^2-y^2}$ von $y = o$ bis $y = c$ viermahl genommen gleich $\int_c^o dy \sqrt{c^2-y^2} = \pi c^2$, also ist $\int x^2 dm = \pi c^2 \int x^2 dx$

oder $\pi c^2 \int_{-a}^{a} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi c^2 a^3 = \frac{ma^2}{3}$

Eben so ist zweytens

$\int y^2 dm = \int dx \int y^2 dy \sqrt{c^2-y^2}$. Aber

$\int_c^o y^2 dy \sqrt{c^2-y^2} = \frac{\pi c^4}{16}$, welches viermahl genommen gibt

$\int y^2 dm = \frac{\pi c^4}{4} \int_{-a}^{a} dx = \frac{1}{2}\pi c^4 a = \frac{mc^2}{4}$

Drittens endlich ist

$\int z^2 dm = \int dx \int z^2 dz \sqrt{c^2-z^2}$, oder wenn man diesen Ausdruck wie den vorhergehenden behandelt

$$\int z^2\, dm = \frac{mc^2}{4}$$

Es ist daher das Moment der Trägheit des Cylinders in Beziehung auf diejenige Achse, welche durch den Mittelpunkt der Basis senkrecht auf dieselbe geht, oder in Beziehung auf die Achse der x gleich $\int (y^2 + z^2)\, dm = \frac{mc^2}{2}$; auf die Achse der y aber $\int (x^2 + z^2)\, dm = m\left(\frac{a^2}{3} + \frac{c^2}{4}\right)$, und anf die Achse der z endlich $\int (x^2 + y^2)\, dm = m\left(\frac{a^2}{3} + \frac{c^2}{4}\right)$. Die beyden letzten sind also gleich. Ueberhaupt sind die Momente in Beziehung auf alle Durchmesser des durch den Anfangspunkt der Coordinaten mit der Basis paralellen Kreises einander gleich, da man nach §. 2. hat $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2f}{b-c}$ oder $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\int yz\, dm}{\int y^2\, dm - \int z^2 dm}$. Es ist aber, da man für jedes Element $+ yz\, dm$ über der Ebene der xy ein ähnliches $- yz\, dm$ unter dieser Ebene hat, $\int yz\, dm = 0$, und da überdieſs nach dem Vorhergehenden $\int y^2\, dm = \int z^2\, dm$ ist, so hat man $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{0}{0}$ oder der Winkel φ bleibt unbestimmt.

III. Man suche das Moment der Trägheit einer Kugel in Beziehung auf einen ihrer Durchmesser.

Ist a der Halbmesser der Kugel, so ist ihr Volum oder ihre Masse $m = \frac{4\pi a^3}{3}$, und ihr Moment der Trägheit in Beziehung auf die Achse der x gleich $\int (y^2 + z^2)\, dm$. Es sey $r^2 = y^2 + z^2$ und $y = r \operatorname{Cos} \varphi$, $z = r \operatorname{Sin} \varphi$, so ist $dm = r\, dr\, d\varphi\, dx$ und daher $\int r^2\, dm = \int r^3\, dr\, d\varphi\, dx = 2\pi \int r^3\, dr\, dx$, weil $\int d\varphi = 2\pi$ ist. Man hat aber

$$2\pi \int r^3\, dr\, dx = \frac{\pi}{2} \int r^4\, dx = \frac{\pi}{2} \int (a^2 - x^2)^2\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(a^4 x - \frac{2a^2 x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)$$

Nimmt man diesen Ausdruck von $x = a$ bis $x = -a$, so erhält man für das gesuchte Moment

$$\int r^2\, dm = \int (y^2 + z^2)\, dm = \frac{8}{15} a^5 . \pi = \frac{2}{5} a^2 m$$

IV. Man suche das Moment der Trägheit einer Kugelschale von gegebener Dicke in Beziehung auf irgend eine durch den Mittelpunkt der Schale gehende Achse.

Ist a der Halbmesser der äufseren, und b der inneren Gränze der Schale, also (a — b) ihre gegebene Dicke, so ist ihre Masse $m = \frac{4\pi}{3}(a^3 - b^3)$.

Für eine Kugel des Halbmessers a ist nach III das Moment der Trägheit gleich $\frac{8}{15} a^5 . \pi$, und für eine Kugel des Halbmessers b ist das Moment $\frac{8}{15} b^5 . \pi$, also ist das gesuchte Moment der gegebenen Schale gleich

$$\frac{8}{15}(a^5 - b^5)\pi = \frac{2}{5} . \frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3} . m$$

$$= \frac{2}{5} . \frac{a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4}{a^2 + ab + b^2} . m$$

ist die Dicke der Schale unendlich klein, also a = b, so ist das Moment der blofsen Oberfläche einer Kugel gleich $\frac{2}{3} a^2 m$.

V. Man suche das Moment der Trägheit derjenigen Körper, welche durch Umdrehung einer Curve um eine geradlinichte Achse entstehen, in Beziehung auf diese Achse.

Aus irgend einem Punkte dieser Rotationsachse, welche zugleich die Achse der x seyn soll, denke man sich mit dem Halbmesser r und r + dr zwey Kreise gezogen, so ist die ringförmige Fläche, welche zwischen den Peripherien dieser zwey Kreise enthalten ist, gleich $(r + dr)^2 \pi - r^2 \pi = 2 \pi r dr$, wenn man die zweyten Differentialien von dr vernachlässiget. Multiplicirt man diese Fläche durch dx, so erhält man für den körperlichen Inhalt des so entstehenden Ringes $2 \pi r dr dx$. Da alle Punkte dieses Ringes von der Rotationsachse um die Gröfse r entfernt sind, so ist das Moment des Ringes in Beziehung auf diese Achse $= \int\int 2 \pi . r^3 dr dx$. Ist aber die Gleichung der rotirenden Curve zwischen den Abscissen x und den darauf senkrechten Coordinaten y gegeben, so wird man den vorhergehenden Ausdruck von r = 0 bis r = y integriren, so dafs man für das gesuchte Moment des ganzen Körpers den Ausdruck $\frac{\pi}{2}\int y^4 dx$ erhält, wodurch also die Bestimmung des Moments solcher Körper auf eine einzige Integration zurückgeführt wird.

Exempel A. Für den Kreis, dessen Halbmesser a ist, hat man $y^2 = 2ax - x^2$, also das gesuchte Moment eines Kugelstückes, zu welchem die Abscisse x vom Scheitel genommen gehört

$$\frac{\pi}{2}\int(4 a^2 x^2 - 4 a x^3 + x^4) dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4 a^2 x^3}{3} - a x^4 + \frac{x^5}{5}\right)$$

Für die ganze Kugel ist $x = 2a$, also ihr Moment $\frac{8\pi a^5}{15}$ wie zuvor.

Exempel B. Ist die rotirende Curve eine Gerade, und ihre Gleichung $y = ax + b$, so ist das Moment des so entstehenden Kegels gleich

$$\frac{\pi}{2}\int(ax+b)^4\,dx = \frac{\pi}{10.a}(ax+b)^5.$$

Nimmt man diesen Ausdruck von $x = -\frac{b}{a}$ (d. h. von $y = o$) bis $x = h$, so ist das Moment des Kegels, dessen Höhe h ist, gleich $\frac{\pi}{10.a}(ah+b)^5$. Nimmt man aber jenen Ausdruck von $x = o$ bis $x = h$, so erhält man für das Moment des abgestumpften Kegels, dessen Höhe h ist, den Ausdruck

$$\frac{\pi}{10.a}\left[(ah+b)^5 - b^5\right]$$

Ist endlich $a = o$, oder ist die rotirende Gerade parallel zur Rotationsachse, so erhält man das Moment eines Cylinders, dessen Höhe h und Halbmesser der Basis b ist, gleich $\frac{\pi b^4 h}{2}$ wie in II.

VI. Man suche endlich die Momente der Trägheit eines Ellipsoids, in Beziehung auf seine drey durch seinen Mittelpunkt gehenden Achsen a b c. Sind diese Achsen zugleich die Coorditenachsen der x y z, so hat man für die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoids

$$a^2 b^2 z^2 + a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 = a^2 b^2 c^2$$

Das Moment der Trägheit dieses Körpers in Beziehung auf die Achse der z ist $C = \int\int\int(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$. Integrirt man diesen Ausdruck zuerst in Beziehung auf z, so ist

$$C = \int\int(x^2 + y^2)\,z\,.\,dx\,dy + \text{Const.}$$

Die zwey äufsersten Werthe von z sind aber

$$z = + c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ und } z = - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2}}$$

also auch jenes Integral zwischen diesen zwey Werthen von z genommen

$$C = \int\int 2c\,(x^2 + y^2)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.\,dx\,dy, \text{ oder}$$

Bayerische Staatsbibliothek München

$$C = 2c \iint x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} . dx\,dy$$

$$+ 2c \iint y^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} . dx\,dy \ldots . (1)$$

Setzt man der Kürze wegen $r^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$, so ist der erste Theil des vorhergehenden Ausdrucks

$$2c \iint \frac{x^2}{b} . dx\,dy \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{2c}{b} \int x^2 dx . \int dy \sqrt{r^2 - y^2}$$

Um die Gränzen des Integrals

$$\int dy \sqrt{r^2 - y^2} = \tfrac{1}{2} y \sqrt{r^2 - y^2} + \tfrac{1}{2} r^2 \text{ Arc.tg} \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

zu finden, hat man für den Schnitt des Ellipsoids mit der Ebene der xy die Gleichung

$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, oder $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$ oder endlich $y^2 = r^2$, so daſs diese Gränzen $y = + r$ und $y = - r$ sind, und man also hat $\int dy \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{r^2 \pi}{2}$. Es ist daher der erste Theil der Gleichung (1)

$$\frac{c\pi}{b} \int r^2 x^2 dx = \frac{bc\pi}{a^2} \int (a^2 - x^2) x^2 dx,$$

und dessen Integral von $x = a$ bis $x = - a$ gleich $\frac{4}{15} a^3 bc . \pi$. Ganz eben so findet man für den zweyten Theil der Gleichung (1) den Ausdruck $\frac{4}{15} acb^3 . \pi$, und daher das Moment der Trägheit des ganzen Ellipsoids

in Beziehung auf die Achs der z $\frac{4}{15} abc . \pi (a^2 + b^2) = C$

.................. y $\frac{4}{15} abc . \pi (a^2 + c^2) = B$

.................. x $\frac{4}{15} abc . \pi (b^2 + c^2) = A$

Das Volum oder die Masse des ganzen Ellipsoids ist aber

$$\iiint dx\,dy\,dz = \frac{4\pi}{3} . abc = m, \text{ also auch}$$

Bayerische Staatsbibliothek München

$$C = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$$

$$B = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$$

$$A = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$$

Setzt man $a = b = c$, so erhält man für die Kugel, deren Halbmesser gleich a ist, das Moment der Trägheit in Beziehung auf jeden ihrer Durchmesser gleich

$$\frac{8\pi}{15} \cdot a^5 = \frac{2}{5} ma^2, \text{ wie zuvor.}$$

Setzt man aber nur $a = b$, so erhält man für das Sphäroid, welches durch die Umdrehung einer Elipse um ihre kleine Achse c entstanden ist, $C = \frac{2}{5} a^2 m$, und $B = A = \frac{1}{5}(a^2 + c^2) m$, wo $m = \frac{4}{3} a^2 c \pi$ ist. Das Moment C in Beziehung auf die kleine Achse c ist also das gröfste, und das Moment $A = B$ in Beziehung auf die grofse Achse oder auf irgend einen Halbmesser des Aequators ist das kleinste aller Momente des Sphäroids.

Diese Gröfsen $\iiint (x^2 + y^2)\, dm$, $\iiint (x^2 + z^2)\, dm$, $\iiint (y^2 + z^2)\, dm$ also, welche wir in dem Vorhergehenden für mehrere Körper bestimmt haben, und welche die Momente der Trägheit dieser Körper gegen die Rotationsachse derselben ausdrücken, sind ihrer Natur nach nicht als veränderliche und unbestimmte Gröfsen zu betrachten, sondern sie stellen solche Integralien vor, die sich über die ganze Masse des Körpers erstrecken, und daher gewisse bestimmte und für jeden gegebenen Körper constante Werthe haben, Werthe, die blofs von der Gestalt und von der Dichte des Körpers, aber nicht von seinem Orte im Raume abhängen.

§. 7.

Wir wollen nun annehmen, dafs auf eine körperliche Masse m, die um eine fixe horizontale Achse beweglich ist, blofs die constante Kraft g der Schwere in einer vertikalen Richtung wirke, und die Rotation dieses Körpers um jene Achse bestimmen.

Man denke sich eine auf die Rotationsachse senkrechte und durch den Schwerpunkt A des Körpers gehende Ebene. Sey a die Entfernung des Schwerpunktes von dem Punkte O, in welchem die Rotationsachse jene vertikale Ebene trifft, und ϑ der während der Bewegung des Körpers veränderliche Winkel, welcher die Entfernung $AO = a$ mit der durch den Punkt O gezogenen vertikalen Linie bildet, so ist (§. 1.) das Moment jedes Elementes, den Körper um die fixe Achse zu drehen, gleich $x = am \operatorname{Sin} \vartheta$.

Da aber die Kraft $g\,dt$, welche den Körper in jedem Augenblicke in Bewegung setzt, der Aenderung der Winkelgeschwindigkeit ϑ des Körpers proportional seyn mufs, so ist $g\,dt = h\,d\vartheta$, wo h eine constante Gröfse ist.

Jedes Element dm des Körpers, dessen Entfernung von der Rotationsachse gleich r ist, wirkt mit der Kraft $\frac{r\,dm}{h}$, und ihr Moment ist daher $\frac{r^2\,dm}{h}$, und da die Summe aller dieser Momente dem Momente x des ganzen Körpers gleich seyn mufs, so ist $\frac{1}{h}.\int r^2\,dm = x$, oder wenn man den vorhergehenden Werth von $h = \frac{g\,dt}{d\vartheta}$ substituirt, $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{gx}{\int r^2\,dm}$, oder endlich, da $\vartheta = -\frac{d\theta}{dt}$ ist, wenn man voraussetzt, dafs der Winkel θ während der Bewegung abnimmt, so ist

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gx}{\int r^2\,dm}$$

In diesem Ausdrucke ist $\int r^2\,dm$ das Moment des Körpers in Beziehung auf die Rotationsachse oder auf den Punkt O. Nennt man aber mk^2 das Moment des Körpers in Beziehung auf eine andere der vorigen parallele, und durch den Schwerpunkt A gehende Achse, so ist (§. 5.) $\int r^2\,dm = m\,(k^2 + a^2)$, also auch da $x = a\,m\,\mathrm{Sin}\,\theta$ ist

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{ag\,\mathrm{Sin}\,\theta}{a^2+k^2}$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch $2\,d\theta$, und integrirt, so ist

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2\,ag\,\mathrm{Cos}\,\theta}{a^2+k^2} + \mathrm{Const.}$$

Ist $\frac{d\theta}{dt} = 0$ für $\theta = \alpha$, das heifst, fängt die Bewegung des Körpers aus der Ruhe dann an, wenn der Winkel der Linie $AO = a$ mit der durch O gehenden Vertikale gleich α ist, so hat man

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2\,ag}{a^2+k^2}\,(\mathrm{Cos}\,\theta - \mathrm{Cos}\,\alpha)$$

und dieser Werth von $\frac{d\theta}{dt}$ drückt die Geschwindigkeit des Körpers für jeden Werth des Winkels θ aus. Man sieht daraus, dafs der Körper, wenn er ursprünglich in Ruhe ist, nur dann immer in Ruhe

bleiben wird, wenn $\vartheta = o$ ist, d. h. wenn sein Schwerpunkt A in der durch O gehenden Verticale ist, oder mit andern Worten, wenn sein Schwerpunkt den tiefsten oder den höchsten Ort einnimmt. Geht aber die Rotationsachse durch den Schwerpunkt A selbst, so ist $AO = a = o$, und der Körper wird daher entweder immer in Ruhe bleiben, oder wenn er sich bewegt, um diese neue Achse immer gleichförmig rotiren.

I. Man bemerke, dafs dem vorhergehendem Ausdrucke gemäfs der Körper um die Achse in O nicht so rotirt, als ob seine ganze Masse in dem Schwerpunkt vereinigt wäre, wie dieses wohl bey der progressiven Bewegung der Fall ist; denn dann wäre das Moment des Körpers in Beziehung auf die Achse durch A gleich $mk^2 = o$, also auch $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g \operatorname{Sin} \vartheta}{a}$, also seine Geschwindigkeit gröfser als um die Achse durch O.

II. Es kann aber einen andern Punkt B in der verlängerten Linie OA geben, welcher, wenn in ihm die ganze Masse des Körpers vereinigt wäre, ganz eben so um die feste Achse durch O schwingen würde, wie der vorhin betrachtete Körper selbst. Nennt man l die Entfernung OB dieses Punktes B von dem festen Punkte O, so wird man, um die Bewegung dieses Punktes um die Achse durch O zu erhalten, in der vorhergehenden Gleichung $a = l$, und $k = o$ setzen, wodurch man erhält

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}. = -\frac{g}{l} \operatorname{Sin} \vartheta$$

wovon das Integral ist

$$\frac{d\vartheta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l} (\operatorname{Cos} \vartheta - \operatorname{Cos} \alpha)$$

wenn wieder $d\vartheta = o$ für $\vartheta = \alpha$ ist. Diese letzte Gleichung enthält also die Bewegung eines schweren Punktes B, der durch einen unbiegsamen und nicht schweren Faden der Länge l an der horizontalen Achse durch O befestigt ist, d. h. sie enthält die Bewegung eines einfachen Pendels. Vergleicht man diese beyden Ausdrücke von $\frac{d\vartheta^2}{dt^2}$, so sieht man, dafs die Bewegung des einfachen Pendels mit jener des Körpers oder mit jener des zusammengesetzten Pendels dieselbe seyn wird, wenn man hat

$$\frac{2g}{l} = \frac{2ag}{a^2 + k^2} \text{ oder } l = a + \frac{k^2}{a}$$

Wenn also ein Körper, dessen Schwerpunkt in A ist, um eine feste horizontale Achse durch O schwingt, so kann man in der verlängerten Linie $OA = a$ immer einen Punkt B angeben, der

ganz eben so um jene Achse schwingt, als ob die ganze Masse des Körpers in diesem Punkte B vereinigt wäre. Nennt man nähmlich l die Entfernung BO dieses Punktes B von der Achse durch O, so ist

$$l = a + \frac{k^2}{a}$$

wo a die Entfernung OA des Schwerpunkts des Körpers von der Achse, und wo mk^2 das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt A gehende, mit der vorigen parallele Achse bezeichnet. Diese Gröſse l ist also die Länge eines einfachen Pendels, welches seine Schwingungen um die feste Achse durch O mit dem Körper in gleichen Zeiten vollendet, wenn der Winkel α im Anfange der Bewegung für beyde derselbe ist. Man nennt den Punkt B den Mittelpunkt des Schwungs. Der Mittelpunkt des Schwungs eines Körpers ist daher derjenige Punkt desselben, der, wenn die ganze Masse des Körpers in ihm vereinigt wäre, ganz eben so um eine feste horizontale Achse schwingen würde, wie der Körper selbst, und dieser Punkt liegt in der Verlängerung der Geraden, welche durch den Schwerpunkt des Körpers senkrecht auf die feste Achse geht, und seine Entfernung von dieser Achse ist gleich der Länge des einfachen Pendels, welches mit dem ganzen Körper gleichzeitige und gleich groſse Schwingungen macht.

III. Der gefundene Ausdruck für $l = a + \frac{k^2}{a}$ zeigt zugleich, daſs, wenn der Körper um eine feste horizontale Achse, welche durch den Schwingungsmittelpunkt B geht, schwingt, daſs dann der vorhergehende Aufhängepunkt O der Mittelpunkt der neuen Schwingungen seyn wird, d. h. daſs in jedem Körper der Aufhängepunkt und der Schwingungsmittelpunkt reciproc sind, oder daſs die Schwingungen des Körpers um jeden dieser zwey Punkte gleichzeitig seyn werden. Denn geht die neue Schwingungsachse durch B, so sey a' die Entfernung des Schwerpunktes von dieser neuen Achse, und l' die Entfernung des neuen Schwingungsmittelpunktes von derselben neuen Achse, so ist nach der oben gegebenen Gleichung

$$l' = a' + \frac{k^2}{a'}$$

Es ist aber $a' = l - a = \frac{k^2}{a}$, also auch $\frac{k^2}{a'} = a$, also auch, wenn man diese Werthe von a' und $\frac{k^2}{a'}$ in der Gleichung $l' = a' + \frac{k^2}{a'}$ substituirt, $l' = \frac{k^2}{a} + a$, das heiſst, es ist $l' = l$. Auf diese

Bemerkung gründet sich bekanntlich das unveränderliche Pendel des Cap[t]. Kater.

§. 8.

Eine Kugel des Halbmessers r sey durch einen nicht schweren Faden an eine durch O gehende fixe horizontale Achse befestigt. Sey die Distanz des Mittelpunktes A der Kugel, der zugleich ihr Schwerpunkt ist, von dem Aufhängepunkte O der Achse AO = a. Man suche die Länge OB = l des einfachen Pendels, welches mit jener Kugel gleich grofse Schwingungen in derselben Zeit macht.

Nach §. 6. III ist das Moment der Kugel $k^2 m = \frac{2}{5} r^2 m$, also $k^2 = \frac{2}{5} r^2$, also ist die gesuchte Länge des einfachen Pendels

$$l = a + \frac{2 r^2}{5 a}$$

und dieses l ist zugleich die Entfernung des Mittelpunktes B der Schwingung der Kugel von dem Aufhängepunkte O.

Wir werden weiter unten sehen, dafs die Länge L eines einfachen Pendels, welches seinen ganzen Bogen zu beyden Seiten der durch O gehenden Vertikale in t Secunden zurücklegt, gleich $L = g \cdot \frac{t^2}{\pi^2}$ ist, wo $\pi = 3{,}14159$ und $g = 30{,}1027$ Par. Fufs ist, vorausgesetzt, dafs dieser Bogen nur sehr klein ist, und nur solche kleine Bogen wollen wir hier betrachten, da sie zu den hierher gehörenden Versuchen völlig hinreichend und zugleich sehr bequem sind. Wenn also das einfache Pendel jeden seiner Bogen, oder jede Schwingung in einer Secunde mittlerer Zeit zurücklegen soll, so ist für t = 1, die Länge des einfachen Secundenpendels $L = \frac{g}{\pi^2}$. Jene Kugel oder unser zusammengesetztes Pendel wird daher seine Schwingungen ebenfalls in einer Secunde vollenden, wenn man hat,

$$a + \frac{2 r^2}{5 a} = \frac{g}{\pi^2}$$

woraus man für die Länge des Fadens erhält

$$a = \frac{g}{2 \pi^2} \pm \sqrt{\frac{g}{4 \pi^4} - \frac{2 r^2}{5}}$$

I. Wäre der Faden selbst ein Körper z. B. ein Cylinder, und ϱ der Halbmesser seiner kreisförmigen Basis, so wie b seine Länge zwischen dem Aufhängepunkte O bis zu der Peripherie der Kugel, und endlich μ seine Masse, oder sein Gewicht, so ist das Moment dieses Cylinders in Beziehung auf eine horizontale,

durch ihren mittleren Punkt C gehende Achse (nach §. 6 II) gleich

$$\mu\left(\frac{b^2}{12}+\frac{\varrho^2}{4}\right),$$

also auch in Beziehung auf die Rotationsachse durch O (nach §. 5. II) gleich

$$\mu\left(\frac{b^2}{12}+\frac{\varrho^2}{4}\right)+\mu \,.\, OC^2$$

Ist aber, wie zuvor, r der Halbmesser der Kugel, und m ihre Masse, so ist ihr Moment der Trägheit in Beziehung auf eine horizontale durch ihren Mittelpunkt D gehende Achse gleich $\frac{2}{5}\, m r^2$, also auch in Beziehung auf die Rotationsachse durch O gleich

$$\frac{2}{5}\, m r^2 + m \,.\, OD^2$$

Es ist daher das Moment der Trägheit beyder Körper zusammen, oder das Moment der Trägheit des ganzen Systemes in Beziehung auf die Rotationsachse durch O gleich

$$\mu\left(\frac{b^2}{12}+\frac{\varrho^2}{4}\right)+\mu \,.\, OC^2+\frac{2}{5}\, m r^2 + m \,.\, OD$$

oder da $OC = \frac{b}{2}$ die halbe Länge des Cylinders, und $OD = b + r$ ist

$$\mu\left(\frac{b^2}{12}+\frac{\varrho^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)+m\left(\frac{2}{5}\, r^2+(b+r)^2\right)$$

und dieses ist die Gröſse, welche wir in §. 7. II durch $ma^2 + mk^2$ bezeichnet haben, so wie das dort gebrauchte m a hier $\mu \,.\, OC + m \,.\, OD = \mu \,.\, \frac{b}{a} + m\,(b+r)$ ist. Es war aber a. a. O.

$$l=\frac{ma^2+mk^2}{ma},$$

also ist auch

$$l=\mu\,\frac{\left(\frac{b^2}{3}+\frac{\varrho^2}{4}\right)+m\left(b^2+2br+\frac{7}{5}\, r^2\right)}{\mu \,.\, \frac{b}{2}+m\,(b+r)}$$

für die Länge des einfachen Pendels, welches mit diesem Systeme dieselben Schwingungen in gleichen Zeiten macht. Setzt man in diesem Ausdrucke $b = a - r$, und $\mu = 0$, so erhält man

$$l = a + \frac{2r^2}{5 \,.\, a}, \text{ wie zuvor}$$

Für b = o verschwindet auch ϱ, und es ist $l = \frac{7r}{5}$

Für r = o ist auch m = o, also hat man für eine blosse cylindrische, an einem ihrer Endpunkte aufgehängte Stange

$$l = \frac{2b}{3} + \frac{\varrho^2}{2b}$$

§. 9.

Um die Oscillationen eines Körpers zu bestimmen, der sich sehr nahe um eine seiner freyen Achsen dreht, wenn keine äussern Kräfte auf ihn wirken, so hat man nach dem Vorhergehenden

da $N = N' = N'' = o$ ist,

$$dp + \frac{B-A}{C}\, q\, r\, dt = o$$

$$dq + \frac{C-B}{A}\, p\, r\, dt = o$$

$$dr + \frac{A-C}{B}.\, p\, q\, dt = o$$

Dreht sich also der Körper sehr nahe um die freye Achse der z', so sind q und r sehr kleine Grössen, deren Producte und Quadrate man vernachlässigen kann, also ist auch nach der ersten der vorhergehenden Gleichungen dp = o, oder p eine constante Grösse. Es bleiben also nur die zwey letzten jener Gleichungen übrig, deren Integrale die Form haben

$$\left.\begin{array}{l} q = M \operatorname{Sin}(nt + m) \text{ und} \\ r = M' \operatorname{Cos}(nt + m) \end{array}\right\} (1)$$

wo M, M' m und n constante Grössen sind, und wo man hat

$$n = p \sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}} \text{ und}$$

$$M' = -M \sqrt{\frac{A(C-A)}{B(C-B)}}$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass die Grössen n und M' nur dann mögliche oder reelle Grössen sind, wenn das Moment C der Trägheit in Beziehung auf die eigentliche Rotationsachse entweder das grösste oder das kleinste der drey Momente A, B, C ist (§. 5.). In diesem Falle sind also die Grössen q und r in der That die Sinus und Cosinus von Winkeln, die mit der Zeit zunehmen, und die Veränderungen der Rotation sind daher alle nur periodisch und in bestimmte Gränzen eingeschlossen, oder

die Rotationsachse macht nur kleine Oscillationen um ihre ursprüngliche Lage, welche letzte durch die Gleichungen $q = M \text{ Sin } m$, und $r = M' \text{ Cos } m$ gegeben ist. Da die Gröſsen q und r nach der Voraussetzung ursprünglich nur kleine Werthe haben, so sind auch M und M′ nur kleine Gröſsen, so wie also auch q und r immer nur klein bleiben, oder die wahre Rotationsachse wird immer nur sehr kleine Schwankungen um die freye Achse der z' machen. — Ist aber $(C - A)(C - B)$ negativ, oder ist C zwischen den beyden Momenten A und B, so ist n im imaginär, und der Sinus und Cosinus von $(nt + m)$ verwandelt sich in Exponentialgröſsen, die nicht mehr wie jene periodisch sind, sondern die ohne Ende mit der Zeit wachsen können. Wenn also der Körper sich nahe um die freye Achse dreht, deren Trägheitsmoment C in Beziehung auf seine Gröſse zwischen die beyden andern A und B fällt, so kann schon die geringste Störung die Rotation über alle Gränzen hinausändern; während in dem ersten Falle, wo C entweder das gröſste oder das kleinste dieser drey Momente ist, geringe Störungen auch nur geringe in enge Gränzen eingeschlossene, und bloſse periodisch wiederkehrende Aenderungen hervorbringen können. Da bey der Sonne, den Planeten und den Satelliten unseres Systems diese Stabilität der Rotation den Beobachtungen gemäſs Statt hat, so drehen sich alle diese Körper sehr nahe um diejenige ihrer freyen Achsen, für welche das Moment der Trägheit ein Gröſstes oder ein Kleinstes ist, wahrscheinlich ein Gröſstes, weil wegen der durch die Rotation erzeugten Abplattung die Rotationsachse kleiner ist, als der Durchmesser des Aequators, also auch das Moment der Trägheit in Beziehung auf die Rotationsachse gröſser ist als auf den Durchmesser des Aequators.

Um nun, nach dieser Digression, die Lage der drey freyen Achsen des Körpers im Raume zu bestimmen, wollen wir voraussetzen, das die dritte freye Achse der z' sehr nahe mit der Achse der z zusammenfällt, so daſs also ϑ nur ein sehr kleiner Winkel ist, dessen Quadrat wir vernachlässigen können. Setzt man also $s = \text{Sin } \vartheta \text{ Sin } \varphi$, und $u = \text{Sin } \vartheta \text{ Cos } \varphi$, so geben die Werthe von p, q, r im Anfange des §. 3.

$$p\,dt = d\varphi - d\psi$$
$$q\,dt = s\,d\psi - d\vartheta \text{ Cos } \varphi$$
$$r\,dt = u\,d\psi + d\vartheta \text{ Sin } \varphi$$

oder da $ds = d\vartheta \text{ Sin } \varphi + u\,d\varphi$ und $du = d\vartheta \text{ Cos } \varphi - s\,d\varphi$ ist,

$$p\,dt = d\varphi - d\psi$$
$$q\,dt = s\,(d\varphi - p\,dt) - d\vartheta \text{ Cos } \varphi$$
$$r\,dt = u\,(d\varphi - p\,dt) + d\vartheta \text{ Sin } \varphi$$

Wir haben daher:

$$d\psi = d\varphi - p\,dt$$

$$\frac{ds}{dt} = r + pu$$

$$\frac{du}{dt} = -q - ps$$

und davon sind die Integralien

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \varphi - pt - \alpha \\ s &= \beta \operatorname{Sin}(pt + \gamma) - \frac{q}{p} \\ u &= \beta \operatorname{Cos}(pt + \gamma) - \frac{r}{p} \end{aligned}\right\} (2)$$

wo α, β, γ constante Gröſsen bezeichnen. Durch die Gleichungen (1) und (2) ist die Aufgabe vollständig aufgelöſst; denn jene geben die Werthe von q und r als Functionen von t, und von diesen geben die beyden letzten die Werthe von s und u, also auch von ϑ und φ als Functionen von t, und wenn so φ bekannt ist, so ist es auch ψ durch die erste der Gleichungen (2). Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation aber ist nach dem Vorhergehenden $\vartheta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, oder einfacher $\vartheta = p$, wenn man die Quadrate von q und r vernachlässigt. Diese Geschwindigkeit ist also nahe constant.

Wenn man für den Anfang der Rotation genau $q = 0$ und $r = 0$ hat, das heiſst, wenn die wahre Rotationsachse mit der dritten freyen Achse genau zusammenfällt, so ist in dem Vorhergehenden auch $M = M' = 0$, oder, die Gröſsen q und r sind immer gleich Null, und die Rotationsachse fällt immer mit der dritten freyen Achse zusammen. Wenn also ein Körper anfängt, sich um eine seiner freyen Achsen zu drehen, so wird er sich immer um dieselbe mit einer constanten Geschwindigkeit drehen, wenn keine äussern Kräfte seine Rotation stören, und diese Eigenschaft kommt bloſs den freyen Achsen zu; denn wenn die Rotationsachse auf der Oberfläche des Körpers unveränderlich ist, so hat man $dp = 0$, $dq = 0$, $dr = 0$, und dann gehen die drey ersten Gleichungen des §. 9. in folgende über

$$\frac{B-A}{C} \cdot rq = 0, \quad \frac{C-B}{A} \cdot rp = 0, \quad \frac{A-C}{B} \cdot pq = 0$$

Sind also die Gröſsen A, B, C ungleich, so folgt aus diesen drey Gleichungen, daſs zwey von den drey Gröſsen p, q, r gleich Null seyn müssen, d. h. daſs die Rotationsachse mit einer der drey freyen Achsen zusammenfallen muſs. Sind aber zwey dieser Gröſsen A, B, C z. B. die zwey ersten einander gleich, so gehen die drey vorhergehenden Gleichungen in folgende zwey

über, $pr = 0$, und $qp = 0$, so daſs also beyden schon durch die Voraussetzung $p = 0$ genug geschieht, wo dann die Rotationsachse in der Ebene der $x' y'$ liegt, in welcher alle Durchmesser freye Achsen sind. (§. 5.) Ist endlich $A = B = C$, so geschieht den drey vorhergehenden Gleichungen immer genug, welches auch die Werthe von p, q und r seyn mögen, und in diesem Falle sind auch (§. 5.) alle Durchmesser des Körpers zugleich freye Achsen. Daraus folgt also, daſs bloſs die drey freyen Achsen des Körpers zugleich unveränderliche Rotationsachsen sind, und daſs unter ihnen nur die zwey, deren Trägheitsmomente ein Gröſstes und ein Kleinstes sind, eine stabile Rotation geben, während die dritte auch nur durch die geringste Störung die Rotation schon sehr merklich ändern kann.

§. 10.

Nimmt man an, daſs ein ursprünglicher Stoſs, dessen Richtung nicht durch den Mittelpunkt ging, die tägliche sowohl als die jährliche Bewegung des Planeten hervorgebracht habe, und ist a die Entfernung der Richtung dieses Stoſses von dem Mittelpunkte des Planeten, r sein Halbmesser und ϑ die Winkelgeschwindigkeit seiner Rotation, so ist, wenn man die Schwere g für die Einheit annimmt, nach (§. 7.) $d\vartheta = \frac{a\,dt}{\int r^2\,dm}$. Die Geschwindigkeit aber, mit welcher sich der Planet um die Sonne bewegt, ist gleich $\frac{dt}{m}$, wo m die Masse des Planeten bezeichnet, also auch die Winkelgeschwindigkeit dieser jährlichen Bewegung gleich $\frac{dt}{mR}$, wenn R die Entfernung des Planeten von der Sonne bezeichnet. Diese beyden Winkelgeschwindigkeiten, die tägliche und die jährliche verhalten sich also, wie $\frac{a}{\int r^2 dm}$ zu $\frac{1}{mR}$. Ist aber t der Sterntag und T die siderische Revolution des Planeten, so verhalten sich jene beyden Geschwindigkeiten auch wie T zu t, also ist

$$a = \frac{T}{mR} \cdot \frac{\int r^2 dm}{t}$$

Für eine Kugel des Halbmessers r ist aber das Moment der Trägheit (§. 6. III) gleich $\int r^2\,dm = \frac{2}{5} mr$, also ist auch $a = \frac{2}{5} \cdot \frac{Tr}{t.R}$ und dieses ist die Distanz a des Mittelpunktes des Planeten von der Richtung des Stoſses, welcher die doppelte Bewegung des Planeten um die Sonne und um sich selbst hervorgebracht hat.

Für die Erde ist $\frac{T}{t} = 366{,}256$, und $\frac{r}{R} = \text{Sin } 8'' \, 6$, oder $\frac{r}{R} = 0{,}000041694$, also $a = 0{,}0061$ Erdhalbmesser.

Für Jupiter ist $\frac{T}{t} = 10476$, $\frac{r}{R} = 0{,}00087$, also $a = 0{,}365$ Halbmesser des Jupiter, also a für Jupiter viel gröfser als für die Erde, daher sich auch jener viel schneller um seine Achse bewegt, als diese.

Für den Mond der Erde ist $\frac{T}{t} = 1$, und $\frac{r}{R} = 0{,}00453$, also $a = 0{,}0018$

I. Sey c und γ die Winkelgeschwindigkeit eines Planeten während einer Secunde in seiner jährlichen und täglichen Bewegung. Denkt man sich den Mittelpunkt der Sonne mit dem ihr nächsten Punkte der Oberfläche des Planeten durch eine gerade und unbiegsame Linie verbunden, so wird jeder Punkt dieser Linie, dessen Entfernung von dem Planeten z. B. gleich x ist, durch die Rotation des Planeten in einer Secunde den Bogen γx, und durch die Revolution des Planeten in derselben Zeit den Bogen Rc beschreiben, und diese beyden Bewegungen werden in entgegengesetzten Richtungen vor sich gehen. Um daher den Punkt jener Linie zu finden, für welchen jene beyden Bewegungen einander gleich sind, hat man $\gamma x = Rc$, oder $x = \frac{Rc}{\gamma}$, dafs heifst, der Punkt, welcher von der der Sonne nächsten Oberfläche des Planeten um diese Entfernung $x = \frac{Rc}{\gamma}$ absteht, wird in jedem Augenblicke während der doppelten Bewegung des Planeten in Ruhe bleiben, weil für ihn die beyden entgegengesetzten Bewegungen des Planeten sich aufheben. Es war aber $R = \frac{2}{5} \cdot \frac{Tr}{t \cdot a}$, und da überdiefs $\frac{c}{\gamma} = \frac{t}{T}$ ist, so hat man auch

$$x = \frac{2}{5} \cdot \frac{r}{a}$$

Für die Erde ist $a = 0{,}0061$, und $r = 1$, also $x = \frac{2}{5(0{,}0061)}$ $= 65{,}6$ Erdhalbmesser. Für den Mond ist eben so $x = 221$ Mondhalbmesser, oder nahe 60 Erdhalbmesser, so dafs also jener Punkt nahe in den Mittelpunkt der Erde fällt.

Nach dieser Auseinandersetzung der allgemeinen Gleichungen der Bewegung wollen wir nun zu den Anwendungen derselben auf besondere Fälle übergehen, und mit den einfachsten derselben, mit der Bewegung in geraden Linien den Anfang machen.

FÜNFTES KAPITEL.

Bewegung in geraden Linien.

§. 1.

Es ist, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, nicht schwer, für jeden besondern Fall, die Gleichungen der Bewegung zu finden. Allein diese Gleichungen sind Differenzialgleichungen der zweyten Ordnung, und ihre Integration biethet oft Schwierigkeiten dar. Wir wollen von den einfachsten Fällen anfangen, und zuerst die Bewegung in geraden Linien betrachten.

Wenn keine inneren thätigen Kräfte, sondern nur eine einen Augenblick wirkende Kraft den Körper nach der Richtung der x bewegt, so geht die allgemeine Gleichung der Bewegung (Cap. II, Gleichung III oder III') in folgende einfache über

$$\frac{d^2x}{dt^2} = o \text{ weil } X = Y = Z = y = z = \lambda = \lambda' = o \text{ ist.}$$

Das erste Integral dieser Gleichung gibt

$$\frac{dx}{dt} = a$$

für die Geschwindigkeit, und das zweyte Integral gibt

$$x = at + b$$

für den in der Zeit t zurückgelegten Raum. Da die Geschwindigkeit a constant ist, so ist die Bewegung **gleichförmig**, oder der Raum verhält sich wie die Zeit. Die Grösse b ist der vor dem Anfange der Zeit t zurückgelegte Raum. Für einen andern Körper, der sich ebenfalls gleichförmig bewegt, ist

$$x' = a't + b'$$

und um die Zeit zu finden, wenn sich beyde Körper begegnen, wird man in den beyden letzten Gleichungen $x = x'$ setzen, wodurch man für diese Zeit erhält

$$t = \frac{b'-b}{a-a'}.$$

§. 2.

Auf einen Körper wirke eine immer thätige, aber constante Kraft g nach der Richtung der x, so ist die allgemeine Gleichung seiner Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

weil X = g und Y = Z = y = z = o ist.

Das erste Integral dieser Gleichung ist

$$\frac{dx}{dt} = gt + a$$

und das zweyte

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2 + at + b$$

wo a und b constante Gröfsen sind. Die Gröfse a ist die anfängliche Geschwindigkeit, die der Körper im Anfange der Zeit t hatte, so wie b der im Anfange der Zeit t bereits zurückgelegte Raum ist. Bewegt sich also der Körper aus der Ruhe, so ist a = b = o, und man hat

$$v = \frac{dx}{dt} = gt$$

für die Geschwindigkeit, und

$$x = \frac{gt^2}{2}$$

für den in der Zeit t zurückgelegten Raum. Die Geschwindigkeit ist also der Zeit proportional, oder sie wächst wie die Zeit, oder die Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte, und der Raum verhält sich wie das Quadrat der Zeit. Endlich ist noch

$$v^2 = 2\,gx.$$

Die Kraft, mit welcher unsere Erde alle Körper aufser ihr anzieht, oder die Schwere ist eigentlich eine veränderliche Kraft, die sich, wie wir unten sehen werden, wie verkehrt das Quadrat der Entfernung des Körpers vom Mittelpunkte der Erde verhält. Allein in den geringen Entfernungen, in welche wir über die Oberfläche der Erde kommen können, und welche gegen den Halbmesser der Erde sehr klein sind, können wir die Kraft der Erde sehr nahe als constant und gleich g annehmen. Die vorhergehenden Ausdrücke gehören daher für den Fall der Körper auf der Oberfläche der Erde, und im leeren Raume, auch sind sie den darüber angestellten Beobachtungen vollkommen gemäfs.

Nimmt man die Secunde für die Einheit der Zeit, so reicht es hin, den Raum zu kennen, welchen ein Körper in der ersten Secunde seines freyen Falles zurücklegt, um alle übrigen Umstände seiner Bewegung zu erhalten. Man fand durch sehr ge-

naue Versuche, welche unten erklärt werden sollen, daſs dieser Raum für den Ort der Oberfläche der Erde, dessen geographische Breite φ ist, sey

$\frac{1}{2}g = 15{,}05137 + 0.08177 \sin^2\varphi$ Pariser Fuſs; also für die Breite $\varphi = 45°$

$$\tfrac{1}{2}g = 15.0922 \text{ Pariser Fuſs.}$$

Aus den vorhergehenden Gleichungen lassen sich alle hieher gehörenden Aufgaben auflösen. Ist z. B. ein Körper durch den Raum von x Schuhen gefallen, und man sucht die Zeit, welche er dazu brauchte, so ist diese Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

und die am Ende des Falles erlangte Geschwindigkeit ist

$$v = gt = \sqrt{2gx}$$

d. h. mit der am Ende seines Falles erlangten Geschwindigkeit würde er in gleichförmiger Bewegung in jeder Secunde den Raum gt zurücklegen.

Für Körper, welche in der Richtung der x, d. h. senkrecht aufwärts geworfen werden, ist g negativ, also

$$v = a - gt$$

die Geschwindigkeit für die Zeit t, wenn a die anfängliche Geschwindigkeit bezeichnet, und

$$x = at - \tfrac{1}{2}gt^2$$

für die in der Zeit t erreichte Höhe x. Der Körper wird so lange steigen, bis seine Geschwindigkeit Null ist. Die Zeit seines Steigens ist daher

$$t' = \frac{a}{g}$$

und die gröſste Höhe, die er erreicht, ist

$$x' = \frac{a^2}{2g}$$

Von diesem höchsten Punkte wird der Körper wieder zu fallen anfangen, und wenn er durch die ganze Höhe x′ gefallen ist, so wird er die Geschwindigkeit

$$v' = \sqrt{2gx'} = a$$

d. h. seine anfängliche Geschwindigkeit haben. Um daher einen Körper auf eine gegebene Höhe zu bringen, muſs man ihm die anfängliche Geschwindigkeit geben, welche er durch den Fall durch dieselbe Höhe erhalten würde.

§. 3.

Da aber in gröſsern Entfernungen über der Oberfläche der Erde, die Kraft der Erde oder die Schwere, nicht mehr als constant angesehen werden kann, so wollen wir nach dem Vorhergehenden annehmen, daſs sich diese Kraft X, welche nach der vertikalen Richtung der x wirkt, wie verkehrt das Quadrat der Entfernung des Körpers vom Mittelpunkte der Erde verhalte. Sey r der Halbmesser der Erde, a die anfängliche Entfernung des Körpers vom Mittelpunkte der Erde, und g die Schwere auf der Oberfläche derselben, so ist, wenn der Körper den Raum x zurückgelegt hat

$$X = \frac{g \cdot r^2}{(a-x)^2}$$

also

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{g \cdot r^2}{(a-x)^2}$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch 2 dx, so ist ihr Integral, wenn die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers Null ist

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2\,gr^2}{a} \times \frac{x}{a-x}$$

also die Geschwindigkeit des Körpers für jeden Werth von x gleich

$$v = r\sqrt{\frac{2\,gx}{a(a-x)}}.$$

Die vorhergehende Gleichung gibt zugleich

$$dt = \frac{dx}{r}\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}}$$

deren Integral, wenn x mit t zugleich verschwindet,

$$t = \frac{1}{r}\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2}\,\text{Arc. Cos}\,\frac{a-2x}{a}\right]$$

durch welche Gleichung man für jeden Werth von x den ihm entsprechenden Werth von t, oder umgekehrt erhält.

Nimmt man in diesen Ausdrücken x sehr klein gegen a, und a nahe gleich r an, so geben sie

$$v = \sqrt{2\,gx}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\,x}{g}}$$ wie im §. 2.

§. 4.

Verhält sich die anziehende Kraft X, wie die Entfernung der Körper vom Mittelpunkte der Erde, ein Fall der für alle Körper im Innern der Erde, in tiefen Bergwerken etc. statt findet, so hat man, wenn man die Bezeichnung von g und r aus §. 3. beybehält

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{g.(r-x)}{r}$$

also wenn der Körper auf der Oberfläche der Erde in Ruhe war, oder v mit x zugleich verschwindet

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{g}{r}\left(r^2 - (r-x)^2\right)}$$

für die Geschwindigkeit, und wenn t mit x verschwindet

$$t = \left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Arc Cos} \frac{r-x}{r}$$

oder

$$x = r - r \text{ Cos } t \sqrt{\frac{g}{r}}$$

für den zurückgelegten Raum. Setzt man in diesen Formeln

$$x = r$$

so ist

$$v = \sqrt{gr}$$

für die Geschwindigkeit des Körpers im Mittelpunkte der Erde, von welchem Punkte er, wenn ihn nichts hindert, bis zu dem entgegengesetzten Endpunkte des Durchmessers der Erde gehen wird, wo $x = 2r$ also $v = 0$ ist. Seine Geschwindigkeit an diesem Endpunkte wird also Null seyn, wie sie es im Anfange der Bewegung war, und der Körper wird daher wieder zu dem Mittelpunkte der Erde zurückgehen, von da zu dem Anfangspunkte steigen, und so eine unendliche Anzahl von Oscillationen, alle von gleicher Dauer, von einem Ende des Durchmessers zum andern machen.

Für $x = r$ ist die Zeit durch den Halbmesser $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, und für $x = 2r$ die Zeit einer ganzen Oscillation durch den Durchmesser gleich $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ oder gleich der doppelten Zeit durch den Halbmesser, wo $\pi = 3,1415926\ldots$

§. 5.

Auf einem in dem Punkte A ruhenden Körper wirke eine

Kraft, die sich wie die n^{te} Potenz der Entfernung derselben von dem Körper verhält. Man suche die Bewegung des Körpers.

Ist $AC = a$ die ursprüngliche Entfernung des Körpers von dem Mittelpunkte C der Kraft, und hat er in der Zeit t den Theil $AP = x$ der Linie $AC = a$ zurück gelegt, so ist am Ende dieser Zeit die Entfernung des Körpers von der Kraft, $PC = a - x$ und daher

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (a-x)^n$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch 2 dx und integrirt, so erhält man

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \text{Const} - \frac{2(a-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{2(a^{n+1} - (a-x)^{n+1})}{n+1}$$

da der Voraussetznng gemäfs die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers Null ist, oder da $\frac{dx}{dt}$ mit x zugleich verschwindet.

Dieser Werth von $\frac{dx}{dt}$ gibt also die Geschwindigkeit des Körpers für jeden Punkt $AP = x$. Ist n eine positive ungerade, also $(n+1)$ eine positive gerade Zahl, so geht der Körper, wenn er im Mittelpunkte C der Kraft, wo $x = a$ ist, angekommen ist, noch über C hinaus auf die der A entgegengesetzten Seite der geraden Linie AC, bis auf dieser Seite ebenfalls seine Entfernung CB von C gleich a, also

$$x = AB = 2a$$

wird, wo seine Geschwindigkeit verschwindet, und er daher wieder aufwärts nach C und A geht, wo seine Geschwindigkeit zum zweytenmale verschwindet, und der Körper auf diese Art seine Oscillationen um den Punkt C in der geraden Linie AB ohne Ende fortsetzt.

Für den besondern Fall $n = -1$ hat man

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2 \log \frac{a}{a-x}}$$

also ist hier die Geschwindigkeit des Körpers in C unendlich grofs, und der Körper kann nicht über C hinaus gehen, weil für $x > a$ der Werth von $\frac{dx}{dt}$ unmöglich wird. Die Zeit durch $AP = x$ aber ist

$$t = \text{Const} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\log \frac{a}{a-x}}} = \text{Const} + \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{dz}{z^2 \log z}$$

$$\text{wo } z = \frac{a}{a-x} \text{ ist.}$$

Die Zeit aber, welche der Körper braucht, den Theil AP = x seines Weges zurückzulegen, ist

$$t = \int \frac{dx \sqrt{n+1}}{\sqrt{2\,(a^{n+1} - (a-x)^{n+1})}}$$

ein Ausdruck, den man in seiner ganzen Allgemeinheit nicht anders, als durch Reihen integriren kann.

Geht die bisher betrachtete anziehende Kraft in eine abstossende über, so ist $\frac{d^2x}{dt^2} = -(a-x)^n$ also auch, wenn der Körper anfänglich im Punkte C in Ruhe war:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\,(a-x)^{n+1}}{n+1}}.$$

I. Bey der Auflösung der hieher gehörenden Differentialgleichungen ist es oft nothwendig, aufser dem completten Integrale, auch das particuläre Integral derselben zu suchen, da zuweilen nur das letzte die eigentliche Auflösung des Problemes enthalten kann. Sucht man z. B. die geradlinichte Bewegung eines Körpers, auf welchen eine verzögernde Kraft wirkt, die der Quadratwurzel der Geschwindigkeit proportional ist, so hat man für die Gleichung der Bewegung

$$\frac{dv}{dt} = -a\sqrt{v}$$

wo v die Geschwindigkeit und a eine Constante bezeichnet. Diese Gleichung hat zum completten Integrale

$$v = \left(c^{\frac{1}{2}} - \frac{at}{2}\right)^2$$

wo c eine Constante, die anfängliche Geschwindigkeit, bezeichnet. Das particuläre Integral jener Gleichung ist aber $v = 0$. Wenn daher die anfängliche Geschwindigkeit gleich Null ist, so mufs der Körper offenbar immer in Ruhe bleiben, er kann sich nicht von seinem ursprünglichen Orte entfernen, und in diesem Falle ist also die Auflösung der Aufgabe durch das particuläre Integral $v = 0$, nicht aber durch das complette $v = \frac{1}{4}\,a^2\,t^2$ gegeben. Ist die anfängliche Geschwindigkeit nicht Null, so wird der Körper sich allerdings bewegen, und diese Bewegung wird durch die Gleichung $v = (\sqrt{c} - \frac{1}{2}\,at)^2$ richtig dargestellt werden, aber nur so lange, bis seine immer abnehmende Geschwindigkeit endlich gleich Null, oder bis $t = \frac{2\sqrt{c}}{a}$ wird; von diesem Augenblicke an wird der Körper sich nicht mehr bewegen, sondern in

Ruhe bleiben, und sein Zustand wird von dieser Zeit an durch das particuläre Integral $v = o$ dargestellt werden.

II. Sucht man die geradlinichte Bewegung eines Körpers, auf welchen eine Kraft wirkt, die sich wie die n^{te} Potenz der Entfernung des Körpers von dem Mittelpunkte dieser Kraft verhält, so ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ax^n$$

wo a eine Constante bezeichnet, die positiv ist, wenn die Kraft abstoſsend, und negativ, wenn sie auf den Körper anziehend wirkt.

Nehmen wir an, daſs die Gröſse n positiv und kleiner als die Einheit sey. Das erste Integral der gegebenen Gleichung ist

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\,ax^{n+1}}{n+1}}$$

wenn im Anfange die Bewegung für $x = o$ auch die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ gleich Null ist. Integrirt man diesen Ausdruck noch einmahl, unter der Voraussetzung, daſs $x = o$ für $t = o$ ist, so hat man

$$t = \frac{1}{1-n} \cdot \sqrt{\frac{2\,(1+n)\,x^{1-n}}{a}}$$

wo der Annahme gemäſs die Gröſse $(1 - n)$ positiv ist. Allein die gegebene Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = ax^n$ hat auch noch das particuläre Integral $x = o$, und eben dieses ist es, welches unsere Aufgabe auflöſst, da der Körper offenbar in seinem anfänglichen Orte verbleiben muſs, weil in diesem Orte die Geschwindigkeit sowohl, als die auf ihn wirkende Kraft gleich Null ist.

Wäre die anfängliche Geschwindigkeit nicht Null, so würde wenigstens für einige Zeit nach dem Anfange der Bewegung dieses Paradoxon wegfallen. Wäre endlich a negativ, so wäre t vollends eine imaginäre Zeit, aus welcher sich nichts weiter schlieſsen läſst.

§. 6.

Das Vorhergehende setzte die Bewegung der Körper im freyen Raume voraus. Allein unsere Versuche werden in der Atmosphäre, also in einem widerstehenden Mittel gemacht. Man nimmt gewöhnlich an, daſs sich der Widerstand des Mittels wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhalte.

Ist also y, die Kraft der Erde, eine constante Gröſse, und m irgend ein Factor, der für denselben Körper und für dasselbe Mittel constant, aber mit der Form des Körpers und der Dichte des Mittels veränderlich ist, so hat man für frey fallende Körper

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - m v^2 \text{ oder}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - m v^2$$

also wenn t und v zugleich verschwinden

$$t = \frac{1}{2\sqrt{gm}} \log \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}$$

oder

$$e^{-2t\sqrt{gm}} = \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}} \quad \ldots \ldots (1)$$

wenn log. nat. $e = 1$ ist. Diese Gleichung gibt die Geschwindigkeit für jede Zeit. Weiter ist

$$dx = v\,dt = \frac{v\,dv}{g - m v^2}$$

also wenn v und x zugleich verschwinden

$$-2mx = \log\left(1 - \frac{m v^2}{g}\right) \ldots \ldots (2)$$

welche Gleichung den Raum für jede Geschwindigkeit, also auch, mit der Gleichung (1) für jede Zeit gibt.

Wenn die Zeit sehr grofs ist, so gibt die Gleichung (1)

$$\sqrt{g} - v\sqrt{m} = 0 \text{ oder } v = \sqrt{\frac{g}{m}}$$

oder die Bewegung der fallenden Körper im widerstehenden Mittel nähert sich immer mehr einer gleichförmigen Bewegung mit constanter Geschwindigkeit.

I. Für Körper, die im widerstehenden Mittel senkrecht aufwärts geworfen werden, ist

$$\frac{dv}{dt} = -g - m v^2$$

also wenn a die anfängliche Geschwindigkeit ist:

$$t = \frac{1}{\sqrt{gm}} \left\{ \text{Arc. tg } a\sqrt{\frac{m}{g}} - \text{Arc. tg } v\sqrt{\frac{m}{g}} \right\}$$

für die Gleichung zwischen Zeit und Geschwindigkeit. Daraus folgt, dafs auch dann, wenn die anfängliche Geschwindigkeit

a unendlich grofs ist, die Zeit des Aufsteigens eines Körpers doch nur endlich und gleich

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{gm}} \text{ ist.}$$

Ferner ist

$$dx = v\,dt = \frac{-v\,dv}{g + m v^2}$$

also wenn $v = a$ für $x = o$ ist

$$x = \frac{1}{2m} \log \frac{g + m a^2}{g + m v^2}$$

für die Gleichung zwischen Raum und Geschwindigkeit. Die gröfste Höhe x′, auf welche sich der Körper erheben kann, ist, wenn man $v = o$ setzt

$$x' = \frac{1}{2m} \log \left(1 + \frac{m a^2}{g}\right) \ldots . (3)$$

also diese Höhe im Allgemeinen desto gröfser, je kleiner m ist.

II. Wenn der Körper, nachdem er aus seinem anfänglichen Punkte A durch die Linie AO = x gefallen ist, mit der am Ende seines Falles erhaltenen Geschwindigkeit wieder von dem Punkte O, wie von einer elastischen Ebene in der Linie O A aufwärts zurückgeworfen wird, und auf diese Art seine Reflexionen in O immer wiederholt werden, so wird man diese Bewegung des Körpers auf folgende Weise bestimmen.

Die Geschwindigkeit, welche der Körper durch den Fall durch AO = x erhalten hat, ist nach der Gleichung (2) gleich

$$\sqrt{\frac{g}{m}\left(1 - e^{-2mx}\right)}$$

wo log nat e = 1 ist. Mit dieser Geschwindigkeit fängt er in O an zu steigen, und steigt bis A′. Ist OA′ = x′, so ist nach der Gleichung (3) die anfängliche Geschwindigkeit, welche ihn bis zur Höhe OA′ = x′ erheben kann, auch gleich

$$\sqrt{\frac{g}{m}\left(e^{2mx'} - 1\right)} \text{ woraus folgt}$$

$$\sqrt{\frac{g}{m}\left(1 - e^{-2mx}\right)} = \sqrt{\frac{g}{m}\left(e^{2mx'} - 1\right)} \text{ also}$$

$$e^{2mx'} = 2 - e^{-2mx}$$

durch den Fall durch A′O erhält er die Geschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{g}{m}(1-e^{-2mx'})}=\sqrt{\frac{g}{m}\left(\frac{1-e^{-2mx}}{2-e^{-2mx}}\right)}$$

und wenn er mit dieser Geschwindigkeit bis $OA'' = x''$ steigt, so ist

$$\sqrt{\frac{g}{m}\left(\frac{1-e^{-2mx}}{2-e^{-2mx}}\right)}=\sqrt{\frac{g}{m}(e^{2mx''}-1)} \text{ woraus folgt}$$

$$e^{2mx''}=\frac{3-2e^{-2mx}}{2-e^{-2mx}}.$$

durch den Fall durch $A''O$ erhält er die Geschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{g}{m}(1-e^{-2mx''})}=\sqrt{\frac{g}{m}\left(\frac{1-e^{-2mx}}{3-2e^{-2mx}}\right)}$$

und wenn er mit dieser Geschwindigkeit bis $A'''O = x'''$ steigt, so ist

$$\sqrt{\frac{g}{m}\left(\frac{1-e^{-2mx}}{3-2e^{-2mx}}\right)}=\sqrt{\frac{g}{m}(e^{2mx'''}-1)} \text{ woraus folgt}$$

$$e^{2mx'''}=\frac{4-3e^{-2mx}}{3-2e^{-2mx}} \text{ u. s. f.}$$

Es ist also die erste Höhe $AO=x=\frac{1}{2m}\log e^{2mx}$

zweyte . . . $A'O=x'=\frac{1}{2m}\log(2-e^{-2mx})$

dritte . . . $A''O=x''=\frac{1}{2m}\log\left(\frac{3-2e^{-2mx}}{2-e^{-2mx}}\right)$

und überhaupt die n^{te} Höhe $x^n=\frac{1}{2m}\log\left(\frac{n-(n-1)e^{-2mx}}{(n-1)-(n-2)e^{-2mx}}\right)$.

Die Geschwindigkeit, die der Körper am Ende des n^{ten} Falles hat, ist aber

$$=\sqrt{\frac{g}{m}\left(\frac{1-e^{-2mx}}{n-(n-1)e^{-2mx}}\right)},$$

und die Geschwindigkeit, die er am Ende des n^{ten} Steigens hat, ist gleich

$$\sqrt{\frac{g}{m}\left(\frac{1-e^{-2mx}}{(n-1)-(n-2)e^{-2mx}}\right)}$$

Auch hat man

$$x + x' = \frac{1}{2m} \log (2e^{2mx} - 1)$$

$$x + x' + x'' = \frac{1}{2m} \log (3e^{2mx} - 2) \ldots$$

und überhaupt

$$x + x' + x'' + \ldots = \frac{1}{2m} \log (ne^{2mx} - (n-1))$$

Ist die erste Höhe AO $= x$ unendlich grofs, so sind die folgenden Höhen x', x'',.... doch immer noch endlich, denn dann ist

$$x' = \frac{1}{2m} \log 2, \; x'' = \frac{1}{2m} \log \tfrac{3}{2}, \; x''' = \frac{1}{2m} \log \tfrac{4}{3} \text{ u.s.w.}$$

$$\text{und die } n^{\text{te}} \text{ Höhe} \quad x^n = \frac{1}{2m} \log \frac{n}{n-1}$$

III. Wir haben bisher vorausgesetzt, dafs der Widerstand des Mittels, in welchem sich der Körper bewegt, in allen seinen Theilen derselbe ist. Diese Voraussetzung hat aber für unsere Atmosphäre nicht statt, deren Dichte, also auch deren Widerstand mit der Entfernung von der Erde bekanntlich abnimmt. Sey D' die Dichte der Atmosphäre an der Oberfläche der Erde, und D die Dichte derselben in der Höhe x über der Erdoberfläche. Man suche die Geschwindigkeit ν eines senkrecht aufwärts geworfenen Körpers für jede Höhe x.

Nach Laplace (Méc. cél. Liv. X) ist

$$D = D' . e^{-\frac{x}{7963}}$$

Die auf einen geworfenen Körper wirkende Kraft ist aber gleich $g + MD . \nu^2$, wo M eine von der Gestalt des Körpers, und der Dichte des Mittels abhängige Constante ist. Setzt man der Kürze wegen

$$7963 = n \text{ und } MD' = m,$$

so ist also die Gleichung der Bewegung des Körpers

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g + m\nu^2 . e^{-\frac{x}{n}} = 0$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch dx, so hat man

$$\left(\text{da } \nu = \frac{dx}{dt} \text{ und } \nu d\nu = \frac{dx\, d^2x}{dt^2} \text{ ist}\right)$$

$$\nu d\nu + g\, dx + m\nu^2 . e^{-\frac{x}{n}} dx = 0$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch

$$e^{-2mn.e^{-\frac{x}{n}}}, \text{ so erhält man}$$

$$(\nu d\nu + \nu^2 . m e^{-\frac{x}{n}} dx)\, e^{-2mne^{-\frac{x}{n}}} = -g . e^{-2mne^{-\frac{x}{n}}} dx$$

Das Integral des ersten Theiles dieser Gleichung ist

$\frac{1}{2}\nu^2 . e^{-2mn.e^{-\frac{x}{n}}}$, und für den zweyten Theil kann man so verfahren. Setzt man das Integral

$\int \frac{dy}{\log y}$ als bekannt voraus, und bezeichnet es mit f (y) so sey

$$y = e^{\alpha . e^x}, \text{ also } dy = \alpha\, e.^{\alpha . e^x} e^x\, dx \text{ und } \log y = \alpha . e^x$$

$$\text{also auch } \int \frac{dy}{\log y} = \int e^{\alpha . e^x} . dx = f . e^{\alpha . e^x} .$$

Setzt man also voraus, daſs man die Funktion f (y), die gleich $\int \frac{dy}{\log y}$ ist, angeben könne, so ist

$$\int e^{-2mn.e^{-\frac{x}{n}}} dx = n\, f_{\prime} (e^{-2mn.e^{-\frac{x}{n}}})$$

Also ist auch das ganze Integral der vorigen Gleichung

$$2gn . f (e^{-2mn.e^{-\frac{x}{n}}}) = \nu.^2 e^{-2mne^{-\frac{x}{n}}} + \text{Const.}$$

Die Constante der Integration wird aber so bestimmt, daſs x = o für $\nu = c$ erscheint, wo c die anfängliche Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher der Körper geworfen wurde. Es ist daher

$$\nu^2 = c^2 . e^{-2mn(1 - e^{-\frac{x}{n}})} - 2gn . e^{2mn.e^{-\frac{x}{n}}} \times$$

$$\left[f . e^{-2mn} - f . e^{-2mn.e^{-\frac{x}{n}}} \right]$$

und durch diese Gleichung wird man die anfängliche Geschwindigkeit c bestimmen können, die nöthig ist, damit der Körper eine gegebene Höhe h erreichen kann. Soll der Körper nicht noch höher steigen, so ist $\nu = o$ für x = h, und dieses gibt

$$c^2 = 2gn . e^{2mn} . \left[f . e^{-2mn} - f . e^{-2mn.e^{-\frac{h}{n}}} \right]$$

Nimmt man keine Rücksicht auf die Veränderung der Dichte oder des Widerstandes der Atmosphäre, so ist n unendlich groſs, und die letzte Gleichung geht in folgende über:

$$h = \frac{1}{2m} \log \left(1 + \frac{mc^2}{g}\right) \text{ oder } c^2 = \frac{g}{m} (e^{2mh} - 1)$$

welches wieder die Gleichung (3) ist.

§. 7.

Wir wollen nun eben so die Bewegung eines Körpers suchen, auf welchen eine constante Kraft g in der senkrechten Richtung der z wirkt, und der gezwungen ist, sich auf einer Ebene zu bewegen. Da der Körper, wie man leicht sieht, auf jener Ebene eine gerade Linie beschreiben wird, so wollen wir, der Kürze wegen, die Ebene der xz in jene gerade Linie legen, oder die Bewegung eines Körpers suchen, welcher sich unter der Wirkung der senkrechten constanten Kraft g, in dieser geraden Linie bewegt.

Sey $L = o = z - Ax$ die Gleichung dieser Linie, so ist nach dem Vorhergehenden die Gleichung der Bewegung des Körpers

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - g\right) \delta z + \lambda (\delta z - A \delta x)$$

welche daher, da die Gröfsen δx, δz, unter einander unabhängig sind, folgenden zwey Gleichungen gleichgeltend ist:

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} - \lambda A \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} - g + \lambda \end{aligned}\right\}$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die unbestimmte Gröfse λ, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{A d^2z}{dt^2} - Ag = o$$

und diese Gleichung verbunden mit der gegebenen $L = o$, reicht hin, die Werthe von x und z für jede Zeit zu bestimmen.

Diese Gleichung ist nämlich auch, wenn $A = \operatorname{tg} \alpha$ ist

$$d^2 z + d^2 x \operatorname{Cotg.} \alpha - g dt^2 = o$$

Integrirt man diesen Ausdruck zweymal so, dafs

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = z = o \text{ für } t = o, \text{ so hat man}$$

$$dz + dx \operatorname{Cotg.} \alpha = gt\, dt \quad \text{und}$$

$$z + x \operatorname{Cotg.} \alpha = \tfrac{1}{2} gt^2$$

und diese beyden letzten Ausdrücke mit

$$dz = dx \, tg \, \alpha$$

verbunden, geben sofort

$\frac{dx}{dt} = gt . Sin \, \alpha \, Cos \, \alpha$ für die Geschwindigkeit des Körpers in der horizontalen Richtung der x

$\frac{dz}{dt} = gt \, Sin^2 \alpha$ für die Geschwindigkeit des Körpers in der vertikalen Richtung der z, und

$\sqrt{\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2}} = gt \, Sin \, \alpha$ für die Geschwindigkeit des Körpers in der Richtung seiner Bahn.

Die Integration der drey letzten Gleichungen gibt

$$x = \tfrac{1}{2} gt^2 . Sin \, \alpha \, Cos \, \alpha$$

$$z = \tfrac{1}{2} gt^2 \, Sin^2 \alpha$$

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \tfrac{1}{2} gt^2 \, Sin \, \alpha$$

für die in der Zeit t zurückgelegten Wege in der Richtung der x, der z und in der Richtung der Bahn.

Endlich ist noch der Druck des Körpers gegen die Ebene

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2} = \frac{\lambda}{Cos \, \alpha}$$

und da nach den beyden ersten Gleichungen

$$\lambda = g \, Cos^2 \alpha$$

ist, so ist der

$$Druck = g \, Cos \, \alpha$$

für $\alpha = 90°$ geben diese Gleichungen die in §. 2. entwickelten Ausdrücke für den freyen Fall der Körper, welche letzteren sich auch hier unmittelbar anwenden lassen, wenn man voraussetzt, daſs die bewegende Kraft nicht g nach der Richtung der z, sondern g Sin α nach der Richtung der schiefen Ebene ist.

§. 8.

Zwey Körper, die an den beyden Enden eines unausdehnbaren Fadens befestigt sind, und sich auf zwey Ebenen bewegen, die gegen einander unter der Gestalt eines Daches zusammengefügt sind, werden von der constanten Kraft g nach einer senkrechten Richtung bewegt. Man suche ihre Bewegung.

Ist m die Masse des ersten Körpers, und x seine veränderliche Entfernung von einem willkührlichen festen Punkte der schiefen Ebene, l die Länge der schiefen Ebene, auf welcher der Körper m sich bewegt, und h die gemeinschaftliche Höhe beyder Ebenen, so ist die Kraft, welche ihn nach der Richtung der Ebene, oder nach der Richtung der x bewegt

$$X = \frac{gh}{l}$$

Bezeichnen m' x' l' für den zweyten Körper ähnliche Gröſsen, so ist die Kraft, welche ihn nach der Richtung seiner Ebene, oder nach der Richtung der x' bewegt

$$X' = \frac{gh}{l'}$$

und daher die Gleichung der Bewegung beyder Körper

$$o = m\left(\frac{gh}{l} - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m'\left(\frac{gh}{l'} - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x'$$

Da aber nach der Bedingung der Aufgabe

$$\delta x = -\delta x' \text{ und } d^2x = -d^2x'$$

ist, so geht die vorhergehende Gleichung in folgende einfache über

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Ag$$

wo der Kürze wegen

$$A = \frac{h\,(ml' - m'l)}{(m + m')\,ll'}$$

gesetzt worden ist.

Das erste Integral dieser Gleichung ist

$$\frac{dx}{dt} = v = Agt + a$$

für die Geschwindigkeit des Körpers m nach der Richtung seiner Ebene, wenn a die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers bezeichnet.

Das zweyte Integral derselben Gleichung ist

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2 . A + at + b$$

wo b der anfängliche Werth von x ist.

Die beyden Werthe von v und t zeigen, daſs die Bewegung des Körpers m der eines frey fallenden Körpers ähnlich ist, wenn man nur in (§. 2.) Ag statt g setzt.

Die Bewegung des andern Körpers m' ist aber offenbar die entgegengesetzte des Körpers m. Ist die anfängliche Geschwindigkeit a gleich Null, und hat man zugleich $ml' = m'l$, so ist auch A gleich Null, oder beyde Körper sind im Gleichgewichte. Sie sind also im Gleichgewichte wenn die Massen (oder die Gewichte) der beyden Körper sich wie die Längen ihrer Ebenen verhalten, wie dieſs auch aus Cap. I, §. 9. III folgt.

Sind die beyden Ebenen vertikal, so sind ihre Längen gleich ihrer gemeinschaftlichen Höhe, oder $l = l' = h$, also

$$A = \frac{m - m'}{m + m'}$$

Ist daher die anfängliche Geschwindigkeit gleich Null, so ist

$$v = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot gt \text{ und } x = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot \tfrac{1}{2} gt + b$$

oder die Bewegung desto langsamer, je kleiner die Differenz $m - m'$ gegen die Summe $m + m'$ der beyden Massen ist. Diefs ist der Fall, wo beyde Gewichte durch einen Faden verbunden sind, der über eine Rolle geht.

I. Substituirt man statt dem Faden mit den beyden Gewichten eine homogene, in allen ihren Theilen gleich dicke und schwere Kette, so sey x die Länge des Theiles der Kette, der auf der ersten Ebene liegt, also $c - x$ der andere Theil, wenn c die Länge der ganzen Kette bezeichnet. Diefs vorausgesetzt wird man die vorhergehenden Gröfsen m in x und
m′ in c—x
verwandeln, und so für die gesuchte Gleichung der Bewegung der Kette erhalten

$$x\left(\frac{gh}{l} - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = (c - x)\left(\frac{gh}{l'} + \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

oder einfacher

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha^2 x + \beta = 0$$

wo der Kürze wegen

$$\alpha^2 = \frac{gh}{c\,l\,l'}(l + l') \text{ und } \beta = \frac{gh}{l'}$$

gesetzt wurde.

Das Integral dieser Gleichung ist

$$x = \frac{\beta}{\alpha^2} + a\,\varepsilon^{\alpha t} + b \,.\, \varepsilon^{-\alpha t}$$

wo ε die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und wo a und b die zwey Constanten der Integration sind.

Damit keine Bewegung, oder damit Gleichgewicht statt finde mufs seyn

$$a = b = 0 \text{ oder}$$

$$x = \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{c\,l}{l + l'} \text{ und } c - x = \frac{c\,l'}{l + l'}$$

d. h. für das Gleichgewicht sind die zwey Theile der Kette, wie die Längen der beyden Flächen, oder die beyden Endpunkte der Kette sind in derselben horizontalen Linie.

II. Wäre der Körper m durch einen Faden an einem Cylinder von kreisförmiger Basis, dessen Radius r, und m' an einem, an diesem Cylinder concentrisch befestigten Rade des Halbmessers r' angebracht, so hätte man für die Gleichung der Bewegung beyder Körper

$$m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m'\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = o$$

Da ferner

$$\frac{dx}{dt} = \nu \text{ und } \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\nu}{dt}$$

ist, wenn ν die Geschwindigkeit nach der senkrechten Richtung der x bezeichnet, so ist

$$m\left(g - \frac{d\nu}{dt}\right)\delta x + m'\left(g - \frac{d\nu'}{dt}\right)\delta x' = o$$

Da endlich die zwey Geschwindigkeiten ν und ν' in ihren Richtungen einander entgegen gesetzt sind, und da sie sich, nach der Eigenschaft der Maschine (des Rades an der Welle) wie die Halbmesser des Cylinders und des Rades verhalten, so ist

$$\frac{\nu}{\nu'} = -\frac{r}{r'}$$

also auch

$$\frac{\delta x}{\delta x'} = -\frac{r}{r'} \text{ oder } r'\delta x = -r\,\delta x'$$

oder endlich

$$r'd\nu + r\,d\nu' = o$$

also ist auch die vorhergehende Gleichung der Bewegung

$$m\left(g - \frac{d\nu}{dt}\right) = m'\left(g - \frac{r}{r'}\cdot\frac{d\nu}{dt}\right)\cdot\frac{r'}{r} = o$$

Setzt man der Kürze wegen

$$B = \frac{mr - m'r'}{mr^2 + m'r'^2}$$

so erhält man folgende zwey Gleichungen

$$d\nu = B\,gr\,.\,dt$$
$$d\nu' = -B\,gr'.\,dt\,.$$

oder beyde Körper werden wieder so bewegt, als ob auf den ersten die Kraft Br.g und auf den zweyten die Kraft —Br'.g in der senkrechten Richtung der Schwere g wirkte.

§. 9.

Man hat in den neuern Zeiten öfter die Meinung geäufsert, dafs die Aerolithen von den Vulkanen des Mondes ausgeworfen werden. Wir wollen die anfängliche Geschwindigkeit suchen, welche diese Körper haben müssen, damit sie die Attraktionssphäre der Erde erreichen können. Der gröfsern Einfachheit wegen wollen wir hier von der Bewegung des Mondes um die Erde, und von der der Erde um die Sonne abstrahiren, oder diese beyden Gestirne in Ruhe, und überdiefs den ursprünglichen Wurf der Aerolithen gegen die Erde gerichtet annehmen, so dafs man also die geradlinichte Bewegung eines Körpers zu bestimmen hat, welcher von zwey Kräften angezogen wird, die sich wie verkehrt das Quadrat ihrer Entfernungen von dem Körper verhalten.

Sey r und R der Halbmesser des Mondes und der Erde; a R die Entfernung des Vulkans, oder des Punktes, wo der Stein ausgeworfen wird, vom Mittelpunkte des Mondes, b R die Entfernung der Mittelpunkte des Mondes und der Erde.

Ist μ die Masse des Mondes, jene der Erde als Einheit angenommen, und g, g′ die Schwere auf der Oberfläche der Erde, und auf jener des Mondes, so ist

$$g : g' = \frac{1}{R^2} : \frac{\mu}{r^2} \text{ oder } g' = \frac{g \mu R^2}{r^2}$$

Ist $g = 30.21616$ Fufs, $r = \frac{3}{11} R$ und $\mu = \frac{1}{58.\bar{6}}$, so ist $g' = 6.9324$ Fufs, oder auf der Oberfläche des Mondes fallen die Körper in der ersten Sekunde durch $\frac{g'}{2} = 3.4662$ Fufs

Setzt man in diesem Ausdrucke von g′ statt r überhaupt die Gröfse y R, so ist

$$\frac{g \mu R^2}{y^2 R^2} = \frac{g \mu}{y^2}$$

die Kraft des Mondes auf einen Körper, der von seinem Mittelpunkte um die Gröfse y R entfernt ist, so wie die Kraft der Erde auf denselben Körper in demselben Augenblicke gleich $\frac{g}{(b-y)^2}$ seyn wird.

Um daher die Entfernung y eines Körpers vom Monde, in Erdhalbmessern zu erhalten, in welcher Entfernung dieser Körper von dem Monde und von der Erde gleich stark angezogen wird, hat man

$$\frac{g \mu}{y^2} = \frac{g}{(b-y)^2} \text{ woraus folgt}$$

$$y = \frac{b\left(-1+\sqrt{\frac{1}{\mu}}\right)}{\frac{1}{\mu}-1}$$

Setzt man b = 60 die Entfernung der Mittelpunkte des Mondes und der Erde, in Erdhalbmessern ausgedrückt, so ist

$$y = 6.932358 = h \text{ also}$$
$$b - y = 53.067642 \text{ Erdhalbmesser}$$

oder jener Punkt der gleichen Anziehung ist von dem Monde 6.93 und von der Erde 53.07 Erdhalbmesser entfernt.

Es sey nun überhaupt für irgend eine Zeit x die Entfernung des Aerolithen von dem Gipfel des Vulkans, also a + x seine Entfernung von dem Mittelpunkte des Mondes, und daher b — (a + x) seine Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde, so ist die Kraft, welche auf den Aerolithen wirkt gleich

$$\frac{g}{(b-a-x)^2} - \frac{g\mu}{(a+x)^2}$$

und daher die Gleichung seiner Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{(b-a-x)^2} - \frac{g\mu}{(a+x)^2}$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck durch 2 dx und integrirt, so erhält man

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2g}{b-a-x} + \frac{g\mu}{a+x} + \text{Const.}$$

für die Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$ des Aerolithen in Halbmessern der Erde ausgedrückt, also auch, wenn x = o für $v = C$, wo C die anfängliche Geschwindigkeit bezeichnet,

$$v^2 = C^2 + 2gRx\left(\frac{1}{(b-a)(b-a-x)} - \frac{\mu}{a(a+x)}\right)$$

und v ist die Geschwindigkeit des Körpers für jede Entfernung (a + x) R desselben von dem Mittelpunkte des Mondes. In dem Punkte, wo die Anziehungen des Mondes und der Erde einander gleich sind, ist offenbar $v = 0$, und überdiefs nach dem Vorhergehenden

$$a + x = h,\ b - a - x = b - h \text{ wo } h = 6.932358,$$

daher ist die anfängliche Geschwindigkeit C′, mit welchen der

Aerolith aus dem Monde geworfen werden mufs, um jenen Punkt der gleichen Anziehung zu erreichen

$$C' = \sqrt{2gR\,(h-a)\left\{\frac{\mu}{ah} - \frac{1}{(b-a)\,(b-h)}\right\}}$$

Setzt man $R = 19617000$ Par. Fufs, und $a = r = \frac{3}{11}$, wodurch man dem Krater des Vulkans an der Oberfläche des Mondes annimmt, wie diefs bey unserer Erde der Fall ist, so findet man

$$\log \frac{2gR}{b-a} = 7.29773,\ \log \frac{2gR\mu}{a} = 7.87028$$

und daher mit dem vorhergehenden Werthe von h

$$C' = \sqrt{71259967.21 - 2490864.57} = 8292.7 \text{ Pariser Fufs}$$

oder diese Geschwindigkeit C' mufs der Aerolith in der ersten Secunde haben, um wenigstens den Punkt der gleichen Attraktion zu erreichen. Eine Kanonkugel legt in der ersten Secunde den Raum von nahe 1560 Fufs zurück, also mufs der Aerolith aus dem Monde mit einer nahe fünfmal gröfsern Geschwindigkeit ausgeworfen werden, um jenen Punkt zu erreichen. Ist die anfängliche Geschwindigkeit desselben nur etwas gröfser, so wird der Körper in die Attraktionssphäre der Erde gelangen, und daher auf sie stürzen. Die Möglichkeit eines solchen Ursprunges der Aerolithen kann also nicht geläugnet werden, da die Kraft, mit welcher ein Vulkan wirkt, die einer Kanone wohl leicht mehr als fünfmal übertreffen kann.

Die Zeit endlich, die der Körper braucht, die Entfernung $a + x$ von dem Mittelpunkte des Mondes zurück zulegen, ist

$$dt = \frac{R\,dx}{v} \text{ oder}$$

$$t = \int \frac{R\,dx}{\sqrt{\left(C'^2 + 2gRx\left(\frac{1}{(b-a)\,(b-a-x)} - \frac{\mu}{a\,(a+x)}\right)\right)}}$$

wo C' nur etwas gröfser als 8292,7 seyn darf, damit $a + x > h$ werden kann. Dieses Integral läfst sich nicht in einem endlichen Ausdrucke, sondern nur annähernd durch eine Reihe geben. Als eine solche Näherung folgt daraus, dafs ein Stein, der mit der Geschwindigkeit $C' = 8273{,}73$ Fufs von dem Monde ausgeworfen wird, die Erde in etwa 64 Stunden erreichen würde.

Andere und mehr zusammengesetzte Resultate würde man erhalten, wenn man auch auf die Bewegung des Mondes und der Erde Rücksicht nehmen wollte. Wegen der ersten dieser Bewegungen hat der von dem Monde ausgeworfene Stein auch noch eine Geschwindigkeit nach der Richtung der Tangente der Mondsbahn, woraus folgt, daſs alle solche Steine, sobald sie sich weit genug von dem Monde entfernt haben, um von diesem ungleich weniger als von der Erde angezogen zu werden, einen mehr oder weniger von dem Monde gestörten Kegelschnitt um die Erde beschreiben werden, wie im folgenden gezeigt wird.

SECHSTES KAPITEL.

Bewegung in krummen Linien, wenn Kräfte wirken, deren Richtungen parallel sind.

§. 1.

Auf einen Körper, der im Anfange seiner Bewegung einen augenblicklichen Stofs erhalten hat, wirke eine immerwährende, beständige Kraft g, deren Richtung mit der senkrechten Achse der z parallel ist. Man bestimme die Bewegung des Körpers.

Da die Kräfte X und Y nach den Achsen der x und y verschwinden, und da Z = — g ist, so hat man für die allgemeine Gleichung der Bewegung

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + g\right) \delta z$$

und da die Bewegung frey ist, so ist diese Gleichung den drey folgenden gleichgeltend

$$o = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$o = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$o = \frac{d^2z}{dt^2} + g$$

Die beyden erstern geben, wenn man sie integrirt, da dt constant ist

$$dx = A t\, dt$$
$$dy = B t\, dt$$

wo A und B beständige Gröfsen sind. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Gröfse t dt, so ist

$$A dy = B dx$$

die Gleichung einer geraden Linie. Da also die Projection der

Bahn des Körpers in der Ebene der xy eine gerade Linie ist, so ist diese Bahn selbst eine ebene Curve. Nimmt man für die Ebene dieser Curve die coordinirte Ebene der xz an, so ist $y = o$, und man hat für die Gleichung der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = o$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + g = o$$

deren Integrale sind

$$x = bt + b'$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + ct + c'$$

wo b, b', c, c' constante Gröfsen sind.

Setzt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Anfangspunkt der Bewegung, und zählt man auch die Zeit t vom Anfange der Bewegung, so verschwindet t zugleich mit x und z, und man hat $b' = c' = o$

Nennt man a die anfängliche Geschwindigkeit, mit welcher der Körper durch den augenblicklichen Stofs geworfen wurde, und α den Winkel der Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Achse der x, so ist die anfängliche Geschwindigkeit nach der horizontalen Richtung der x gleich a Cos α und nach der vertikalen Richtung der z gleich a Sin α

Aber diese Geschwindigkeiten sind überhaupt

$$\frac{dx}{dt} = b$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + c$$

also ist auch $b = a \operatorname{Cos} \alpha$ und $c = a \operatorname{Sin} \alpha$, und daher, wenn man diese Werthe von b und c in den vorhergehenden Ausdrücken von x und z substituirt,

$$x = at \operatorname{Cos} \alpha$$

$$z = -\tfrac{1}{2} gt^2 + at \operatorname{Sin} \alpha$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Gröfse t, so erhält man

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{\tfrac{1}{2} gx^2}{a^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}$$

für die Gleichung der Bahn, die der Körper beschreibt. Diese Bahn ist daher die Apollonische Parabel, weil das höchste Glied derselben in Beziehung auf die Coordinaten x und y ein vollkommenes Quadrat ist.

I. Da die auf der Oberfläche der Erde von uns geworfenen Körper sehr bald wieder auf dieselbe zurückfallen, und daher während ihrer Bewegung nur solche Räume beschreiben, die gegen den Umfang der ganzen Erde als sehr klein betrachtet werden können, so ist es hier ohne merklichen Fehler erlaubt, die an sich veränderliche Kraft der Erde, die Schwere g, die nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet ist, Cap. IV, §. 1., als eine constante Kraft anzunehmen, deren Richtungen alle senkrecht auf die Oberfläche der Erde sind. Unter dieser Voraussetzung enthält das Vorhergehende die Theorie der auf der Oberfläche der Erde und im freyen Raume geworfenen Körper.

II. Die Geschwindigkeit des Körpers in irgend einem Punkte seiner Bahn ist

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2}} = \sqrt{a^2 - 2gz}.$$

Höhe des Wurfes, heifst die gröfste Höhe über der horizontalen Achse der x, die der Körper erreichen kann, und sie ist

$$\frac{a^2}{2g} . \operatorname{Sin}^2 \alpha$$

Weite des Wurfes heifst die Entfernung des Anfangspunktes von dem Punkte der Achse der x, wo die Parabel diese Achse zum zweytenmale schneidet, und sie ist

$$\frac{a^2}{g} \operatorname{Sin} 2\alpha$$

also ist die Weite am gröfsten für $\alpha = 45°$. Der Winkel α heifst die Richtung des Wurfes. Dauer des Wurfes aber heifst die Zeit, welche der Körper braucht seine ganze parabolische Bahn zu durchlaufen, und sie ist

$$\frac{2a \operatorname{Sin} \alpha}{g}.$$

Ist die anfängliche Geschwindigkeit a gegeben, und sucht man den Winkel α, damit der geworfene Körper einen Punkt treffe, dessen Coordinaten x = A und y = B, so hat man

$$B = A \operatorname{tg} \alpha - \frac{\frac{1}{2} g A^2}{a^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}$$

Ist also $k = \frac{a^2}{2g}$, so hat man

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4kB - A^2}}{A}$$

Dieser Winkel hat daher einen doppelten Werth, und für $4\,k\,B + A^2 > 4\,k^2$ sind beyde Winkel unmöglich.

III. Ist die anfängliche Geschwindigkeit a gleich Null, so hat man, wenn g negativ angenommen wird

$$x = 0,\quad z = \tfrac{1}{2}\,g t^2 \text{ und } v = \sqrt{2 g z} \text{ wie Cap. V, §. 2.}$$

IV. Wirkt überhaupt auf den Körper die constante Kraft a nach der Richtung der x, und eben so die constanten Kräfte b und c nach der Richtung der y und z, so sind die Gleichungen seiner Bewegung

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + a = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + b = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + c = 0 \end{aligned}\right\}$$

Nennt man $\alpha\,\beta\,\gamma$ die anfänglichen Geschwindigkeiten des Körpers nach den Richtungen des x y z, so sind die ersten Integralien der drey vorhergehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \alpha - at \\ \frac{dy}{dt} = \beta - bt \\ \frac{dz}{dt} = \gamma - ct \end{aligned}\right\}$$

und eben so die zweyten Integralien, wenn man voraussetzt, daſs die Werthe von x y z mit der Zeit t zugleich verschwinden

$$\left.\begin{aligned} x = \alpha t - \frac{a t^2}{2} \\ y = \beta t - \frac{b t^2}{2} \\ z = \gamma t - \frac{c t^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

Die drey vorletzten Gleichungen geben die Geschwindigkeit, und die drey letzten geben die von dem Körper nach den Richtungen der x y z durchlaufenen Räume für jede Zeit t.

Eliminirt man aus den drey letzten Gleichungen die Gröſsen t und t^2, so erhält man

$$o = Ax - By + Cz$$

wo $A = \beta c - \gamma b$, $B = \alpha c - \gamma a$ und $C = \alpha b - \beta a$ ist.

Da diese Gleichung in x y z für eine Ebene gehört, so ist die Bahn des Körpers selbst eine ebene Curve. Ist n die Neigung dieser Ebene der Bahn gegen die coordinirte Ebene der xy, und k der Winkel, welchen die Knotenlinie dieser Ebene der Bahn in der Ebene der xy mit der Achse der x bildet, so ist

$$\text{Cos}\, n = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ und tg } k = \frac{A}{B}$$

Eliminirt man aus den drey vorhergehenden zweyten Integralgleichungen die Gröſse t, so erhält man für die Projection der Bahn in den drey coordinirten Ebenen

$$o = (ay - bx)^2 + 2C(\alpha y - \beta x)$$
$$o = (az - cx)^2 + 2B(\alpha z - \gamma x)$$
$$o = (bz - cy)^2 + 2A(\beta z - \gamma y)$$

und da in diesen Gleichungen die Summe der ersten Glieder ein vollkommenes Quadrat ist, so sind alle diese Projectionen Parabeln. Aus dieser allgemeinen Auflösung kann man unmittelbar die für mehrere besondern Fälle ableiten.

Ist z. B. $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ also $C = o$, so ist die Projection der Bahn in xy eine gerade Linie. Für $\frac{a}{c} = \frac{\alpha}{\gamma}$ oder $B = o$, ist die Projection in der xz eine gerade Linie. Haben beyde Bedingungen zugleich statt, oder ist $C = B = o$, so ist auch $A = o$, und die Bahn selbst ist eine gerade Linie.

Für $\alpha = \beta = o$ ist die Projection in xy, für $\alpha = \gamma = o$ ist die Projection in xz, und für $\alpha = \beta = \gamma = o$ ist die Bahn selbst eine gerade Linie

für $a = b = o$ ist die Projection in xy eine gerade Linie;
für $a = b = \alpha = o$ liegt die Bahn in der Ebene der yz;
für $a = b = \beta = o$ in der Ebene der xz, und
für $a = b = \alpha = \beta = o$ in der Achse der z.

Der vorletzte Fall $a = b = \beta = o$ gibt für die Gleichung der Bahn in der Ebene der xz

$$z = \frac{\gamma x}{\alpha} - \frac{c x^2}{2 \alpha^2}$$

übereinstimmend mit der letzten Gleichung vor N. I

Der letzte Fall endlich $a = b = \alpha = \beta = o$ gibt für die Bewegung des Körpers in der Achse der z

$$z = \gamma t - \frac{c t^2}{2}$$

so wie für die Geschwindigkeit dieser Bewegung

$$\frac{dz}{dt} = \gamma - ct$$

übereinstimmend mit Cap. V, §. 2.

§. 2.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daſs der Körper über der Oberfläche der Erde im freyen Raume sich bewege. Allein er bewegt sich in der die Erde rings umgebenden Atmosphäre, von welcher daher der Körper einen Widerstand leiden wird. Dieser Widerstand wird in der Richtung der Tangente der Curve wirken, welche der Körper beschreibt, und man nimmt an, daſs dieser Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionirt ist, oder daſs er gleich

$$m \cdot \frac{ds^2}{dt^2} \text{ ist,}$$

wo $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ das Differential des beschriebenen Bogens, und m eine constante Gröſse bezeichnet. Zerlegt man diese Kraft in zwey andere, die den Achsen der x und der z parallel sind, so erhält man für diese äuſsern Kräfte die Ausdrücke:

$$-\frac{m\,ds^2}{dt^2} \cdot \frac{dx}{ds} \text{ und } -\frac{m\,ds^2}{dt^2} \cdot \frac{dz}{ds}$$

und daher für die Gleichungen der Bewegung, da die Bahn, wie in §. 1., eine ebene Curve ist,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{m\,ds\,dx}{dt^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{m\,ds\,dz}{dt^2} + g = 0 \end{array}\right\} \text{(I)}$$

Die erste dieser Gleichungen ist für sich integrabel, und gibt

$$\frac{dx}{dt} = C \cdot \varepsilon^{-ms}$$

wo log. nat. $\varepsilon = 1$, und C eine Constante ist. Hat aber a und α die vorige Bedeutung, und ist für den Anfangspunkt $s = 0$, so ist

$$\frac{dx}{dt} = a \operatorname{Cos} \alpha$$

also auch

$$C = a \operatorname{Cos} \alpha$$

und daher

$$\frac{dx}{dt} = a \operatorname{Cos} \alpha \,.\, \varepsilon^{-ms} \ldots\ldots (a)$$

Ist ferner p die trigonometrische Tangente des Winkels der Tangente der Bahn mit der Achse der x, oder ist $p = \frac{dz}{dx}$, also auch $\frac{dz}{dt} = p \,.\, \frac{dx}{dt}$, und dessen Differential

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{p\,d^2x}{dt^2}$$

so erhält man, wenn man diesen Werth von $\frac{d^2z}{dt^2}$ in der zweyten der Gleichungen (I) substituirt,

$$dp\, dx + g\, dt^2 = o$$

Dividirt man diese Gleichung durch das Quadrat der Gleichung (a), so erhält man

$$\frac{dp}{dx} + \frac{g \,.\, \varepsilon^{2\,ms}}{a^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} = o$$

daraus folgt, daſs die Gleichung der Bahn des Körpers

$$\frac{d^2z}{dx^2} + A \,.\, \varepsilon^{2\,ms} = o$$

ist, wo A eine constante Gröſse bezeichnet. Nimmt man aber an, daſs der Winkel α sehr klein ist, oder daſs sich der geworfene Körper nur wenig über die horizontale Achse der x erhebt, so ist auch p sehr klein, und s nahe gleich x, also die letzte Gleichung, wenn man wie in (§. 1) $k = \frac{a^2}{2g}$ setzt

$$dp + \frac{\varepsilon^{2\,mx}}{2k} = o$$

Integrirt man diesen Ausdruck unter der Voraussetzung, daſs x = o für $p = \operatorname{tg} \alpha$ ist, so hat man

$$p = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{4mk} (\varepsilon^{2\,mx} - 1)$$

vorausgesetzt, daſs die Gröſsen x und z zugleich verschwinden. Dieſs ist die Gleichung der Bahn, welche durch die Entwicklung der Gröſse $\varepsilon^{2\,mx}$ in folgende übergeht

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{2k} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{2\,mx}{1.2.3} + \frac{4\,m^2\,x^2}{1.2.3.4} + \ldots \right]$$

Läſst man daher die dritten und höhern Potenzen von x weg, so erhält man für die Gleichung der Bahn

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2a^2}$$

wie in §. 1., wo α sehr klein vorausgesetzt wird.

§. 3.

Wirkt überhaupt auf den Körper bloſs eine veränderliche Kraft Z in der Richtung der z, so sind die Gleichungen der Bewegung, da die Bahn des Körpers, wie in §. 1. eine ebene Curve ist,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= o \\ \frac{d^2z}{dt^2} + Z &= o \end{aligned}\right\}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch dx, und integrirt sie, so hat man

$$\frac{dx}{dt} = c$$

wo c eine Constante ist. Diese Gleichung zeigt, daſs die Geschwindigkeit des Körpers in Beziehung auf die horizontale Achse der x immer constant ist. Substituirt man den Werth von dt aus dieser Gleichung in die zweyte der vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{Z}{c} = o \ldots (II)$$

Diese Gleichung (II) setzt dx als constant voraus, und sie gibt, wenn Z als eine Funktion von z gegeben ist, die Gleichung der Bahn, oder sie gibt, wenn die Gleichung der Bahn zwischen x, z gegeben ist, die Kraft Z, die nöthig ist, damit der Körper die gegebene Bahn beschreibe. Das Integral der Gleichung (II) ist

$$x = A' + \int \frac{dz}{\sqrt{A - \frac{2}{c^2} \int Z\, dz}} \ldots (III)$$

I. Setzen wir voraus, daſs in einem besondern Falle die Kraft Z sich verkehrt, wie der Würfel der Entfernung z verhalte, oder daſs man habe

$$z = \frac{a^2}{(b + z)^3}$$

so hat man für die Bahn (Gleichung III)

$$x = A' + \frac{1}{Ac} \cdot \sqrt{A c^2 (b+z)^2 + a^2}.$$

welches die Gleichung einer Hyperbel ist. Für $A = 1$, hat man

$$(z+b)^2 - (x-A')^2 + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

für eine gleichseitige Hyperbel, deren halbe Achse gleich $\frac{a}{c}$ ist, und deren Coordinaten des Mittelpunktes A' und $-b$ sind.

Für $A = -1$ hat man

$$(z+b)^2 + (x-A')^2 - \frac{a^2}{c^2} = 0$$

einen Kreis dessen Halbmesser $\frac{a}{c}$ ist, und für welchen die Coordinaten des Mittelpunktes A' und $-b$ sind.

II. Für den Fall der Natur hat man

$$Z = \frac{a}{(b-z)^2}$$

also geht die Gleichung der Bahn (III) in folgende über

$$x = A' - \frac{1}{A}(b-z)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(Ab - Az - \frac{2a}{c^2}\right)$$

$$- \frac{2ac}{(Ac^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \log \left\{ c\sqrt{Ab-Az} + c\sqrt{Ab - Az - \frac{2a}{c^2}} \right\}$$

Ist $\frac{dz}{dx} = 0$, so ist $A = \frac{2a}{c^2 b}$ oder

$$x = A' - c\sqrt{\frac{bz}{2a}}(b+z) - 2ac\left(\frac{b}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot$$

$$\log \left\{ \sqrt{\frac{2a}{b}(b+z)} + \sqrt{\frac{2az}{b}} \right\}$$

welches die gesuchte Gleichung der Bahn ist. Nimmt man aber an, daſs z gegen b sehr klein ist, so hat man

$$\log\left\{\sqrt{\frac{2a}{b}(b+z)}+\sqrt{\frac{2az}{b}}\right\}$$

$$=\log\left[\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{b^{\frac{1}{2}}+\frac{z}{2\sqrt{b}}+\sqrt{z}\right\}\right]$$

$$=\log\left[(2a)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{z}{b}}\right)\right]$$

woraus folgt

$$x = A' - \frac{bc\sqrt{z}}{\sqrt{2a}} - \left(\frac{b}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}.\ 2ac\log\left[(2a)^{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{z}{b}}\right)\right]$$

Ist $z = o$, für $x = o$, so hat man

$$A' = \left(\frac{b}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}.\ 2ac.\log(2a)^{\frac{1}{2}}$$

und bemerkt man, dafs

$$\log\left[(2a)^{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{z}{b}}\right)\right] = \log(2a)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{z}{b}} \text{ ist,}$$

so hat man für die Gleichung der Bahn

$$x = -bc\sqrt{\frac{z}{2a}}$$

die Parabel, wie §. 1.

Eben so gibt die in Nro. 1 gefundene Hyperbel

$$(x-A')\,Ac = \sqrt{Ac^2(b+z)^2+a^2}$$

wenn z gegen b sehr klein ist.

$$(x-A')^2.A^2c^2 = Ab^2c^2+a^2+2Abc^2z.$$

welches ebenfalls die Gleichung einer Parabel ist.

§. 4.

Der Körper, auf welchen die constante Schwere g in der Richtung der z wirkt, sey gezwungen, auf der Oberfläche einer Kugel zu bleiben. Man suche seine Bewegung.

Ist der Mittelpunkt dieser Kugel zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten x y z, und ist r der Halbmesser der Kugel, so ist die Gleichung derselben

$$L = o = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

und die Gleichungen der Bewegung des Körpers werden seyn (nach Cap. II, §.2.)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda x=o\\ \frac{d^2y}{dt^2}+2\lambda y=o\\ \frac{d^2z}{dt^2}+2\lambda z-g=o\end{array}\right\}\ldots\ldots(IV)$$

Diese Gleichungen geben sofort den Druck, welchen der Körper gegen die Kugelfläche ausübt. Dieser Druck ist nämlich

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}=2\lambda r$$

Multiplicirt man die Gleichungen (IV) respective durch dx, dy, dz, und integrirt sie, so erhält man

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=c+2gz$$

wo c eine constante Gröſse ist.

Diese Gleichung gibt die Geschwindigkeit des Körpers in jedem Punkte seiner Bahn, die also

$$\nu=\sqrt{c+2gz}\text{ ist.}$$

Multiplicirt man die Gleichungen IV respectiv durch x y z und addirt zu ihrer Summe die letzte Gleichung, so ist

$$o=2\lambda r^2-3gz-c$$

woraus folgt, daſs der Druck des Körpers auf die Kugelfläche gleich

$$\frac{c+3gz}{r}\text{ ist.}$$

Multiplicirt man endlich die erste der Gleichungen IV durch y, und die zweyte durch x, so gibt ihre Differenz, nach der Integration

$$x\,dy-y\,dx=c.dt$$

wo c′ eine neue Constante ist.

Wir haben daher folgende drey Differential-Gleichungen der ersten Ordnung

$$\left.\begin{array}{l}x\,dx+y\,dy+z\,dz=o\\ x\,dy-y\,dx=c'.dt\\ \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=c+2gz\end{array}\right\}\ldots\ldots(V)$$

und die Integralien dieser drey Gleichungen werden die Werthe von x, y und z für jeden Werth von t, oder sie werden den Ort des Körpers auf der Kugeloberfläche für jede gegebene Zeit bestimmen. Eliminirt man aus diesen drey Integralien die Gröſse t, so erhält man zwey Gleichungen zwischen x y und z für die Curve von doppelter Krümmung, in welcher der Körper auf der Kugelfläche sich bewegt.

I. Ist im Mittelpunkte der Kugel ein unausdehnbarer und unbiegsamer Faden von der Länge r, der selbst keine Schwere hat, befestigt, an dessen andern Ende ein schwerer Punkt angebracht ist, so wird dieser Punkt, wenn er in irgend einer Richtung gestoſsen wird, durch die Kraft g der Schwere sich so bewegen, als wenn er gezwungen wäre, sich auf der Oberfläche einer Kugel des Halbmessers r zu bewegen. Die Gleichungen (IV) oder (V) enthalten daher auch die ganze Theorie der Pendeln, und was dort der Druck des Körpers auf die Fläche ist, wird hier die Spannung des Fadens seyn.

II. Man kann aber den Gleichungen (IV) noch andere Gestalten geben die zur Rechnung bequemer sind.

Bestimmt man nämlich die Coordinaten x y z durch die zwey Winkel α und β, so daſs man hat

$$x = r \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \beta$$
$$y = r \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta$$
$$z = r \operatorname{Cos} \alpha$$

und wendet man die Cap. III, §. 3. gegebene Methode an, so hat man, da nach dem Vorhergehenden r constant ist,

$$A = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2} = \frac{r^2}{2\,dt^2}(d\alpha^2 + d\beta^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha)$$

$$\text{und} \quad B = -\,gr \operatorname{Cos} \alpha$$

Dieſs vorausgesetzt ist

$$\frac{\delta A}{\delta . d\alpha} = \frac{r^2\, d\alpha}{dt^2}, \quad \frac{\delta A}{\delta . d\beta} = \frac{r^2\, d\beta \operatorname{Sin}^2 \alpha}{dt^2}$$

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = \frac{r^2\, d\beta^2 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha}{dt^2}, \quad \frac{\delta A}{\delta \beta} = \frac{\delta B}{\delta \beta} = 0$$

$$\frac{\delta B}{\delta \alpha} = gr . \operatorname{Sin} \alpha$$

also gehen die Gleichungen (V) d. a. O. in folgende über

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{d\beta^2 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha}{dt^2} + \frac{g}{r} . \operatorname{Sin} \alpha = 0 \\ &d . \left(\frac{d\beta \operatorname{Sin}^2 \alpha}{dt^2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (VI)$$

und auch diese Gleichungen, die den (IV) und (V) gleichgeltend sind, enthalten die Theorie der Pendeln.

III. Ist der Faden von einem Augenblicke zum andern in seiner Länge veränderlich, so daſs r eine Funktion von t ist, so wäre

$$A = \frac{r^2 (d\alpha^2 + d\beta^2 \,\mathrm{Sin}^2 \alpha) + dr^2}{2\, dt^2} \quad \text{und}$$

$$B = - gr . \mathrm{Cos}$$

und daher die Gleichungen des Pendels

$$\frac{d . r^2 d\alpha}{dt^2} - \frac{r^2 d\beta^2}{dt^2} \,\mathrm{Sin}\,\alpha \,\mathrm{Cos}\,\alpha + gr \,\mathrm{Sin}\,\alpha = o$$

$$d . \left(\frac{r^2 d\beta \,\mathrm{Sin}^2 \alpha}{dt^2}\right) = o$$

IV. Wäre endlich der Faden elastisch und ausdehnbar, und nennt man E die Kraft, mit welcher der Faden sich zusammen zu ziehen bestrebt, so würde A den vorigen Werth behalten, und

$$B = - gr \,\mathrm{Cos}\,\alpha + E$$

werden, oder man würde zu den Gleichungen (VI) noch folgende hinzufügen

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r}{dt^2} (d\alpha^2 + d\beta^2 \,\mathrm{Sin}^2 \alpha) + E - g \,\mathrm{Cos}\,\alpha = o$$

um die vollständige Theorie des Pendels unter dieser Voraussetzung eines elastischen Fadens zu erhalten.

§. 5.

Um diese Gleichungen zu integriren, wollen wir der gröſsern Einfachheit wegen β gleich Null voraussetzen, wodurch also auch $y = o$ wird, und das Pendel immer in derselben vertikalen Ebene der xz schwingt.

Dieſs vorausgesetzt gehen die Gleichungen (V) in folgende über

$$x\, dx + z\, dz = o$$

$$\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} = c + 2 gz$$

Eliminirt man aus ihnen die Gröſse dx, so erhält man

$$dt = \frac{- r\, dz}{\sqrt{(r^2 - z^2)(c + 2 gz)}}$$

das negative Zeichen, wenn man annimmt, daſs der Körper sich von der vertikalen Achse der z entfernt.

Hier ist offenbar r der gröfste, und $\frac{c}{2g}$ der kleinste Werth von z. Wir wollen den letzten durch a bezeichnen, so dafs $a = -\frac{c}{2g}$, und die vorhergehende Gleichung

$$dt = \frac{-r\,dz}{\sqrt{2g(r^2-z^2)(z-a)}}$$

wird. Führt man dann die Hülfsgröfse ϑ so ein, dafs

$$\operatorname{Sin}\vartheta = \sqrt{\frac{r-z}{r-a}} \text{ oder } z = r\operatorname{Cos}^2\vartheta + a\operatorname{Sin}^2\vartheta$$

wird, so wird auch

$$dz = -2\,d\vartheta\sqrt{(r-z)(z-a)}$$

und daher

$$dt = \left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\left(\frac{r-a}{2r}\right)^2 \operatorname{Sin}^2\vartheta}} \quad \ldots \text{(a)}$$

Um daher $\frac{1}{2}$ T oder die Zeit zu finden, die der Körper braucht, um von dem gröfsten Werthe von z = r, bis zu dem kleinsten z = a zu kommen, welche Zeit der halbe Schwung des Pendels heifst, wird man die letzte Gleichung von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 90$ integriren.

Es ist aber

$$\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-m^2\operatorname{Sin}^2\vartheta}}$$

$$= d\vartheta\left[1 + \frac{m^2}{2}\operatorname{Sin}^2\vartheta + \frac{1.3}{1.2.2^2}m^4\operatorname{Sin}^4\vartheta + \frac{1.3.5}{1.2.3.2^3}m^6\operatorname{Sin}^6\vartheta + \right]$$

wo man hat

$$\operatorname{Sin}^{2n}\vartheta = \frac{1}{2^{2n-1}}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}\right.$$

$$-\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\operatorname{Cos}2\vartheta$$

$$\left.+\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)}\operatorname{Cos}4\vartheta - \ldots\right]$$

Aber man sieht zugleich, dafs man hier alle Glieder der letzten Reihe, aufser dem ersten weglassen mufs, also ist für unsern Fall

$$\text{Sin}^{2n}\vartheta = \frac{1}{2^{2n}}\left(\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots\ldots(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,n}\right)$$

Setzt man daher nach der Ordnung n gleich 1, 2, 3,... so ist

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-m^2\,\text{Sin}^2\vartheta}} = d\vartheta\left[1+(\tfrac{1}{2})^2 m^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 m^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 m^6 + \ldots\right]$$

also auch, wenn man den Werth von

$$m = \frac{r-a}{2r}$$

wieder herstellt, die Zeit des ganzen Schwunges des Pendels

$$T = \pi\left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.\left[1+(\tfrac{1}{2})^2.\left(\frac{r-a}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\left(\frac{r-a}{2r}\right)^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.\left(\frac{r-a}{2r}\right)^6 + \ldots\right]$$

wo $\pi = 3.1415926\ldots$

Ist A die gröſste Winkelabweichung des Fadens von der vertikalen Achse der z, so ist

$$\text{Cos}\,A = \frac{a}{r} \text{ und } \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{r-a}{2r}}.$$

I. Dieselben Resultate würde man auch aus den Gleichungen (VI) erhalten. Schwingt ein Pendel in derselben vertikalen Ebene, so ist $\beta = 0$ und die beyden Gleichungen (VI) werden durch die einzige dargestellt,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{r}.\,\text{Sin}\,\alpha = 0$$

welche daher die ganze Theorie dieser Pendeln enthält.

II. Sind die Schwingungsbogen klein, so ist

$$T = \pi\left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.\left[1 + \frac{(r-a)^2}{16r^2}\right]$$

und wenn man selbst die ersten Potenzen von (r—a) vernachlässigen kann,

$$T = \pi.\sqrt{\frac{r}{g}},$$

woraus folgt, daſs sehr kleine Schwingungen isochron oder von gleicher Dauer sind, welches auch die Gröſse ihres, übrigens immer kleinen Bogens seyn mag. Aus der letzten Gleichung folgt:

1) Die Längen zweyer Pendeln, die in derselben Zeit ihre Schwingungen vollenden z. B. die Längen zweyer Secundenpendeln verhalten sich, wie die auf sie wirkenden Schweren; 2) die Schwingungszeiten desselben Pendels an verschiedenen Orten der Oberfläche der Erde sind wie verkehrt die Quadratwurzeln der Schweren; 3) die Schwingungszeiten der Pendeln an demselben Orte der Erdoberfläche sind wie die Quadratwurzeln der Längen, und 4) die Anzahl der Schwingungen in derselben Zeit z. B. in einem Tage, von gleich langen Pendeln verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Schweren.

§. 6.

Wirken überhaupt auf einen Körper, der sich auf einer gegebenen Fläche bewegen soll, nach den Richtungen der Achsen der x y z die Kräfte X Y Z, so hat man

$$o = \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z,$$

und wenn $\delta x = p\,\delta y + q\,\delta z$ die Gleichung der gegebenen Fläche ist, so ist die vorhergehende Gleichung folgenden beyden gleichgeltend

$$\left.\begin{aligned} o &= p\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) + \frac{d^2y}{dt^2} - Y \\ o &= q\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) + \frac{d^2z}{dt^2} - Z \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

1. Ist $X = Y = o$ und $Z = g$ die constante Schwere, so gehen diese Ausdrücke in folgende über

$$\left.\begin{aligned} o &= p\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} \\ o &= q\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} - g \end{aligned}\right\}$$

und wenn sich der Körper auf einer Kugel des Halbmessers r bewegen soll, so ist $x\,dx + y\,dy + z\,dz = o$, also $p = -\frac{y}{x}$ und $q = -\frac{z}{x}$, und daher die zwey letzten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} \\ o &= \frac{x\,d^2z - z\,d^2x}{dt^2} - gx \end{aligned}\right\}$$

deren Integrale

$$x\,dy - y\,dx = c'.dt \text{ und}$$

$$\frac{d.(x\,dz - z\,dx)}{dt^2} = gx$$

die ganze Theorie der blofs von der Schwere getriebenen Pendeln enthalten.

Soll das Pendel blofs in einer vertikalen Ebene schwingen, so sey $y = o$, und die beyden letzten Gleichungen gehen in folgende einzelne über

$$d.(x\,dz - z\,dx) = gx.dt^2$$

Ist aber $x = r \operatorname{Sin} \alpha$ und $z = r \operatorname{Cos} \alpha$, so ist auch, wenn selbst die Länge r des Pendels veränderlich ist,

$$dx = dr \operatorname{Sin} \alpha + r\,d\alpha \operatorname{Cos} \alpha \text{ und } dz = dr \operatorname{Cos} \alpha - r\,d\alpha \operatorname{Sin} \alpha,$$

also auch, wenn man diese Werthe von x, z, dx und dz in der letzten Gleichung substituirt,

$$\frac{d.(r^2\,d\alpha)}{dt^2} = -gr \operatorname{Sin} \alpha$$

oder, wenn r constant ist,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{r} \operatorname{Sin} \alpha = o$$

wie in §. 5. I.

II. Ist $Y = y = o$ und $p = q = x$, so ist die Curve, auf welcher sich der Körper bewegt $dx = x\,dz$ oder $z = \log x$, also die Logistik. Setzt man dann $X = -a^2x - a't$ und $Z = -b^2z - b't$, wo also die nach den Richtungen der x und z wirkenden Kräfte selbst von der Zeit abhängen, so sind die Gleichungen (A)

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + a^2x + a't$$

$$o = \frac{d^2z}{dt^2} + b^2z + b't$$

und ihre Integralien

$$x = \frac{A}{a} \operatorname{Sin}(at + A') - \frac{a't}{a^2}$$

$$z = \frac{B}{b} \operatorname{Sin}(bt + B') - \frac{b't}{b^2}$$

III. Ist endlich $X = Y = o$ und $Z = a$ eine constante Gröfse, so sind die Gleichungen (A)

$$o = p\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$o = q\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} - a$$

Setzt man überdiefs $p = y = o$ und $q = b$ eine constante Gröfse, so gehen die beyden letzten Gleichungen in folgende einzelne über:

$$o = b d^2x + d^2z - a dt^2$$

oder da $x = bz$ ist,

$$d^2z = \frac{a\,dt^2}{1 + b^2}$$

und diese Gleichung enthält die Theorie der Bewegung auf schiefen Ebenen. Es ist nähmlich b die Tangente des Winkels, welchen die schiefe Ebene mit der Vertikallinie z bildet. Heifst dieser Winkel α, und ist $a = \frac{g}{\mathrm{Cos}\,\alpha}$, so hat man $d^2z = g\,dt^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha$, also auch, wenn man integrirt, da z mit t verschwindet,

$$z = \tfrac{1}{2} g t^2 . \mathrm{Cos}\,\alpha$$

woraus für die Geschwindigkeit $v = \frac{dz}{dt}$ des Körpers folgt,

$$v = gt\,\mathrm{Cos}\,\alpha,$$

so dafs man hat

$$z = \tfrac{1}{2} g t^2 . \mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{v^2}{2g\,\mathrm{Cos}\,\alpha} = \tfrac{1}{2} v . t$$

§. 7.

Man kann die Gleichung, welche die Theorie des Pendels enthält, auch auf folgende sehr einfache Art finden. Nach dem Grundsatze der Erhaltung der lebendigen Kraft (Cap. III, §. 3.) ist

$$v^2 = C + 2U$$

wo v die Geschwindigkeit des Körpers, und $dU = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ ist. In unserm Falle hat man aber $X = Y = o$ und $Z = g$, also $U = gz$ und daher

$$v^2 = C + 2gz$$

Ist also wieder $x = r\,\mathrm{Sin}\,\alpha$ und $z = r\,\mathrm{Cos}\,\alpha$, so ist

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{r^2 d\alpha^2}{dt^2}$$

und daher die vorhergehende Gleichung

$$\frac{r^2\,d\alpha^2}{dt^2} = C + 2\,gr\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$

welcher Ausdruck mit den in §. 5. I gegebenen identisch ist, da sein Differential in Beziehung auf α gibt

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{r}\,\mathrm{Sin}\,\alpha = 0$$

Um die Constante C zu bestimmen, sey c die anfängliche Geschwindigkeit des Pendels, und der Winkel α des Pendels mit der Vertikale z durch den Aufhängepunkt, für den Anfang der Bewegung, gleich A, so ist $\alpha = A$ für $\frac{d\alpha}{dt} = c$, und daher $C = c^2 r^2 - 2\,gr\,\mathrm{Cos}\,A$, also auch die vorhergehende Gleichung

$$\frac{d\alpha^2}{dt^2} = c^2 + \frac{2\,g}{r}\,(\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,A)$$

Da der Winkel α nie gröſser als 180° werden kann, für welchen Fall $\mathrm{Cos}\,\alpha = -1$ ist, so folgt, daſs, wenn die anfängliehe Geschwindigkeit c gröſser als

$$\sqrt{\frac{2\,g}{r}\,(1 + \mathrm{Cos}\,A)}\ \text{ist,}$$

die Geschwindigkeit $v = \frac{d\alpha}{dt}$ des Pendels nie gleich Null werden kann, daſs also dann das Pendel nicht zwischen bestimmten Entfernungen von der Vertikale auf- und abschwingen, sondern daſs es die ganze Peripherie des Kreises, in dessen Mittelpunkte es befestiget ist, durchlaufen wird. Ist aber c kleiner als diese Gröſse, so wird die Geschwindigkeit des Pendels zu beyden Seiten der Vertikale in dem Punkte gleich Null seyn, für welchen $\mathrm{Cos}\,\alpha = \mathrm{Cos}\,A - \frac{c^2 r}{2g}$ ist, und es wird daher zwischen diesen beyden Punkten seine Schwingungen vollenden. Ist die anfängliche Geschwindigkeit $c = 0$, so ist $\mathrm{Cos}\,\alpha = \mathrm{Cos}\,A$ oder das Pendel wird auf jeder Seite der Vertikale wieder auf seinen vorhergehenden Weg zurück kehren, wenn es die Entfernung von der Vertikale erreicht, die es im Anfange seiner Bewegung hatte.

I. Um diesen letzten Fall näher zu betrachten, hat man also, wenn das Pendel in der Entfernung A seine Bewegung aus der Ruhe anfing,

$$\frac{d\alpha^2}{dt^2} = \frac{2g}{r}\,(\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,A).$$

Nimmt man an, daſs die ursprüngliche Entfernung A, also auch

α nur sehr klein ist, so hat man $\operatorname{Cos} A = 1 - \frac{A^2}{2}$ und

$\operatorname{Cos} \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, also die letzte Gleichung

$$dt = -\left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt{A^2 - \alpha^2}}$$

das negative Zeichen, weil der Winkel α abnimmt, während die Zeit t wächst. Das Integral dieser Gleichung ist, da $\alpha = A$ für $t = 0$

$$t = \left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{Arc. Cos} \frac{\alpha}{A} \text{ oder } \alpha = A \cdot \operatorname{Cos} t \sqrt{\frac{g}{r}}$$

Heifst also wie zuvor, T die Zeit eines ganzen Schwunges, während welcher das Pendel den Bogen A zweymal beschreibt, so ist

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \text{ wie §. 5. II.}$$

Endlich ist die Winkelgeschwindigkeit des Körpers in jedem Punkte seiner Bahn

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{C + 2gr \operatorname{Cos} \alpha}{r^2}}$$

oder da $C = c^2 r^2 - 2gr \operatorname{Cos} A$ ist,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{c^2 + \frac{2g}{r} (\operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Cos} A)}$$

Ist daher wieder die anfängliche Geschwindigkeit $c = 0$, so ist

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r} (\operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Cos} A)} \text{ oder abkürzend}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r} (A^2 - \alpha^2)} = A \cdot \left(\frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{Sin} t \sqrt{\frac{g}{r}}$$

und daher die wahre Geschwindigkeit selbst

$$\frac{r\,d\alpha}{dt} = A \cdot (gr)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{Sin} t \sqrt{\frac{g}{r}}$$

§. 8.

Nach diesen besondern Betrachtungen wollen wir nun wieder zu den allgemeinen Gleichungen (V) des §. 4. übergehen, und auch sie zu integriren suchen.

Die zwey ersten dieser Gleichungen sind

$$x\,dx + y\,dy = -z\,dz$$
$$x\,dy - y\,dx = c' \cdot dt$$

Erhebt man jede derselben aufs Quadrat, so gibt ihre Summe

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = z^2 dz^2 + c'^2 . dt^2$$

Es ist aber $x^2 + y^2 = r^2 - z^2$ und $dx^2 + dy^2 = (c + 2gz) dt^2 - dz^2$, also auch, wenn man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung substituirt,

$$dt = \frac{r\,dz}{\sqrt{(r^2 - z^2)(2gz + c) - c'^2}} \ldots (B)$$

Wenn man diese Gleichung, deren genaues Integral nicht gefunden werden kann, annähernd integrirt, so erhält man t als Funktion, von z oder umgekehrt, z als Funktion von t.

Aber diese Gröſse z reicht noch nicht hin, die Lage des Pendels vollkommen zu bestimmen, da sie nur die Gröſse der Projection von r in der horizontalen Ebene der xy gibt. Diese Projection ist nähmlich gleich $\sqrt{r^2 - z^2}$. Um also auch die Lage dieser Projection zu bestimmen, sey w der Winkel, welchen diese horizontale Projection von r mit der Achse der x bildet, so ist

$$x = \sqrt{r^2 - z^2}. \operatorname{Cos} w \text{ und } y = \sqrt{r^2 - z^2}. \operatorname{Sin} w$$

woraus folgt

$x\,dy - y\,dx = (r^2 - z^2)\,dw$, also auch, nach der zweyten der Gleichungen (V)

$$dw = \frac{c'\,dt}{r^2 - z^2} \ldots (C)$$

Substituirt man in dieser Gleichung den oben aus (B) gefundenen Werth von z durch t, so erhält man, wenn man sie integrirt, auch den Winkel w als Funktion von t, und da so für jede Zeit t die zwey Gröſsen z und w gegeben sind, so ist dadurch auch die Lage des Pendels für jede Zeit bestimmt.

Substituirt man dann für z und w ihre Werthe in t, so erhält man die Coordinaten x y und z als Funktionen von t, und wenn man aus diesen drey Ausdrücken von x y z die Gröſse t eliminirt, so erhält man die zwey Gleichungen der Curve, welche der Körper auf der Kugel beschreibt, so wie seine Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ nach der Richtung der drey Coordinatenachsen und seine Geschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}}$$

nach der Richtung des von ihm beschriebenen Bogens.

Man denke sich das Pendel, dessen Länge gleich r ist, in der Ebene der xz um den Winkel α von der vertikalen Achse der z entfernt, und gebe ihm in dieser ursprünglichen Lage eine Geschwindigkeit a, die senkrecht auf diese Ebene der xz ist, so hat man $\frac{dx}{dt} = 0$ und $\frac{dy}{dt} = a$, also geht die zweyte der Gleichungen (V) in folgende über $c' = ax$, oder da $x = r \text{ Sin } \alpha$ ist in folgende $c' = ar \text{ Sin } \alpha$. Ferner ist eben so $z = r \text{ Cos } \alpha$, und $\frac{dz}{dt} = 0$, also die dritte der Gleichungen (V) . . $c = a^2 - 2 gr \text{ Cos } \alpha$.

Es sey nun für irgend eine Lage des Pendels ϑ der Winkel desselben mit der Vertikale, also $z = r \text{ Cos } \vartheta$, so wird die Gleichung (B)

$$dt = \frac{-r \text{ Sin } \vartheta . d\vartheta}{\sqrt{a^2 (\text{Sin}^2 \vartheta - \text{Sin}^2 \alpha) - 2 gr \text{ Sin}^2 \vartheta (\text{Cos } \alpha - \text{Cos } \vartheta)}}$$

oder wenn man die dritten Potenzen von $\text{Sin}^2 \vartheta$ und $\text{Sin}^2 \alpha$ vernachlässiget, und der Kürze wegen $\varrho = \text{Sin}^2 \vartheta$ setzt,

$$dt = \frac{-kr . d\varrho}{a\sqrt{-\varrho^2 + \varrho (k^2 + \text{Sin}^2 \alpha) - k^2 \text{ Sin}^2 \alpha}}$$

wo $k^2 = \frac{a^2}{a^2 + gr}$ ist. Das Integral dieser Gleichung ist

$$t = \frac{kr}{2a} \text{ Arc. Cos } \frac{2\varrho - (k^2 + \text{Sin}^2 \alpha)}{\text{Sin}^2 \alpha - k^2}$$

da für $\vartheta = \alpha$ oder für $\varrho = \text{Sin}^2 \alpha$ die Gröſse t verschwindet. Es ist aber bekanntlich

$$\text{Arc. Cos } (2x^2 - 1) = 2 \text{ Arc. Cos } x$$

Setzt man daher $2x^2 - 1 = \frac{2\varrho - k^2 - \text{Sin}^2 \alpha}{\text{Sin}^2 \alpha - k^2}$, so ist

$$x = \sqrt{\frac{\varrho - k^2}{\text{Sin}^2 \alpha - k^2}}$$

und daher auch die vorhergehende Gleichung

$$t = \frac{kr}{a} \text{ Arc. Cos } \sqrt{\frac{\text{Sin}^2 \vartheta - k^2}{\text{Sin}^2 \alpha - k^2}} \quad (D)$$

I. Zur vollständigen Bestimmung der Lage des Pendels für jede Zeit muſs nun noch der Winkel w als Funktion von t gesucht werden. Es war aber nach der Gleichung (C)

$$dw = \frac{c' \, dt}{r^2 - z^2}$$

Substituirt man in dieser Gleichung die Gröſse $c' = a r \operatorname{Sin} \alpha$ und $z = r \operatorname{Cos} \vartheta$, so ist

$$dw = ar \operatorname{Sin} \alpha . \frac{dt}{r^2 \operatorname{Sin}^2 \vartheta}$$

oder da $\operatorname{Sin}^2 \vartheta = k^2 + (\operatorname{Sin}^2 \alpha - k^2) \operatorname{Cos}^2 \frac{a\,t}{kr}$ ist, wenn man der Kürze wegen $\frac{a\,t}{kr} = u$ setzt,

$$dw = \frac{k \operatorname{Sin} \alpha . du}{k^2 + (\operatorname{Sin}^2 \alpha - k^2) \operatorname{Cos}^2 u}, \text{ oder da } du = \frac{d . tg\, u}{1 + tg^2 u} \text{ ist,}$$

$$dw = \frac{1}{k} \operatorname{Sin} \alpha . \frac{d . tg\, u}{\frac{1}{k^2} \operatorname{Sin}^2 \alpha + tg^2 u}$$

und dessen Integral

$$w = \text{Arc. tg} \left(\frac{k\, tg\, u}{\operatorname{Sin} \alpha} \right)$$

Wir erhalten daher

$$w = \text{Arc. tg} \left(\frac{k\, tg \frac{at}{kr}}{\operatorname{Sin} \alpha} \right) \text{ oder } tg\, w = \frac{k}{\operatorname{Sin} \alpha} . tg \frac{at}{kr}$$

Sucht man daraus die Werthe von Sin w und Cos w, so hat man auch für die drey Coordinaten

$$x = r \operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Cos} \frac{at}{kr}$$

$$y = kr \operatorname{Sin} \frac{at}{kr}$$

$$z = r \sqrt{\operatorname{Cos}^2 \alpha + (\operatorname{Sin}^2 \alpha - k^2) . \operatorname{Sin}^2 \frac{at}{kr}}$$

und diese drey Ausdrücke geben für jede Zeit den gesuchten Ort des Körpers. Eliminirt man aus ihnen die Gröſse t, so erhält man für die von dem Körper beschriebene Bahn die beyden Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} k^2 x^2 + y^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha = k^2 r^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha \\ k^2 z^2 - y^2 (\operatorname{Sin}^2 \alpha - k^2) = k^2 r^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha \end{array} \right\} \ldots (E)$$

Daraus folgt, daſs im Allgemeinen die Projection der Bahn in der Ebene der xy eine Ellipse, und die in der Ebene der xz eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, nachdem nähmlich k kleiner oder gröſser als Sin α, das heiſst, nachdem die anfängliche Geschwindigkeit a,

kleiner oder gröſser als $\sqrt{gr}$. tg α ist. Auch zeigen dieselben Gleichungen, daſs wenn die Projection in xz eine Ellipse ist, die in yz eine Hyperbel seyn wird, und umgekehrt. Für den besonderen Fall $k = \text{Sin}\,\alpha$, das heiſst, wenn die anfängliche Geschwindigkeit $a = \sqrt{gr}.\ \text{tg}\,\alpha$ ist, wird die Projection in xy ein Kreis des Halbmessers kr seyn, und die zwey anderen Projectionen werden gerade Linien seyn, da $z = r\,\text{Cos}\,\alpha$ eine constante Gröſse ist.

Endlich ist die Geschwindigkeit v des Körpers in jedem Punkte seiner Bahn

$$v = \frac{a}{k}.\sqrt{\frac{k^2 \text{Cos}^2\alpha + (\text{Sin}^2\alpha - k^2)\,\text{Sin}^2 \frac{at}{kr}}{\text{Cos}^2\alpha + (\text{Sin}^2\alpha - k^2)\,\text{Sin}^2 \frac{at}{kr}}} \quad \ldots\ldots (F)$$

woraus man sieht, daſs diese Geschwindigkeit ihren gröſsten oder kleinsten Werth hat, wenn ϑ ein Kleinstes oder ein Gröſstes ist, d. h. wenn der Körper in dem tiefsten oder in dem höchsten Punkte seiner Bahn ist. Für den Fall $\vartheta = \text{Const}$ ist auch die Geschwindigkeit constant, und immer gleich der anfänglichen Geschwindigkeit a. Ist endlich in allen Vorhergehenden die anfängliche Geschwindigkeit a gleich Null, so erhält man für das, in einer vertikalen Ebene schwingende Pendel den Ausdruck

$$\frac{k}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + gr}} = \frac{1}{\sqrt{gr}}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{k}{a}$ in der Gleichung (D), so erhält man

$$t = \left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Arc.Cos}\,\frac{\text{Sin}\,\vartheta}{\text{Sin}\,\alpha} = \left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Arc.Cos}\,\frac{\vartheta}{\alpha},$$ wie in §. 7. I.

Ferner gehen die zwey Gleichungen (E) in folgende über,

$$x = r\,\text{Sin}\,\alpha$$
$$z = r\,\text{Cos}\,\alpha$$

oder, wenn man aus ihnen α eliminirt, in folgende einzelne

$$x^2 + z^2 = r^2$$

welches die Gleichung des Kreises ist. Endlich wird die Gleichung (F)

$$v = \sqrt{gr}.\sqrt{\frac{\text{Sin}^2\alpha.\text{Sin}^2\, t\sqrt{\frac{g}{r}}}{\text{Cos}^2\alpha + \text{Sin}^2\alpha\,\text{Sin}^2\, t\sqrt{\frac{g}{r}}}}$$

oder wenn α sehr klein ist,

$$v = \alpha . (gr)^{\frac{1}{2}} . \text{Sin}\, t \sqrt{\frac{g}{r}} \text{ wie §. 7. I.}$$

§. 9.

Betrachten wir nun auch noch die Bewegung des Pendels in einem widerstehenden Mittel. Wenn wir die Bezeichnungen des §. 7. beybehalten, also α die Abweichung des Pendels für irgend eine Zeit, und A die ursprüngliche Abweichung desselben von der Vertikale, und $s = r\,(A - \alpha)$ den in der Zeit t durchlaufenen Bogen nennen, so ist der Widerstand des Mittels, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional vorausgesetzt, gleich $m . \frac{ds^2}{dt^2}$, wo m eine constante Gröſse ist, die von der Dichte des Mittels und von der Dichte und Gestalt des bewegten Körpers abhängt. Bewegt sich also das Pendel in einer senkrechten Ebene, so ist die Kraft, welche auf dasselbe in jedem Augenblicke nach der Richtung der Tangente der beschriebenen Curve wirkt, gleich $g \,\text{Sin}\, \alpha - m . \frac{ds^2}{dt^2}$, und man hat daher für die Gleichung der Bewegung des Pendels

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g \,\text{Sin}\, \alpha - m . \frac{ds^2}{dt^2},$$

oder wenn man für s seinen Werth $r\,(A - \alpha)$ setzt,

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{g}{r} \,\text{Sin}\, \alpha + mr . \frac{d\alpha^2}{dt^2}$$

Da aber diese Gleichung nicht genau integrirt werden kann, so wollen wir bemerken, daſs α eine Funktion von A ist, die, wenn diese beyden Gröſsen nur klein sind, in folgende Form aufgelöſst werden kann

$$\alpha = PA + QA^2 + RA^3 + \ldots$$

wo P, Q, R .. Funktionen der Zeit t seyn werden. Um diese Funktionen zu bestimmen, wird man diesen Werth von α in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ substituiren, und dann die Coefficienten derselben Potenz von A, jeden für sich, gleich Null setzen, wodurch man so viele Gleichungen erhalten wird, als man unbekannte Gröſsen P Q R .. hat, aus welchen Gleichungen man daher auch diese unbekannten Gröſsen durch Elimination bestimmen kann. Geht man bloſs bis zu dem zweyten Gliede der oben aufgestellten Reihe fort, so erhält man

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A.\frac{d^2P}{dt^2} + A^2.\frac{d^2Q}{dt^2}$$

$$\text{Sin}\ \alpha = AP + A^2Q$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A^2.\frac{d^2P}{dt^2}$$

und wenn man diese Werthe in der ersten unserer Gleichungen substituirt, und die Faktoren von A und A^2 gleich Null setzt, so erhält man folgende zwey Gleichungen

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -\frac{gP}{r}\ \text{und}\ \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{gQ}{r} + mr.\frac{dP^2}{dt^2}$$

Die erste dieser Gleichungen gibt, da im Anfange der Bewegung $t = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0$, $\alpha = A$ und $P = 1$ ist,

$$\frac{dP}{dt} = -\left(\frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}.\ \text{Sin}\ t\sqrt{\frac{g}{r}}\ \text{und}$$

$$P = \text{Cos}\ t\sqrt{\frac{g}{r}}$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{dP}{dt}$, in dem vorhergehenden Ausdrucke für $\frac{d^2Q}{dt^2}$, so erhält man

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{gQ}{r} + \frac{gm}{2} - \frac{gm}{2}\ \text{Cos}\ 2\ t\sqrt{\frac{g}{r}}$$

von welcher Gleichung das Integral ist,

$$Q = C\ \text{Cos}\left(t\sqrt{\frac{g}{r}} + C'\right) + \frac{mr}{2} + \frac{mr}{6}\text{Cos}\ 2\ t\sqrt{\frac{g}{r}}$$

und da man für den Anfang der Bewegung hat $t = Q = \frac{dQ}{dt} = 0$, so sind die zwey Constanten der Integration $C = -\frac{2\,mr}{3}$ und $C' = 0$, also auch

$$Q = -\frac{2\,mr}{3}\ \text{Cos}\ t\sqrt{\frac{g}{r}} + \frac{mr}{2} + \frac{mr}{6}\text{Cos}\ 2\ t\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Da so P und Q bestimmt ist, so hat man

$$\alpha = PA + QA^2\ \text{oder}$$

$$\alpha = (A - \tfrac{2}{3}\,mr\,A^2)\,\mathrm{Cos}\,t\sqrt{\frac{g}{r}} + \frac{mr\,A^2}{2}$$

$$+ \frac{mr\,A^2}{6}\,\mathrm{Cos}\,2\,t\sqrt{\frac{g}{r}} \;.\;.\;.\;.\;(G)$$

wodurch also die Ausweichung α des Pendels für jede Zeit t gegeben ist. Die Geschwindigkeit des bewegten Körpers aber ist $v = -\frac{r\,d\alpha}{dt}$ oder

$$v = \left(A - \frac{2\,mr\,A^2}{3}\right)(gr)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Sin}\,t\sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$+ \frac{mr\,A^2.(gr)^{\frac{1}{2}}}{3}\,\mathrm{Sin}\,2\,t\sqrt{\frac{g}{r}} \;.\;.\;.\;.\;(H)$$

Für m = o oder für die Bewegung des Pendels in freyen Raume hat man

$$\alpha = A\,\mathrm{Cos}\,t\sqrt{\frac{g}{r}} \text{ und}$$

$$v = A.(gr)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Sin}\,t\sqrt{\frac{g}{r}}, \text{ wie in §. 7.}$$

I. Um die Zeit T′ des halben absteigenden Schwunges zu bestimmen, hat man $\alpha = o$, also wird der vorhergehende Ausdruck von α

$$o = (1 - \tfrac{2}{3}\,mr\,A)\,\mathrm{Cos}\,T'\sqrt{\frac{g}{r}} + \frac{mr\,A}{2} + \frac{mr\,A}{6}\,\mathrm{Cos}\,2\,T'\sqrt{\frac{g}{r}}$$

Wäre die Gröſse A genau gleich Null, so gäbe diese Gleichung

$$\mathrm{Cos}\,T'\sqrt{\frac{g}{r}} = o \text{ oder } T'\sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ist also die erste Ausweichung A des Pendels nur klein, so kann

$$\text{man } T'\sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{\pi}{2} + x \text{ setzen,}$$

wo also x ebenfalls eine sehr kleine Gröſse ist, deren Quadrate und Produkte mit A man vernachlässigen kann. Substituirt man diesen Werth von $T'\sqrt{\frac{g}{r}}$ in der vorhergehenden Gleichung, so erhält man

$$o = -(1 - \tfrac{2}{3} mrA) \operatorname{Sin} x + \frac{mrA}{2} - \frac{mrA}{6} \operatorname{Cos} 2x$$ oder

$x = \frac{mrA}{3}$, also ist die gesuchte Zeit des halben absteigenden Schwunges

$$T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} + \frac{mrA}{3}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Um aber die Zeit T eines ganzen Schwunges zu erhalten bemerke man, daſs die Geschwindigkeit v im Anfange und am Ende der Zeit T gleich Null seyn muſs. Der oben gegebene Ausdruck (H) von v wird aber gleich Null für $t = o$ und für

$t\sqrt{\frac{g}{r}} = \pi$, weil in dem letzten Falle sowohl

$\operatorname{Sin} t\sqrt{\frac{g}{r}}$ als auch $\operatorname{Sin} 2t\sqrt{\frac{g}{r}}$ gleich Null ist.

Substituirt man daher in diesem Ausdrucke $t\sqrt{\frac{g}{r}} = \pi$ statt t die Zeit T des ganzen Schwunges, so erhält man

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} \ldots . (J)$$

wie in dem leeren Raume §. 7. I. Heiſst daher endlich T'' die Zeit des halben aufsteigenden Schwunges, so ist $T = T' + T''$, oder wenn man in dieser Gleichung die vorhergehenden Werthe von T und T' substituirt,

$$T'' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} - \frac{mrA}{3}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Setzt man also der Kürze wegen $k = rA$, so hat man

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},\ T' = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{km}{3}\right)\sqrt{\frac{r}{g}},\ T'' = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{km}{3}\right)\sqrt{\frac{r}{g}}$$

oder die Zeit des ganzen Schwunges in dem widerstehenden Mittel ist gleich der Zeit des ganzen Schwunges in dem freyen Raume; die Zeit des halben absteigenden Schwunges aber wird durch den Widerstand um die Gröſse

$\frac{km}{3}\sqrt{\frac{r}{g}}$ vermehrt, und die Zeit des halben aufsteigenden Schwunges wird um dieselbe Gröſse vermindert.

II. Die Gröſse des Schwunges aber, oder die Amplitude, die Ausweichung des Bogens zu beyden Seiten der Vertikale wird durch das widerstehende Mittel constant vermindert. Denn während der Zeit T′ des ersten halben Schwunges geht das Pendel von seinem höchsten zu seinem tiefsten Punkt, also durch den Winkel A. Während der Zeit des ersten ganzen Schwunges aber geht es durch einen Winkel, den man erhält, wenn man in der Gleichung (G) für t die Gröſse

$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, also für $t \sqrt{\frac{g}{r}}$ die Gröſse π setzt, also durch den Winkel

$$\alpha = -\left(A - \frac{2\,mr}{3} A^2\right) + \frac{mr\,A^2}{2} + \frac{mr\,A}{6} = -\left(A - \tfrac{4}{3}\,mr\,A^2\right)$$

woraus folgt, daſs die Amplitude des zweyten halben Schwunges durch den Widerstand um die Gröſse $\frac{4}{3}\,mr\,A^2$, also sein Bogen um die Gröſse $\frac{4}{3}\,mr^2\,A^2 = \frac{4}{3}\,mk^2$ vermindert wird. Ist daher $k = rA$ der Bogen des ersten halben Schwunges, so ist der Bogen des zweyten halben Schwunges $k - \frac{4}{3}\,mk^2$, des dritten $k - 2 \cdot \frac{4}{3}\,mk^2$, des vierten $k - 3 \cdot \frac{4}{3}\,mk^2$ u. f., so daſs also die Ausweichungen des Pendels immer abnehmen, bis sie endlich völlig unmerklich werden; aber so lange sie noch bestehen, sind doch die Zeiten der ganzen Schwingungen immer von derselben Dauer, denn da, nach der Gleichung (F) die Dauer des ersten ganzen Schwunges von der Ausweichung seines Bogens ganz unabhängig ist, so sind es auch alle übrigen.

§. 10.

Ueberhaupt hat man für die Bewegung in krummen Linien, die in der Ebene der xz liegen, wenn bloſs eine veränderliche Kraft Z in der Richtung der Achse der z wirkt, nach dem Grundsatze der Erhaltung der lebendigen Kräfte (Cap. III §. 3.)

$$v^2 = C^2 - 2\int Z\,dz.$$

Diese Gleichung mit der gegebenen Gleichung der Curve und mit der bekannten $ds = v \cdot dt$ (Cap. II §. 1) verbunden, wird hinreichen, die Bewegung des Körpers zu bestimmen.

Nimmt man nähmlich an, daſs die Gleichung der Curve ist

$$o = dL = \left(\frac{dL}{dx}\right) dx + \left(\frac{dL}{dz}\right) dz$$

so hat man nach dem Vorhergehenden für die Gleichungen der Bewegung

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \left(\frac{dL}{dx}\right)$$

$$o = \frac{d^2z}{dt^2} + \lambda \left(\frac{dL}{dz}\right) + Z$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch dx, und die zweyte durch dz, so gibt ihre Summe, wenn man sie integrirt,

$$o = \frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} + 2\int Z\,dz - C^2$$

wo C eine constante Gröſse bezeichnet, oder da $\sqrt{\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2}}$ der bekannte Ausdruck der Geschwindigkeit v ist

$$v^2 = C^2 - 2\int Z\,dz$$

wie zuvor. Ist ferner $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ das Element des Bogens der Curve, so ist $ds = v\,dt$, also auch

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{C^2 - 2\int Z\,dz}},$$

und diese zwey Gleichungen, verbunden mit der Gleichung $L = o$ der gegebenen Curve werden die Bewegung des Körpers vollständig bestimmen.

I. Ist z. B. diese Curve eine Cyclois, und a der Durchmesser des Erzeugungskreises derselben, so ist ihre Gleichung

$$s^2 = 4az \text{ oder } ds = dz.\sqrt{\frac{a}{z}}.$$

Ist daher die Kraft $Z = g$ beständig, so ist die Geschwindigkeit des Körpers, der sich in der Cyclois bewegt,

$$v = \sqrt{C^2 - 2gz}$$

wo C die anfängliche Geschwindigkeit bezeichnet; und die Zeit durch den Bogen, der zu der Ordinate z gehört, ist

$$t = \int \frac{a^{\frac{1}{2}}.dz}{\sqrt{C^2 z - 2gz^2}} = \left(\frac{2a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}. \text{ Arc. tang } \sqrt{\frac{2gz}{C^2 - 2gz}}$$

Nennt man daher T die Zeit von dem Anfange der Bewegung bis zu dem Augenblicke, wo der Körper seine gröſste Tiefe erreicht, so wird T das vorhergehende Integral zwischen den Gränzen $z = o$ und $z = \frac{C^2}{2g}$ seyn, oder man wird haben:

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$$

wo $\pi = 3.141592....$ ist. Diese Zeit T des ganzen Niederganges in der Cyclois ist daher von dem Werthe von z unabhängig, oder, in welchem Punkte der Curve auch der Körper seine Bewegung anfängt, immer wird er in derselben Zeit bis zu dem untersten Punkte der Cyclois kommen. Wegen dieser Eigenschaft heifst diese Curve auch die Tautochrone.

II. Indem Huyghens diese merkwürdige Eigenschaft der Cyclois mit der andern bekannten verband, dafs nämlich die Evolute der Cyclois wieder sie selbst, nur in verkehrter Lage ist, konnte er seinen Pendeln, die an einen flexiblen Faden zwischen zwey Cycloiden, an welche sich der Faden bey jeder Schwingung aufwand, befestigt waren, dahin bringen, dafs der an den Faden befestigte Körper selbst eine Cyclois beschrieb, und daher seine selbst endlichen Schwingungen in gleichen Zeiten vollendete. In den neuern Zeiten hat man aus praktischen Rücksichten die Bewegung im Kreise mit sehr kleinen Schwingungen vorgezogen, da diese nach Nro. 1. ebenfalls isochron sind.

Um aber auch zu untersuchen, ob jene Curve die einzige Tautochrone im leeren Raume ist, wollen wir annehmen, dafs die Gleichung der Tautochronen überhaupt sey

$$s = Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + \ldots$$

wo A B C.... α β γ... unbestimmte Gröfsen sind. Wenn die Gröfsen s und z beyde von dem untersten Punkte der Curve gezählt werden, so hat man zugleich $s = 0$ und $z = 0$, also müssen die Exponenten α, β, γ... positiv, und keiner von ihnen darf gleich Null seyn. Differentiirt man aber diesen Ausdruck, und substituirt den so erhaltenen Werth in der Gleichung (Nro. III)

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(h-z)}}$$

wo $C^2 = 2gh$ gesetzt wurde, so erhält man

$$dt = \frac{-A\alpha}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{z^{\alpha-1}dz}{\sqrt{h-z}} - \frac{B\beta}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{z^{\beta-1}dz}{\sqrt{h-z}} - \ldots\ldots$$

und um die Zeit zu erhalten, in welcher der Körper von $z = h$ bis $z = 0$ geht, wird man das Integral dieser Gleichung zwischen denselben Gränzen, oder was dasselbe ist, zwischen den Gränzen $u = 0$ und $u = 1$ nehmen, wenn man $z = hu$ setzt. Dadurch erhält man

$$T = \frac{\alpha AA'}{\sqrt{2g}} \cdot h^{\alpha-\frac{1}{2}} + \frac{\beta BB'}{\sqrt{2g}} \cdot h^{\beta-\frac{1}{2}} + \frac{\gamma CC'}{\sqrt{2g}} h^{\gamma-\frac{1}{2}} + \ldots$$

wenn man der Kürze wegen annimmt

$$A' = -\int \frac{u^{\alpha-1}\,du}{\sqrt{1-u}},\ B' = -\int \frac{u^{\beta-1}\,du}{\sqrt{1-u}},\ C' = -\int \frac{u^{\gamma-1}\,du}{\sqrt{1-u}} \text{ etc.}$$

Man mufs hier bemerken, dafs von diesen Gröfsen A', B', C' keine gleich Null seyn kann, denn z. B. die Gröfse A' ist die Summe der Werthe von $\frac{u^{\alpha-1}\,du}{\sqrt{1-u}}$ zwischen den Gränzen $u = 0$ und $u = 1$, und da diese Function von u zwischen diesen beyden Gränzen ihr Zeichen nicht ändert, so kann auch die Summe jener Werthe, d. h. so kann auch der Werth A' nicht Null seyn, und dasselbe gilt ebenfalls von den Gröfsen B' C'..... Ferner ist klar, dafs der Werth von T nicht unabhängig von h seyn kann, wenn nicht alle Glieder von T gleich Null sind, dasjenige ausgenommen, in welchen der Exponent von h selbst gleich Null ist. Nehmen wir daher an, dafs dieses das erste Glied ist, d. h. nehmen wir an, dafs $\alpha = \frac{1}{2}$ ist, so mufs, damit das zweyte Glied verschwinde, die Gröfse $\beta B B' = 0$ seyn, d. h. es mufs $B = 0$ seyn, weil nach dem Vorhergehenden weder B' noch β gleich Null seyn kann. Eben so findet man $C = 0$, $D = 0$... und der Werth von s für die Tautochrone ist daher

$$s = A\sqrt{z}$$

welches wieder die Gleichung der Cyclois ist. Diese Curve ist daher auch die einzige Tautochrone im leeren Raume.

§. 11.

Soll der Körper, auf den blofs ein äufserer augenblicklicher Stofs, ohne der Schwere wirkt, sich in der Peripherie eines Kreises des Halbmessers r bewegen, so ist, wenn dieser Kreis in der Ebne der xy liegt

$$L = 0 = r^2 - x^2 - y^2$$

und die Gleichungen der Bewegung sind

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda x \\ 0 &= \frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda y \end{aligned}\right\} \text{(VII.)}$$

Der Druck des Körpers gegen seine Bahn ist

$$D = \lambda\sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\lambda r$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (VII) durch dx, und die zweyte durch dy, so gibt ihre Summe, wenn man sie integrirt, und bemerkt, dafs $x\,dx + y\,dy = 0$ ist:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = c \ldots . (a)$$

wo c eine Constante ist, und woraus folgt, daſs die Geschwindigkeit $v = c^{\frac{1}{2}}$ oder constant ist. Multiplicirt man die erste der Gleichungen (VII) durch x und die zweyte durch y, so gibt die Summe dieser Produkte

$$\frac{x d^2x + y d^2y}{dt^2} + 2\lambda r^2 = 0$$

und da $x d^2x + y d^2y + dx^2 + dy^2 = 0$ ist,

so ist auch

$$2\lambda r^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} \text{ oder } 2\lambda r^2 = c$$

woraus folgt, daſs der Druck des Körpers senkrecht auf die Peripherie des Kreises gleich

$$D = 2\lambda r = \frac{c}{r} = \frac{v^2}{r} \ldots . \text{(Kap. III §. 3. I) ist.}$$

Multiplicirt man endlich die erste der Gleichungen (VII) durch y, und die zweyte durch x, so gibt ihre Differenz, wenn man sie integrirt

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{dt} = c' \ldots . (b)$$

wo c' eine zweyte Constante ist. Eliminirt man aus den Gleichungen (a), (b) die Gröſse dt, so erhält man

$$\frac{c'^2}{c} = \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{dx^2 + dy^2} = r^2 \text{ also auch}$$

$$v = \frac{c'}{r}$$

die zwey Constanten c und c' hängen also so von einander ab, daſs man hat

$$c' = r\sqrt{c}$$

Um die Zeit zu finden, in welcher der Körper den Bogen des Kreises zurücklegt, zu dem die Abscisse x gehört, hat man aus der Gleichung (a)

$$c.\,dt = \frac{r^2\,dx^2}{r^2 - x^2} \text{ oder}$$

$$dt = \frac{r}{\sqrt{c}} . \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

oder endlich

$$t = \frac{r}{\sqrt{c}} \cdot \text{Arc. Sin} \frac{x}{r}$$

die Zeit durch die ganze Peripherie ist daher

$$T = \frac{2r\pi}{v} \; .\;.\;.\;.\; (c)$$

und der Druck des Körpers auf seine Bahn

$$D = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \; .\;.\;.\;.\; (d)$$

wo $\pi = 3{,}1415926\ldots$ ist

I. Eliminirt man aus den beyden letzten Gleichungen die Gröſse T, so ist wieder

$$D = \frac{v^2}{r} \text{ wie zuvor.}$$

Bey Körpern also, die sich im Kreise bewegen, verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Wurzeln aus den Produkten der Halbmesser in die Kräfte, und die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Halbmesser dividirt durch die Kräfte, da hier der Druck D als die bewegende Kraft, aus welcher er entstanden ist, betrachtet werden kann.

Nimmt man an, daſs die Kraft sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung r verhalte, so ist $D = \frac{A}{r^2}$, wo A eine constante Gröſse ist, also auch $T^2 = \frac{4\pi^2}{A} \cdot r^3$ oder dann sind die Quadrate der Umlaufszeiten, wie die Würfel der Halbmesser.

Um die Geschwindigkeit zu erhalten, mit welcher ein Körper auf der Oberfläche der Erde horizontal geworfen werden müſste, um einen Kreis um die Erde zu beschreiben, so ist der Halbmesser dieses Kreises gleich 862 geographische Meilen, oder $r = 19678598$ Par. Fuſs, die Meile zu 22829 Fuſs gezählt. Der senkrechte, gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtete Druck ist die Schwere, also (nach Cap. V §. 2.)

$$D = 30{,}103 \text{ Fuſs}$$

und daher die gesuchte Geschwindigkeit des Körpers in einer Secunde $v = \sqrt{Dr} = 24338{,}96$ Fuſs. Eine Kanonen Kugel legt aber in der ersten Secunde noch nicht 700 Fuſs zurück, also sind wir noch weit entfernt, den Körpern auf unserer Erde eine solche Geschwindigkeit zu geben, welche sie zu Satelliten der Erde machen könnte. Die Umlaufszeit jenes Körpers um die ganze

Erde ist $T = \frac{2r\pi}{v}$, also, wenn man die vorhergehenden Werthe von r und v substituirt, $T = 5080{,}098$ Secunden $= 1^h\ 24'\ 40''$.

Nimmt man an, dafs der Mond in seiner mittlern Entfernung von 60 Erdhalbmessern durch einen ähnlichen Wurf seinen Kreis um die Erde beschreibe, und sucht man daraus die Umlaufszeit ϑ des Mondes, so ist, da nach dem Vorhergehenden die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Würfel der Halbmesser verhalten

$$1^3 : 60^3 = (5080{,}098)^2 : \vartheta^2$$

also $\vartheta = 2361016$ Secunden $= 27.327$ Tage, nur um 0.005 Tage oder $0^h\ 7'\ 12''$ gröfser, als die durch Beobachtungen gefundene siderische Revolution des Mondes. Es scheint daher dieselbe Kraft der Schwere zu seyn, welche die Körper auf der Oberfläche der Erde fallen macht, und welche den Mond in seiner Bahn um die Erde bewegt. Wir werden weiter unten diese Vermuthung vollkommen bestätiget finden.

II. Da sich den Beobachtungen gemäfs, die Erde gleichförmig um ihre Achse dreht, so ist der Druck jedes Körpers auf der Oberfläche der Erde, der durch die Rotation der Erde entsteht, oder so ist die Centrifugal-Kraft, nach der Gleichung (d), dem Halbmesser des Parallelkreises proportional, in welchem der Körper liegt. Ist also r der Halbmesser des Aequators der Erde, T der Sterntag, oder die Zeit ihrer Umdrehung, g die beobachtete Schwere am Aequator, und G die Schwere, welche ohne der Rotation der Erde Statt haben würde, so ist, da die Gröfsen G und D einander in ihrer Richtung entgegengesetzt sind

$$g = G - D = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Es ist aber $r = 19631210$ Par. Fufs, und

$T = 86164$ Secunden, also

$G - g = 0.1044$

Weiter ist (Cap. II) $g = 30.1027$ also ist auch

$$G = 30.2071 \text{ oder } \frac{g}{G} = \frac{289}{290}$$

d. h. die durch die Centrifugal-Kraft verminderte Anziehung der Erde verhält sich zu der eigentlichen Anziehung derselben unter dem Aequator, wie 289 zu 290.

Damit g gleich Null werde, müfste $T^2 = \frac{4\pi^2 r}{G}$ seyn, d. h. es müfste $T = 5060''$ seyn, oder wenn die Rotation der Erde nahe siebenzehnmal geschwinder wäre, als sie ist, so wäre die

Schwere am Aequator Null, und die Körper, sich selbst überlassen, würden da nicht mehr fallen.

III. Die Erde wird bekanntlich als ein Sphäroid betrachtet, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entstanden ist. Ist die halbe grofse Achse dieser Ellipse die Einheit, und ε die Excentricität, und endlich φ der Winkel der Normale irgend eines Punktes dieses Sphäroids mit der grofsen Achse, also φ die beobachtete Polhöhe dieses Punktes, so ist (Theil I, p. 276) die Normale des Sphäroids in diesem Punkte gleich

$$(1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

Bezeichnet man aber, wie zuvor, durch g die beobachtete Schwere an dem Aequator, und durch γ die beobachtete Schwere in der geographischen Breite φ, so hat man, da sich die Schwere in verschiedenen Punkten des Sphäroids wie die Normalen dieser Punkte verhalten

$$g : \gamma = 1 : (1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

oder da ε gegen die Einheit sehr klein ist

$$\gamma = g\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \varphi\right)$$

woraus folgt, dafs die beobachtete Schwere von dem Aequator gegen den Pol sehr nahe in dem Verhältnisse der Quadrate der Sinus der Breite zunimmt.

Ist aber L die Länge des Secundenpendels, so ist für den Ort, dessen beobachtete Schwere γ ist, (§. 5. I)

$$\frac{L}{\gamma} = \frac{T^2}{\pi^2} \text{ oder da } T = 1 \text{ ist, } L = \frac{\gamma}{\pi^2} \text{ also auch}$$

$$L = \frac{g}{\pi^2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sin}^2 \varphi\right)$$

oder auch die Zunahme der Länge des Secunden-Pendels vom Aequator gegen den Pol ist sehr nahe dem Quadrate des Sinus der Breite proportionirt. Man kann daher für den Ausdruck der Länge des Secundenpendels annehmen

$$L = a + b \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

und die zwey Gröfsen a und b durch die Beobachtungen bestimmen. Man fand so für die Länge des Pendels, welches seine Schwingungen in einer Secunde mittlerer Zeit vollendet

$$L = 3.050046 + 0.016571 \operatorname{Sin}^2 \varphi \text{ Par. Fufs}$$

übereinstimmend mit Cap. V, §. 2.

§. 12.

Wir wollen nun die Curve suchen, in welcher ein Körper, der bloſs von der constanten Schwere g getrieben wird, in der kürzesten Zeit den Weg von einem gegebenen Punkte bis zu einen andern gegebenen Punkt zurücklegt.

Ist $x = 0$ die senkrechte, mit der Richtung der Schwere parallele Coordinate des ersten der zwey gegebenen Punkte, so ist nach der Gleichung (c) (Nro. III §. 5.) die Geschwindigkeit des Körpers in jedem Punkte, zu welchen die Coordinate x gehört

$$v = \sqrt{2g(x-a)}$$

vorausgesetzt, daſs der Körper seine Bewegung in dem ersten gegebenen Punkte aus der Ruhe anfängt. Ist ferner ds das Element des Bogens, oder

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \text{ so ist}$$

$$dt = \frac{ds}{v} \text{ oder}$$

$$t = \int \frac{dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}}{\sqrt{2g(x-a)}}$$

und dieses Integral soll der Aufgabe gemäſs ein Minimum seyn. Ist aber

$$f\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \dots\right]$$

eine solche Funktion von x, y, z, $\frac{dy}{dx}$ deren Integral ein Gröſstes oder ein Kleinstes seyn soll, so ist bekanntlich (Theil I, Seite 279)

$$0 = d.\frac{f(y)}{dy} - d.\frac{df(dy)}{d^2y} + d^2.\frac{df(d^2y)}{d^3y} -$$

$$0 = d.\frac{f(z)}{dz} - d.\frac{df(dz)}{d^2z} + d^2.\frac{df(d^2z)}{d^3z} -$$

Wendet man dieſs auf unsern besonderen Fall an, so hat man

$$\frac{df(y)}{dy} = \frac{df(z)}{dz} = 0 \text{ und}$$

$$d.\frac{df(dy)}{d^2y} = d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{2g(x-a)\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}}$$

$$d.\frac{df(dz)}{d^2z} = d.\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{2g(x-a)\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}}$$

also sind jene beyden Bedingungsgleichungen, da alle übrigen Glieder verschwinden

$$d.\frac{df(dy)}{d^2y} = 0$$

$$d.\frac{df(dz)}{d^2z} = 0$$

und diese beyden Gleichungen sind zugleich die gesuchten Gleichungen der Curve. Ihre ersten Integralien sind

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{2g(x-a)\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}} = C$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{2g(x-a)\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}} = C'$$

und diese beyden Gleichungen geben

$$C'.dy = C\,dz \text{ oder } C'y = Cz + C''$$

wo C, C', C'' constante Gröſsen sind. Da diese Gleichung in y und z, eine der Projektionen der gesuchten Curve, eine gerade Linie ist, so ist die gesuchte Curve eine ebene Curve. Legt man daher diese Curve in die senkrechte Ebene der xy, so ist $z = 0$ und die Gleichung der gesuchten Curve ist

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{2g(x-a)\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}} = C \text{ oder}$$

$$dy = \frac{C(x-a)\sqrt{2g}}{\sqrt{(x-a)-2gC^2(x-a)}} \cdot dx$$

Ist $x - a = x'$ und

$$\frac{1}{2C^2g} = b \text{ so ist}$$

$$dy = \frac{x'\,dx'}{\sqrt{bx'-x'^2}}$$

die Gleichung der Cyclois, welche Curve also die gesuchte Linie des kürzesten Falles, oder die Brachystrochrone ist. Das Integral der letzten Gleichung ist

$$y = -\sqrt{bx'-x'^2} + \frac{b}{2}\,\text{Arc. Cos}\,\frac{b-2x'}{b}$$

I. Dieselben Resultate wird man auch erhalten, wenn man die Aufgabe nach der im Theil I p. 283 gegebenen Methode auflöſst. Behält man die dort gegebenen Bezeichnungen bey, so ist

$$U = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{2g(x-a)}}$$

und da die Gröſse U weder y noch z enthält, so ist $N = 0$ und $N' = 0$ und eben so $Q = Q' = R \ldots = 0$, also werden die Gleichungen (2) p. 286 in folgende übergehen

$$dP = 0 \text{ und } dP' = 0$$

deren Integralien sind

$$P = C \text{ und } P' = C'$$

wo C und C′ Constante sind. Es ist aber

$$P = \frac{dU}{dp} = \frac{p}{\sqrt{2g(x-a)(1+p^2+q^2)}} \text{ und}$$

$$P' = \frac{dU}{dq} = \frac{q}{\sqrt{2g(x-a)(1+p^2+q^2)}}$$

also sind auch jene beyden Integralien

$$\frac{p}{\sqrt{2g(x-a)(1+p^2+q^2)}} = C \text{ und}$$

$$\frac{q}{\sqrt{2g(x-a)(1+p^2+q^2)}} = C'$$

dieselben, welche wir oben erhalten haben.

§. 13.

Zum Schlusse dieses Capitels wollen wir noch folgende interessante Aufgaben auflösen.

Zwey Körper, deren Massen durch m und m′ bezeichnet werden, seyen durch eine gerade und unausdehnbare Linie, deren Länge a ist, verbunden. Der erste sey gezwungen, sich auf der ebenen Curve $dy = p\,dx$, und der zweyte sich auf der Curve $dy = q\,dx$ zu bewegen, während auf den ersten die veränderlichen senkrechten Kräfte X, Y und auf den zweyten die senkrechten Kräfte X′, Y′ wirken. Man suche die Bewegung beyder Körper. Wenn die Bewegung ganz frey wäre, so würde die Gleichung, welche diese Bewegung bestimmt, nach dem Vorhergehenden, folgende seyn

$$o = m\left(X - \frac{d^2x}{dt}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y$$

$$+ m'\left(X' - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m'\left(Y' - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = o \ldots \text{(VIII)}$$

wo x y die senkrechten Coordinaten des ersten, und x′ y′ die des zweyten Körpers sind.

Allein die Bewegung beyder Körper ist nicht frey. Denn erstens sind sie durch die gerade Linie a verbunden, wo $a^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$ ist, und da diese Linie unausdehnbar seyn soll, so ist $da = o$ oder

$$(x-x')(\delta x - \delta x') + (y-y')(\delta y - \delta y') = o \ldots \text{(a)}$$

welches die erste Bedingungsgleichung der Bewegung ist. Da aber zweytens sich jeder der zwey Körper auf einer gegebenen Curve bewegen soll, so sind die zwey übrigen Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}\delta y &= p\,\delta x \\ \delta y' &= q\,\delta x'\end{aligned}\right\}\text{(b)}$$

Eliminirt man aus der Gleichung (VIII) und diesen drey Bedingungsgleichungen (a), (b) drey von den Gröfsen δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$ so verschwindet auch die vierte, und man erhält als Resultat der Elimination eine einzige Gleichung zwischen x, y, x′, y′. Diese letzte Gleichung mit den drey folgenden

$$a^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$$
$$dy = p\,dx$$
$$dy' = q\,dx'$$

verbunden, wird dann hinreichen, die vier Gröfsen x, y, x′, y′ für jeden Werth von t zu bestimmen, und sonach die gegebene Aufgabe aufzulösen.

Nehmen wir in einem besondern Falle an, dafs die zwey gegebenen Curven Kreise des Halbmessers r und r′ sind, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Anfang der Coordinaten ist, so hat man

$$x^2 + y^2 = r^2,\ x'^2 + y'^2 = r'^2 \text{ also auch}$$

$$\delta y = -\frac{x}{y}\delta x,\ \delta y' = -\frac{x'}{y'}\delta x'$$

wodurch die Bedingungsgleichung (a) in folgende übergeht

$$\frac{\delta x}{y} = \frac{\delta x'}{y'}$$

so dafs man für die Gleichung (VIII) erhält

$$my\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) - mx\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + my'\left(X' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)$$

$$- m'x'\left(Y' - \frac{d^2y'}{dt^2}\right) = o$$

Verbindet man diese Gleichung mit den drey folgenden

$$x^2 + y^2 = r^2,\ x'^2 + y'^2 = r'^2,\ (x-x')^2 + (y-y')^2 = a^2$$

so wird man daraus die Werthe von x, y, x′, y′, als Funktionen von t bestimmen.

Da die Entfernungen r, r′ der Körper vom Anfangspunkte der Coordinaten unveränderlich sind, so ist die Linie, welche die beyden Körper mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Kreise verbindet, als ein Hebel zu betrachten, dessen Unterstützungspunkt jener Mittelpunkt ist.

Wirkt blofs die constante Schwere g in der Richtung der y, so ist $X = X' = o$ und $Y = Y' = g$, also die vorige Gleichung

$$\frac{m}{dt^2}(x\,d^2y - y\,d^2x) + \frac{m'}{dt^2}(x'\,d^2y' - y'\,d^2x')$$

$$- g\,(mx + m'x') = o \ \ldots \ (c)$$

Sind aber A, B die Coordinaten des Schwerpunktes der beyden Gewichte mg und m′g′, wo A mit x, und B mit y parallel ist, so hat man (Cap. I)

$$(m + m').A = mx + m'x' \ldots (d)$$

Nennt man endlich ϑ den Winkel, welchen die Entfernung $\sqrt{A^2 + B^2}$ des Schwerpunktes von dem Anfange der Coordinaten mit der Achse der x bildet, so findet man leicht

$$x\,d^2y - y\,d^2x = -r^2\,d^2\vartheta$$

und eben so

$$x'd^2y' - y'd^2x' = -r'^2 d^2\vartheta$$

und da $A = \sqrt{A^2 + B^2}$. Sin ϑ ist, so ist die Gleichung (d) jetzt folgende:

$$mx + m'x' = (m + m').\ \sqrt{A^2 + B^2}.\ \text{Sin}\ \vartheta$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung (c), so erhält man

$$(mr^2 + m'r'^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (m + m').\ g\ \sqrt{A^2 + B^2}.\ \text{Sin}\ \vartheta = o$$

Setzt man der Kürze wegen

$$f = \frac{mr^2 + m'r'^2}{(m + m')\sqrt{A^2 + B^2}}$$

so ist

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{f}\ \text{Sin}\ \vartheta = o$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Gleichung (b) des §. 5., so sieht man, daſs die Bewegung unsers Hebels, oder vielmehr die der Linie $\sqrt{A^2 + B^2}$, welche den Schwerpunkt beyder Körper mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte der beyden Kreise verbindet, dieselbe mit der Bewegung eines Pendels ist, dessen Länge f, und dessen Aufhängepunkt jener gemeinschaftliche Mittelpunkt der beyden Kreise ist.

§. 14.

Zwey gerade Linien AB und CD durchschneiden sich senkrecht in ihrer Mitte O. An den beyden Endpunkten einer unbiegsamen Stange, deren Länge gleich a, sind zwey Körper befestiget, deren der eine m sich in AO, und der andere m′ sich in CO, wie in einem Kanale, bewegen soll. Einer dieser beyden Körper erhalte eine ursprüngliche Impulsion, ohne daſs äuſsere Kräfte auf sie wirken; man bestimme die Bewegung dieser Körper.

Sey Om = x, Om′ = y also $a^2 = x^2 + y^2$ und dt das Element der Zeit, so hat man, nach dem Grundsatze der Erhaltung der lebendigen Kraft (Cap. III, §. 3.) in einer leicht zu entwerfenden Figur

$$\frac{m\,dx^2}{dt^2} + \frac{m'\,dy^2}{dt^2} = A,$$

wo A eine Constante bezeichnet. Setzt man in diesem Ausdrucke

$$dx^2 = \frac{y^2dy^2}{a^2 - y^2}\ \text{oder}\ dy^2 = \frac{x^2dx^2}{a^2 - x^2},$$

so erhält man

$$dt = dx \sqrt{\frac{ma^2 + (m' - m) x^2}{A(a^2 - x^2)}}$$

$$\text{oder } dt = dy \sqrt{\frac{m' a^2 - (m' - m) y^2}{A(a^2 - y^2)}}.$$

Integrirt man diese zwey Gleichungen, so erhält man x sowohl als y durch t ausgedrückt. Sind dann v und v' die Geschwindigkeiten der Körper m und m', so ist

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{A(a^2 - x^2)}{ma^2 + (m' - m) x^2}}$$

$$\text{und } v' = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{A(a^2 - y^2)}{m' a^2 - (m' - m) y^2}}.$$

Ist im Anfange der Bewegung m in A und m' in O, und ist c die anfängliche Geschwindigkeit, welche der Körper m' erhalten hat, so ist $c = \sqrt{\frac{A}{m'}}$, wodurch die Gröſse A bestimmt wird. Wie dann m' näher zu C kömmt, nimmt seine Geschwindigkeit ab, bis sie in C selbst, wo $y = a = OC$ wird, völlig verschwindet; die Geschwindigkeit von m aber wächst in derselben Zeit, bis m nach O kömmt, wo die Geschwindigkeit von m ihren gröſsten Werth $c \sqrt{\frac{m'}{m}}$ erreicht. Wenn der Körper m diesen Punkt O erreicht hat, so geht er weiter durch den Kanal OB, während m' durch CO zurückgeht, und jetzt ist die Geschwindigkeit von m in B gleich Null, und die von m' in O gleich c. Von da geht m' durch $OD = a$, während m durch $BO = a$ geht; ferner geht m durch OA, während m' durch DO zurückgeht, u. f. so daſs die beyden Körper ohne Ende die beyden Kanäle AB und CD durchlaufen, wenn sie von keinem Widerstande, keiner Reibung u. f. aufgehalten werden.

SIEBENTES KAPITEL.

Bewegung durch Centralkräfte.

§. 1.

Wenn auf den Körper eine veränderliche Kraft R wirkt, die nach irgend einen festen Punkt gerichtet ist, so wird man, wenn man diese Kraft parallel mit den Richtungen der drey rechtwinklichten Coordinaten x y z zerlegt, deren Anfang jener feste Punkt ist, für diese drey Seitenkräfte haben $R\frac{x}{r}$, $R\frac{y}{r}$ und $R\frac{z}{r}$, wo der Kürze wegen die Entfernung des Körpers von dem festen Punkte gleich $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gesetzt worden ist. Nimmt man also an, dafs diese Kraft den Körper dem festen Punkte zu nähern sucht, so hat man für diese Seitenkräfte nach x y und z

$$X = -\frac{Rx}{r},\ Y = -\frac{Ry}{r} \text{ und } Z = -\frac{Rz}{r}$$

Ist daher die Bewegung des Körpers frey, und keinen andern Bedingungen unterworfen, so hat man nach der Gleichung (III) oder (IV) des Capitels II

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Rx}{r} \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ry}{r} \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Rz}{r} \end{aligned}\right\} \dots\dots (')$$

Diese Gleichungen, welche das Element dt der Zeit als constant voraussetzen, bestimmen die Bewegung des Körpers, diesen als einen Punkt betrachtet, um den Anfangspunkt der Coordinaten. Diese Gleichungen enthalten weder unmittelbar die Coordinaten des Punktes, in welchen die Bewegung des Körpers anfing,

noch die dem Körper im Anfange mitgetheilten Geschwindigkeiten nach den drey Achsen der Coordinaten, aber diese Gröſsen werden später durch die Constanten bestimmt werden, welche die doppelte Integration dieser drey Differentialgleichungen des zweyten Grades einführen wird.

Ist R als eine Funktion der Coordinaten x y z oder als eine Funktion des Radius Vectors r gegeben, so werden die erwähnten drey Integrale Gleichungen zwischen x y z und t seyn; man wird also aus denselben die Werthe der Coordinaten x y z für jeden Werth von t bestimmen, d. h. man wird den Ort des Körpers für jede Zeit angeben können. Wenn man endlich zwischen diesen drey Integralen die Gröſse t eliminirt, so erhält man zwey Gleichungen zwischen x y und z, welche daher die krumme Linie, die Bahn, ausdrücken, in welcher sich der Körper bewegt.

I. Multiplicirt man die erste der Gleichungen (I) durch dx, die zweyte durch dy, und die dritte durch dz, so gibt die Summe dieser Produkte

$$o = \frac{dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z}{dt^2} + \frac{Rx\, dx + Ry\, dy + Rz\, dz}{r}$$

und das Integral dieser Gleichung ist

$$o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + 2 \int \frac{R}{r} (x\, dx + y\, dy + z\, dz) + \text{Const.}$$

oder

$$o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + 2 \int R\, dr + \text{Const.}$$

Ist daher die Kraft R eine Funktion des Radius Vectors r, so ist auch das Integral $\int R\, dr$ eine bestimmte Funktion des Radius Vectors, die wir durch F (r) bezeichnen wollen. Es ist aber $\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}}$ der Ausdruck der Geschwindigkeit des Körpers in jedem Punkte seiner Bahn (Cap. III, §. 3.). Nennt man daher c die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers und eben so a die anfängliche Entfernung r des Körpers von dem festen Punkte, so ist die letzte Gleichung

$$o = c^2 + 2 F (a) + \text{Const.}$$

und wenn man diesen Werth der Const. in der letzten allgemeinen Gleichung substituirt

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c^2 + 2 f (a) - 2 f (r)$$

oder, wenn die Kraft R eine Funktion des Radius r ist, so hängt

der Werth der Geschwindigkeit des Körpers, in jedem Punkte seiner Bahn nur von der Entfernung r des Körpers, von der anfänglichen Entfernung a, und von der anfänglichen Geschwindigkeit ab. Wenn daher ein Körper von einem gegebenen Punkte mit einer gegebenen Geschwindigkeit ausgeht, um zu einem anderen Punkte zu gelangen, so wird er bey seiner Ankunft in diesem letzten Punkte immer dieselbe Geschwindigkeit haben, welches auch die krumme Linie seyn mag, die er zwischen diesen beyden Punkten beschrieben hat. Wirkt aber auf den Körper keine äufsere Kraft, sondern bewegt er sich blofs in Folge eines anfänglichen Stofses, so ist $R = o$, also auch $F(r) = o$ und daher, wie die letzte Gleichung zeigt, die Geschwindigkeit des Körpers in allen Punkten seiner Bahn constant.

II. Multiplicirt man die erste der Gleichungen (I) durch y, und die zweyte durch x, so gibt die Differenz dieser Produkte, wenn man sie integrirt,

$$x\,dy - y\,dx = c\,.\,dt$$

und eben so

$$x\,dz - z\,dx = c'\,.\,dt$$

$$y\,dz - z\,dy = c''\,.\,dt$$

wo c, c′, c″ constante Gröfsen sind. Es ist aber $x\,dy - y\,dx$ der Ausdruck der doppelten Fläche, welche der auf die Ebene der xy projicirte Radius r in der Zeit dt beschreibt. Aus diesen Gleichungen folgt daher, dafs wenn die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, nach einem festen Punkt, den Anfang der Coordinaten gerichtet ist, dafs dann die Flächen, welche der Radius r in Beziehung auf jede der drey coordinirten Ebenen beschreibt, der Zeit, in welcher sie beschrieben werden, proportional sind. Auch umgekehrt, wenn diese Flächen sich wie die Zeiten verhalten, so ist die Kraft nach dem Anfangspunkt der Coordinaten gerichtet, denn nennt man wieder X Y Z die nach den Achsen der Coordinaten zerlegten Kräfte, so hat man

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + X,\quad o = \frac{d^2y}{dt^2} + Y,\quad \text{und } o = \frac{d^2z}{dt^2} + Z$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch y und die zweyte durch x, so gibt die Differenz dieser Produkte

$$o = \frac{d.(x\,dy - y\,dx)}{dt^2} + Yx - Xy$$

mit den ähnlichen Ausdrücken für xz und yz. Ist daher die Fläche $x\,dy - y\,dx$ constant, also ihr Differential gleich Null, so ist auch

$$Yx - Xy = o$$

oder die Kräfte X und Y verhalten sich, wie die Coordinaten x und y d. h. die mittlere, aus den beyden Kräften X und Y zu-

sammengesetzte Kraft geht durch den Anfang der Coordinaten (Vergl. Cap. III, §. 2.)

III. Multiplicirt man die drey ersten Gleichungen in II nach der Ordnung durch z, — y und x, so gibt die Summe dieser Produkte

$$o = c''.x - c'.y + c.z$$

die Gleichung der Ebene, in welcher sich der Körper bewegt, und die durch den Anfang der Coordinaten geht. Da also der Körper sich in einer ebenen Curve bewegt, so können wir die bisher willkührlichen senkrechten Coordinaten x, y, z so annehmen, daſs die beyden ersten x und y in der Ebene dieser Curve liegen, wodurch z also auch $\frac{Rz}{r}$ gleich Null wird. Die Bewegung des Körpers wird daher schon durch folgende zwey Gleichungen bestimmt

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Rx}{r} \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ry}{r} \end{aligned}\right\} \ldots . \text{(II)}$$

die wir nun näher betrachten wollen.

§. 2.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (II) durch dx, und die zweyte durch dy, so gibt ihre Summe, wie zuvor

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = A - 2\int R\,dr$$

wo A eine constante Gröſse ist. Multiplicirt man aber die erste durch y, und die zweyte durch x, so gibt ihre Differenz

$$x\,dy - y\,dx = B.dt$$

wo B wieder eine Constante ist. Um diesen Gleichungen eine einfachere Gestalt zu geben, seye ν der Winkel des Radius r mit der Achse der x, so ist $x = r \operatorname{Cos} \nu$ und $y = r \operatorname{Sin} \nu$. Substituirt man diese Werthe von x und y, und ihre Differentialien in den beyden letzten Gleichungen, so gehen sie in folgende über

$$\left.\begin{aligned} \frac{r^2 d\nu^2 + dr^2}{dt^2} &= A - 2\int R\,dr \\ r^2 d\nu &= B.dt \end{aligned}\right\} (1)$$

Die erste dieser Gleichungen gibt die Geschwindigkeit des Körpers in jedem Punkte seiner Bahn, und die andere enthält das Gesetz der Erhaltung der Flächen (Cap. III, §. 2.), denn ist s der

Bogen und f die Fläche, welche zwischen der Achse der x und dem Radius r enthalten ist, so hat man bekanntlich:

$$ds^2 = r^2 dv^2 + dr^2 \text{ und } df = \tfrac{1}{2} r^2 dv$$

Eliminirt man aus den beyden Gleichungen (1) die Gröſse dt, so erhält man

$$\frac{B^2}{r^2} + \frac{B^2 dr^2}{r^4 dv^2} = A - 2\int R\, dr \ldots (2)$$

$$\text{oder } R = \frac{B^2}{r^3} - \frac{B^2}{2} \cdot \frac{d.\left[\frac{dr^2}{r^4 dv^2}\right]}{dr}$$

Diese Gleichung gibt die Kraft R, wenn die Gleichung der Curve gegeben ist, in welcher sich der Körper bewegt, und sie gibt auch die Gleichung dieser Curve, wenn die Kraft R gegeben ist, die auf den Körper wirkt. Der letzte Fall erfordert aber eine doppelte Integration, daher wir jenen, als den einfacheren, zuerst betrachten wollen.

I. Es sey die Curve eine Ellipse, deren halbe groſse und kleine Achse a und b ist. Nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten, nach welchem die Kraft R immer gerichtet seyn soll, in dem Mittelpunkte der Ellipse an, so ist die Gleichung der Ellipse

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{Sin}^2 v + b^2 \operatorname{Cos}^2 v}}$$

und ihr Differential

$$\frac{dr}{dv} = -\frac{r^3 (a^2 - b^2)}{2 a^2 b^2} \cdot \operatorname{Sin} 2v$$

Allein die erste Gleichung gibt auch

$$\operatorname{Sin} v = \frac{b}{r} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}} \text{ oder } \operatorname{Cos} v = \frac{a}{r} \sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}}$$

also auch

$$\operatorname{Sin} 2v = 2 \operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} v = \frac{2ab}{(a^2 - b^2)} r^2 . \sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}$$

Substituirt man diesen Ausdruck von Sin 2 v in der zweyten der vorigen Gleichungen, so ist

$$\frac{dr}{dv} = -\frac{r}{ab} \cdot \sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}$$

und wenn man diesen Werth von $\frac{dr}{d\nu}$ in der Gleichung (2) substituirt

$$\frac{B^2}{a^2 b^2}(a^2+b^2-r^2) = A-2\int R\,dr$$

und deren Differential gibt:

$$R = \frac{B^2}{a^2 b^2}.\,r$$

Wenn also der Körper, der Planet, eine Ellipse beschreibt, in deren Mittelpunkte zugleich der Mittelpunkt der Kraft, die Sonne, ist, so mufs sich diese Kraft R wie die Entfernung des Körpers r verhalten, oder die Kraft mufs mit der Entfernung in demselben Verhältnisse ab- und zunehmen.

Sucht man die Kraft, welche den Körper zwingt, eine hyperbolische Spirale zu beschreiben, deren Gleichung bekanntlich $r = \frac{a}{1+\nu}$ ist, so gibt die Gleichung (2)

$$R = \frac{B^2}{r^3}$$

oder die Kraft verhält sich, wie verkehrt der Würfel der Entfernung.

Sucht man die Kraft, welche den Körper zwingt, einen Kreis, dessen Halbmesser a, zu beschreiben, und nimmt man den Anfang der Coordinaten oder den Mittelpunkt der Kraft in der Peripherie des Kreises an, so ist die Gleichung des Kreises

$$r = 2\,a\,\mathrm{Cos}\,\nu$$

also gibt die Gleichung (2)

$$R = \frac{8\,a^2 B^2}{r^5}$$

oder die Kraft verhält sich, wie verkehrt die fünfte Potenz der Entfernung.

Sucht man endlich die Kraft, welche den Körper zwingt, sich in einer Ellipse zu bewegen, in deren einem Brennpunkte der Mittelpunkt der Kraft ist, so ist die bekannte Gleichung der Ellipse

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,\mathrm{Cos}\,\nu}$$

wo r die Entfernung des Körpers von jenem Brennpunkte, ν der Winkel von r mit dem kleineren Theile der grofsen Achse 2 a, und ae die Excentricität, also die halbe kleine Achse $b = a\sqrt{1-e^2}$,

und der halbe Parameter $p = a(1-e^2)$ ist. Ist in dieser Gleichung die Gröſse a negativ, und ist e gröſser als die Einheit, so gehört sie für die Hyperbel, und ist e gleich der Einheit, und a unendlich groſs, so gehört sie für die Parabel. Wenn man sie differentiiret, so erhält man:

$$\frac{dr^2}{r^4 d\nu^2} = \frac{2}{ar(1-e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1-e^2)}$$

also gibt die Gleichung (2)

$$\frac{2B^2}{ar(1-e^2)} - \frac{B^2}{a^2(1-e^2)} = A - 2\int R\, dr$$

und dessen Differential

$$R = \frac{B^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{1}{r^2} \text{ oder } R = \frac{B^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} \quad \ldots (3)$$

oder die Kraft verhält sich, wie verkehrt das Quadrat der Entfernung.

II. Bequemer werden diese und ähnliche Untersuchungen, wenn man die Gleichungen der Curven zwischen dem Radius Vector r und dem Lothe u aus dem Anfangspunkte von r auf die Tangente der Curve einführt. Man hat nähmlich, wie man leicht sieht:

$$\frac{ds}{d\nu} = \frac{r^2}{u}, \quad \frac{ds}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2-u^2}}, \quad \frac{dr}{d\nu} = \frac{r}{u}\sqrt{r^2-u^2}$$

$$\frac{du}{d\nu} = \sqrt{r^2-u^2} \text{ und } \frac{du}{dr} = \frac{u}{r}$$

wo $ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\nu^2}$ das Element des Bogens der Curve bezeichnet. Differentiirt man die dritte dieser Gleichungen, indem man dr constant annimmt, so ist

$$d^2\nu \cdot r\sqrt{r^2-u^2} = du \cdot dr - d\nu \cdot \left\{ dr\sqrt{r^2-u^2} + \frac{r(r\,dr - u\,du)}{\sqrt{r^2-u^2}} \right\}$$

Substituirt man diesen Werth von $d^2\nu$ in dem bekannten Ausdrucke des Krümmungshalbmessers

$$\varrho = \frac{ds^3}{ds^2\, d\nu + dr^2\, d\nu + r\, dr\, d^2\nu}$$

und setzt man statt ds und $d\nu$ ihre vorhergehenden Werthe in dr, so erhält man für den Krümmungshalbmesser den einfachen Ausdruck

$$\varrho = \frac{r\, dr}{du}$$

also wird auch die Gleichung (2) in folgende übergehen:

$$\frac{B^2}{u^2} = A - 2\int R dr \text{ oder}$$

$$R dr = \frac{B^2 du}{u^3} \text{ oder endlich}$$

$$R = \frac{B^2 r}{u^3 . \varrho}$$

Mit diesem Ausdrucke lassen sich die vorhergehenden Aufgaben ohne Mühe auflösen, wenn man die Gleichung der gegebenen Curven zwischen u und r zu Grunde legt. So ist für die logarithmische Spirale

$$\nu = m \log . r \text{ oder } u = \frac{mr}{\sqrt{1 + m^2}}$$

für die hyperbolische Spirale

$$r = \frac{m}{1 + \nu} \text{ oder } u = \frac{mr}{\sqrt{m^2 + r^2}}$$

für die Ellipse, wenn u und r aus dem Mittelpunkte genommen werden, und a, b die halbe grofse und kleine Achse bezeichnet

$$u^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - r^2}$$

und wenn u und r aus einem der beyden Brennpunkte genommen werden

$$u^2 = \frac{b^2 r}{2a - r}$$

für den Kreis endlich, dessen Halbmesser a ist, hat man, wenn u und r aus einem Punkte der Peripherie genommen werden

$$r^2 = 2au$$

III. Die zweyte der Gleichungen (1) ist $r^2 d\nu = B dt$. Nennt man aber wieder u das Loth aus dem Mittelpunkte der Kraft auf die Tangente der Bahn, so ist (nach II) $r^2 d\nu = u ds$ also ist auch

$$\frac{ds}{dt} = \frac{B}{u}.$$

Da aber $\frac{ds}{dt}$ der Ausdruck der Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn ist, so zeigt die letzte Gleichung, dafs für jede Central-Kraft die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn sich wie verkehrt das Loth aus dem Mittelpunkte der Kraft auf die Tangente der Bahn

in diesem Punkte verhält. Die **Winkelgeschwindigkeit** aber, oder die Gröfse $\frac{dv}{dt}$ verhält sich, wie die zweyte der Gleichungen (1) zeigt, wie verkehrt das Quadrat des Radius Vectors.

§. 3.

Wir wollen nun auch die umgekehrte Aufgabe auflösen, und die krumme Linie suchen, wenn die Kraft gegeben ist. Der Kürze wegen wollen wir aber nur den ersten und letzten der in §. 2. gegebenen Fälle näher betrachten.

Es verhalte sich also zuerst die Kraft wie die Entfernung r, oder es seye $R = m.r$ wo m eine constante Gröfse bezeichnet, so gehen die Gleichungen (II) des §. 1. in folgende über:

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + mx, \quad o = \frac{d^2y}{dt^2} + my$$

Es sey, wie zuvor, $x = r \operatorname{Cos} v$ und $y = r \operatorname{Sin} v$. Substituirt man diese Werthe von x und y in den vorhergehenden Gleichungen, und multiplicirt dann die erste durch $\operatorname{Sin} v$, und die zweyte durch $-\operatorname{Cos} v$, so gibt ihre Summe, wenn man sie integrirt

$$\frac{r^2\,dv}{dt} = m^{\frac{1}{2}}.ab$$

wo $m^{\frac{1}{2}}.ab$ eine Constante ist. Multiplicirt man aber die erste jener Gleichungen durch $\operatorname{Cos} v$, und die zweyte durch $\operatorname{Sin} v$, so gibt ihre Summe

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\,dv^2}{dt^2} + mr = o$$

oder wenn man statt $\frac{dv}{dt}$ seinen Werth $\frac{m^{\frac{1}{2}}.ab}{r^2}$ substituirt,

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{ma^2b^2}{r^3} + mr = o$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch dr und integrirt, so ist:

$$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{ma^2b^2}{r^2} + mr^2 = m\,(a^2 + b^2)$$

wo wieder $m\,(a^2 + b^2)$ eine Constante ist. Wir haben also die zwey Gleichungen

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{m\,(-a^2b^2 + (a^2+b^2)\,r^2 - r^4)}}$$

und $d\nu = \dfrac{ab\,dr}{r\sqrt{-a^2b^2+(a^2+b^2)r^2-r^4}}$

Das Integral der letzten ist

$$\text{Sin}\,(\nu-\alpha) = \frac{b}{r}\sqrt{\frac{a^2-r^2}{a^2-b^2}}$$

und das Integral der ersten

$$t-\beta = \frac{1}{2\sqrt{m}}\,.\,\text{Arc. Cos}\,\frac{2\sqrt{-a^2b^2+(a^2+b^2)r^2-r^4}}{a^2-b^2}$$

wo α und β die Constanten der Integration sind. Die vorletzte Gleichung zeigt, daſs die Bahn eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt der Kraft oder der Anfang der Coordinaten, und deren halbe groſse und kleine Achse a und b ist. Fangen die Gröſsen $(\nu-\alpha)$ und t zugleich an, so ist

$$\beta = \frac{-\pi}{4A} \text{ wo } \pi = 3.14159$$

und die letzte Gleichung geht in folgende über

$$r^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\,\text{Cos}\,2\,t\sqrt{m} \text{ oder}$$

$$r^2 = a^2\,\text{Cos}^2\,t\sqrt{m} + b^2\,\text{Sin}^2\,t\sqrt{m}\;\ldots\;(4)$$

Der vorhergehende Ausdruck für Sin $(\nu-\alpha)$ aber gibt

$$\text{tg.}\,(\nu-\alpha) = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-r^2}{r^2-b^2}}$$

oder wenn man den gefundenen Werth von r^2 substituirt

$$\text{tg.}\,(\nu-\alpha) = \frac{b}{a}\,\text{tg.}\,t\sqrt{m}\;\ldots\;(5)$$

Die Gleichung (4) gibt den Werth von r, und (5) den Werth von ν für jeden Werth von t so daſs also durch diese beyden Gleichungen der Ort des Körpers in seiner Ellipse für jede gegebene Zeit bestimmt ist. Die Gleichung (4) gibt überdieſs $\nu-\alpha = 0$ für $t = 0$, und $\nu-\alpha = 90°$ für $t = \dfrac{\pi}{2\sqrt{m}}$ woraus folgt, daſs die Zeit des ganzen Umlaufes des Körpers um den Mittelpunkt der Ellipse gleich $\dfrac{2\pi}{\sqrt{m}}$, also von a und b unabhängig, oder für alle Ellipsen dieselbe ist. Substituirt man den Werth von r^2 aus (4), und das Differential $d\nu$ aus (5) nähmlich

$$d\nu = \frac{m^{\frac{1}{2}} ab\, dt}{a^2 \operatorname{Cos}^2 t\sqrt{m} + b^2 \operatorname{Sin}^2 t\sqrt{m}}$$

in dem Ausdrucke $f = \frac{1}{2}\int r^2 d\nu$ der Fläche des elliptischen Sectors, so erhält man

$$f = \tfrac{1}{2}\int m^{\frac{1}{2}}.\, ab\, dt = \tfrac{1}{2} m^{\frac{1}{2}}.\, ab\, t$$

oder diese Flächen verhalten sich wie das Produkt der beyden Achsen in die Zeit, in welcher sie beschrieben werden.

I. Die Auflösung dieser Aufgabe läſst sich aber auch unmittelbar aus den beyden oben gegebenen Gleichungen

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + m\,x,\; o = \frac{d^2y}{dt^2} + my$$

ableiten, wenn man bemerkt, daſs ihre zweyten Integralien sind

$$x = A \operatorname{Cos} t\sqrt{m} - B \operatorname{Sin} t\sqrt{m}$$
$$y = A' \operatorname{Cos} t\sqrt{m} - B' \operatorname{Sin} t\sqrt{m}$$

wo $A B A' B'$ die vier Constanten der Integration sind.

Für $t = o$ geben diese Integrale $x = A$, $y = A'$ und wenn man sie einmal differentiirt, und nach der Differentiation wieder $t = o$ setzt, so hat man $\frac{dx}{dt} = -B\sqrt{m}$ und $\frac{dy}{dt} = -B'\sqrt{m}$, woraus folgt, daſs A, A' die Coordinaten des Körpers im Anfange seiner Bewegung, und daſs $-B\sqrt{m}$ und $-B'\sqrt{m}$ die anfänglichen Geschwindigkeiten desselben nach der Richtung der x und y sind. Setzt man daher diese vier Constanten als gegeben voraus, so wird man aus ihnen leicht die Elemente der Bahn ableiten. Multiplicirt man endlich die erste jener zwey Integralgleichungen durch A', und die zweyte durch $-A$, so gibt ihre Summe,

$$o = A'x - Ay + (A'B - AB') \operatorname{Sin} t\sqrt{m}$$

und eben so

$$o = B'x - By + (A'B - AB') \operatorname{Cos} t\sqrt{m}$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Gröſse $t\sqrt{m}$, so hat man

$$(A'^2 + B'^2)x^2 + (A^2 + B^2)y^2 - 2(AA' + BB')xy = (AB' - A'B)^2$$

die Gleichung der Bahn, die also für einen Kegelschnitt, und da dieser nach allen Seiten begränzt ist, für eine Ellipse gehört, wie zuvor gefunden wurde. Man kann noch bemerken, daſs sich die Gleichungen (3) und (4) auch sehr leicht in einfache Reihen entwickeln lassen. Die letzte gibt so

$$\nu - \alpha = t\sqrt{m} - P \operatorname{Sin} 2t\sqrt{m} + \tfrac{1}{2}P^2 \operatorname{Sin} 4t\sqrt{m} - \tfrac{1}{3}P^3 \operatorname{Sin} 6t\sqrt{m} +$$

und umgekehrt

$$t\sqrt{m} = (\nu-\alpha) + P \operatorname{Sin} 2\,(\nu-\alpha) + \tfrac{1}{2}P^2 \operatorname{Sin} 4\,(\nu-\alpha) + \tfrac{1}{3}P^3 \operatorname{Sin} 6\,(\nu-\alpha)$$

und die der Gleichung (3) unmittelbar vorhergehende Gleichung gibt

$$\log r = \log \frac{a+b}{2} - P \operatorname{Cos} 2\,t\sqrt{m} - \tfrac{1}{2}P^2 \operatorname{Cos} 4\,t\sqrt{m} - \tfrac{1}{3}P^3 \operatorname{Cos} 6\,t\sqrt{m} - \ldots \text{ wo } P = \frac{a-b}{a+b} \text{ ist.}$$

§. 4.

Nehmen wir nun an, daſs die Kraft sich wie verkehrt das Quadrat der Entfernung verhalte, oder daſs $R = \frac{\mu}{r^2}$ sey, wo μ eine constante Gröſse ist, so sind die Gleichungen (II) des §. 1.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots \text{(III)}$$

Denkt man sich diese Kraft als die Wirkung, als die Anziehung eines Körpers, dessen Ort der Mittelpunkt der Kraft, oder der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so folgt aus der Vergleichung dieser Ausdrücke mit den letzten Gleichungen des Cap. II, §. 3. Nro. IV, daſs die eingeführte Constante μ gleich $M + m$, oder gleich der Summe der Massen des anziehenden und des angezogenen Körpers ist.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (III) durch x, und die zweyte durch y, so gibt ihre Summe, wenn man sie integrirt

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

wo a die Constante der Integration ist. Diese Gleichung gibt die Geschwindigkeit des Körpers m in jedem Punkte seiner Bahn. Multiplicirt man aber die erste der Gleichungen (III) durch y, und die zweyte durch — x, so gibt ihre Summe, wenn man sie integrirt

$$x\,dy - y\,dx = dt \,.\, \sqrt{\mu p}$$

wo wieder p die Constante der Integration ist. Diese Gleichung gibt bekanntlich die Fläche, welche von dem Radius Vector r in der Zeit t beschrieben wird, und sie zeigt, daſs diese Fläche der Zeit selbst proprotional ist.

Nimmt man wieder an, $x = r \operatorname{Cos} \nu$, $y = r \operatorname{Sin} \nu$, so sind die zwey letzten Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dr^2 + r^2 d\nu^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \\ r^2 d\nu = dt \sqrt{\mu p} \end{array}\right\} \ldots \ldots (6)$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Gröfse dt, und setzt $r = \frac{1}{z}$, so erhält man

$$d\nu = \frac{p\,dz}{\sqrt{1 - \frac{p}{a} - (1-pz)^2}}$$

und dessen Integral

$$\nu + (180 - \varpi) = \text{Arc. Cos} \frac{1 - pz}{\sqrt{1 - \frac{p}{a}}}$$

wo $(180 - \varpi)$ die Constante der Integration bezeichnet, oder wenn man den Werth von $z = \frac{1}{r}$ wiederherstellt, und der Kürze wegen $1 - \frac{p}{a} = e^2$ setzt

$$r = \frac{p}{1 + e \operatorname{Cos}(\nu - \varpi)} \ldots \ldots (7)$$

für die Gleichung der gesuchten krummen Linie, in welcher sich der Körper m bewegt. Diese krumme Linie ist also ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, nachdem a positiv, negativ, oder unendlich grofs, oder auch, nachdem e kleiner, oder gröfser als eins, oder gleich eins ist. Von diesem Kegelschnitte ist die halbe grofse Achse gleich a, der halbe Parameter gleich p, und die Excentricität gleich e, also auch $p = a(1-e^2)$, und die halbe kleine Achse gleich $b = a\sqrt{1-e^2}$. Die Gröfse ν bezeichnet den Winkel des Radius Vectors r mit irgend einem seiner Lage nach constanten Radius Vector, welcher letzte mit der grofsen Achse den Winkel ϖ bildet. Zählt man den Winkel ν von der grofsen Achse selbst, oder läfst man die Bewegung in dem Endpunkte der grofsen Achse, welcher dem Körper M am nächsten ist, anfangen, so ist $\varpi = 0$ und die Gleichung der Bahn

$$r = \frac{p}{1 + e \operatorname{Cos} \nu}$$

Eliminirt man die Gröſse $d\nu$ aus den beyden Gleichungen (6), so erhält man

$$dt = \frac{r\,dr\sqrt{\frac{a}{\mu}}}{\sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}}$$

Diesen Ausdruck einfacher zu machen, sey

$$r = a\,(1 - e \operatorname{Cos} u)$$

$$\text{so ist}\quad dt.\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = (1 - e \operatorname{Cos} u)\,du$$

also dessen Integral, wenn u mit t zugleich verschwindet

$$t.\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = u - e \operatorname{Sin} u$$

Ist also t bekannt, so gibt die letzte Gleichung den Werth von u, und dann erhält man r und ν durch

$$r = a\,(1 - e \operatorname{Cos} u)$$

$$\operatorname{Cos} \nu = \frac{a\,(1-e^2) - r}{er} \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \operatorname{tg} \frac{u}{2}.\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

oder diese Gleichungen bestimmen den Ort des Körpers m in seiner Bahn für jede Zeit t, wenn die Elemente dieser Bahn, oder wenn die Gröſsen a e und μ bekannt sind.

In der vorhergehenden Gleichung $t.\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = u - e \operatorname{Sin} u$ fängt der Winkel u zugleich mit der Zeit t an.

Ist nun T die Zeit, während welcher der Winkel u um die ganze Peripherie 2π des Kreises gewachsen ist, d. h. ist T die ganze Umlaufszeit des Körpers m um M, so gibt die letzte Gleichung

$$T\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = 2\pi \quad \text{oder} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}.\,a^3$$

und da π und μ constante Gröſsen sind, so verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten, wie die Würfel der groſsen Achsen.

I. Wir haben unter der Voraussetzung $R = \frac{\mu}{r^2}$ die Bewegung des Körpers m um M aus den zwey Gleichungen (III) abgeleitet, weil wir nach den Gleichungen (II) des §. 1. mit Recht

annehmen konnten, dafs die Bahn des Körpers m eine ebene Curve ist. Indessen ist es nicht schwer, die Bewegung dieses Körpers auch ohne dieser Voraussetzung zu bestimmen. Nimmt man nähmlich noch auf die dritte Coordinate z desselben Rücksicht, so hat man nach den Gleichungen (I) des §. 1.

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} \end{aligned}\right\}$$

und die Integration dieser drey Gleichungen wird die gesuchte Bewegung des Körpers geben. Wir haben diese Integration schon in dem zweyten Theile p. 28 gegeben. Da uns aber die dort entwickelten Ausdrücke noch in der Folge sehr nützlich seyn werden, so wird es erlaubt seyn, die Endresultate derselben hier kurz zusammenzustellen.

Wir haben dort aus diesen Gleichungen zuerst folgende sieben Differentialgleichungen der ersten Ordnung abgeleitet:

$$\left.\begin{aligned} & x\,dy - y\,dx = c\,.\,dt,\ x\,dz - z\,dx = c'dt,\ y\,dz - z\,dy = c''.dt \\ & o = f + x\left(\frac{\mu}{r} - \frac{dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + (y\,dy + z\,dz)\frac{dx}{dt^2} \\ & o = f' + y\left(\frac{\mu}{r} - \frac{dx^2 + dz^2}{dt^2}\right) + (x\,dx + z\,dz)\frac{dy}{dt^2} \\ & o = f'' + z\left(\frac{\mu}{r} - \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right) + (x\,dx + y\,dy)\frac{dz}{dt^2} \\ & \frac{2\mu}{r} = \frac{\mu}{a} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

wo c c′ c″ und f f′ f″ und a die Constanten der Integrationen sind, und wo zwischen diesen Constanten die zwey Bedingungsgleichungen statt haben

$$\left.\begin{aligned} o &= fc'' - f'c' + f''c \\ \frac{\mu}{a} &= \frac{\mu^2 - (f^2 + f'^2 + f''^2)}{c^2 + c'^2 + c''^2} \end{aligned}\right\} \ldots (b)$$

Durch diese Constanten werden dann die Elemente der Bahn so bestimmt, dafs man hat

halbe grofse Achse $= a$

halber Parameter der Bahn $a(1 - e^2) = \frac{1}{\mu}(c^2 + c'^2 + c''^2)$

Verhältniſs der Excentricität zur halben groſsen Achse

$$e = \frac{1}{\mu} \cdot \sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2}$$

und $$\operatorname{tg} J = \frac{f'}{f}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{c''}{c'}, \quad \operatorname{tg} w = \sqrt{\frac{c'^2 + c''^2}{c^2}} \quad \ldots \text{(c)}$$

wo J die Länge des auf die Ebene der xy projicirten Periheliums, ϑ die Länge des aufsteigenden Knotens und w die Neigung der Bahn gegen die Ebene der xy ist.

Endlich hatten wir noch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} o = c''x - c'y + cz \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = \mu r + fx + f'y + f''z \end{array}\right\} \ldots \text{(d)}$$

und für die Bestimmung des Ortes des Planeten in seiner Bahn

$$r = a\,(1 - e \operatorname{Cos} u) \text{ und } t.\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = u - e \operatorname{Sin} u$$

$$\text{oder } nt = u - e \operatorname{Sin} u \text{ wenn } n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

die mittlere tägliche Bewegung des Planeten in seiner Bahn bezeichnet.

§. 5.

Kepler hatte aus bloſsen Beobachtungen gefunden, daſs die Planeten sich um die Sonne in Ellipsen bewegen, in deren einem Brennpunkte die Sonne ist: daſs die Flächen, welche ihre Entfernungen von der Sonne in jeder Zeit beschreiben, dieser Zeit selbst proportional sind, und daſs endlich die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten sich wie die Würfel ihrer groſsen Achsen verhalten. Nach ihm überzeugte man sich bald, daſs auch die Bewegung der Kometen um die Sonne, und die der Satelliten um ihre Hauptplaneten nach denselben drey Gesetzen vor sich gehen. Wir haben in §. 2. I Gleichung (3) gesehen, daſs dann die Kraft der Sonne, oder überhaupt die Kraft des Central-Körpers sich verkehrt wie das Quadrat ihrer Entfernung von dem angezogenen Körper verhalte, und wir haben in §. 4. gezeigt, daſs wenn diese Kraft sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält, die Bewegung nach jenen drey Gesetzen statt habe. Da also dieser Fall zugleich jener der Natur ist, so müssen wir ihn näher betrachten. Die Gleichung (3) des §. 2 war:

$$R = \frac{B^2}{a(1-e^2)r^2},$$

wo nach der zweyten der Gleichungen (1) die Gröſse B gleich

$B = \frac{r^2 d\nu}{dt}$ ist. Die Kraft, mit welcher die Erde alle Körper auf ihrer Oberfläche anzieht, oder die Schwere ist $g = 30.103$ Par. Fuſs (Cap. V). Nehmen wir diese Schwere der Erde als die Einheit der Kraft an, so ist die Kraft der Sonne

$$R = \frac{B^2}{g a (1-e^2) r^2}$$

Setzen wir voraus, daſs diese Kraft R der Sonne in der Entfernung des Erdhalbmessers von dem Mittelpunkte der Sonne gleich M sey, oder daſs M die Kraft der Sonne sey, die Kraft der Erde als Einheit angenommen, so geht die letzte Gleichung in folgende über

$$\frac{B^2}{a(1-e^2)} = Mg$$

wenn man nämlich den Halbmesser der Erde als die Einheit der Entfernungen, so wie die Kraft der Erde als die Einheit der Kräfte annimmt.

Die vorhergehende Gleichung $B\,dt = r^2 d\nu$ aber gibt, wenn man sie integrirt $\frac{1}{2} Bt = \frac{1}{2} \int r^2 d\nu$, wo $\frac{1}{2} \int r^2 d\nu$ die Fläche ausdrückt, welche der Radius Vectors in der Zeit t beschreibt. Ist also, wie zuvor, T die Umlaufszeit des Planeten, so ist $\frac{1}{2} \int r^2 d\nu$ die Fläche der ganzen Ellipse, die bekanntlich gleich

$$\pi\, ab = \pi\, a^2 \sqrt{1-e^2} \text{ ist.}$$

Es ist daher auch $B = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$ oder

$$\frac{B^2}{a(1-e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

Setzt man diese beyden Werthe von $\frac{B^2}{a(1-e^2)}$ einander gleich, so erhält man

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{g T^2}$$

welche Gleichung also die Gröſse M gibt, wenn man in ihr den Werth von g, und die von a und T irgend eines Planeten unseres Sonnensystems substituirt. Nimmt man z. B. die Erde, so ist ihre siderische Umlaufszeit 365.256384 Tage,
also $T = (365.256384) . 60^2 . 24$ Sekunden. Die halbe groſse Achse der Erdbahn ist $a = \frac{1}{\text{Sin } 8''.6}$, wenn 8″ 6 die Sonnen-Parallachse ist, wenn nähmlich, nach dem Vorhergehenden, der

Halbmesser der Erde als die Einheit der Entfernungen angenommen wird. Endlich ist die Schwere der Erde gleich 30.1028 Par. Fufs also wenn die geographische Meile, deren 15 auf einen Grad des Aequators gehen 22829 Par. Fufs, und daher der Halbmesser der Erde $\frac{5400}{2\pi}$ geographische Meilen hat

$$g = \frac{(30.1028)\ 2\pi}{(22829)(5400)} = 0.00000153428$$

Erdhalbmesser.

Es ist daher:

$$\log 4\pi^2 = 1.5963598$$

$$\log a^3 = \log \frac{1}{\operatorname{Sin}^3 8''.6} = \frac{3.1397798}{4.7361396}$$

$$\log T^2 = \frac{4.9982230}{9.7379166}$$

$$\log g = 4.1859063$$

$$\log M = \overline{5.5520103}$$

$$M = 356460$$

oder die Kraft der Sonne ist nahe 356460 mahl gröfser, als die Kraft der Erde. Worin übrigens die Eigenschaft der Körper auch bestehen mag, vermöge welcher sie einander anziehen, eine Eigenschaft, die wir mit dem Worte Kraft bezeichnet haben, so ist klar, dafs diese Eigenschaft jedem Elemente des Körpers zukommen mufs, und dafs daher die Kraft eines Körpers, mit welcher er alle Körper, die in derselben Entfernung von ihm sind, anzieht, desto gröfser ist, je gröfser die Anzahl der körperlichen Elemente ist, aus denen er besteht, oder mit anderen Worten, dafs die Kraft der Körper für dieselbe Entfernung sich wie die Masse dieser Körper verhält, woraus also folgt, dafs auch die Masse der Sonne nahe 356460 mahl grösser ist, als die Masse der Erde. Man kann diesen Ausdruck für die Masse der Sonne noch auf folgende einfachere Weise finden.

Der Bogen, welchen die Erde in ihrer mittleren Bewegung um die Sonne während einer Sekunde mittlerer Zeit beschreibt, ist $\frac{2\pi . a}{T}$, wenn durch T, wie zuvor, die siderische Umlaufszeit der Erde in Sekunden der mittleren Zeit ausgedrückt ist. Der Sinus versus dieses Bogens ist $2\,a \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} . \frac{2\pi a}{T}$ oder $\frac{2\pi^2 a^3}{T^2}$, und da der Sinus versus als die Abweichung der krummlinichten Bahn der Erde von ihrer Tangente während einer Zeitsekunde angesehen werden

kann, so ist $\frac{2\pi^2 a^3}{T^2}$, in Theilen der halben grofsen Achse a der Erdbahn ausgedrückt, die Gröfse, um welche die Erde in ihrer jährlichen Bewegung während einer Zeitsekunde gegen die Sonne fällt, oder $\frac{2\pi^2 a^3}{T^2}$ ist die Anziehung der Sonne in der Entfernung a von ihrem Mittelpunkte. Die Gröfse aber, um welche die Körper auf der Oberfläche der Erde in einer Zeitsekunde gegen den Mittelpunkt der Erde fallen, ist $\frac{1}{2}$ g = 15.0514 Fufs. Drückt man daher die Gröfse $\frac{1}{2}$ g ebenfalls in Theilen von a aus, so ist $\frac{1}{2}$ g der Raum, um welchen ein Körper in der Entfernung von a durch die Kraft der Erde in einer Sekunde gegen die Erde fällt, oder $\frac{1}{2}$ g ist die Anziehung der Erde in der Entfernung a. Da aber für dieselbe Entfernung die Anziehungen zweyer Körper sich wie ihre Massen verhalten, so hat man, wenn M die Masse der Sonne bezeichnet, die der Erde als Einheit angenommen

$$M : 1 = \frac{2\pi^2 a^3}{T^2} : \frac{1}{2} g \text{ oder}$$

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{g T^2}$$

wie zuvor.

I. Wir haben im Anfange des §. 4. die Kraft der Sonne gleich $R = \frac{\mu}{r^2}$ angenommen. Stellt man diese Gleichung so dar

$$R : 1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{(\sqrt{\mu})^2}$$

so sieht man, dafs die Gröfse $\sqrt{\mu}$ die Entfernung von dem Mittelpunkte der Sonne ausdrückt, für welche die Kraft der Sonne gleich der Einheit ist; für diesen Fall geht die obige Gleichung

$$\frac{B^2}{a(1-e^2)} = Rr^2 \text{ in folgende über}$$

$$\frac{B^2}{a(1-e^2)} = \mu.$$

Es war aber auch $\frac{B^2}{a(1-e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$

Setzt man daher diese beyden Werthe von B einander gleich, so hat man

$$\sqrt{\mu} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T}$$

wie oben §. 4. I.

Um den Werth der constanten Gröfse $\sqrt{\mu}$ zu bestimmen, wollen wir wieder einen Planeten unseres Systemes z. B. Mars wählen. Die halbe grofse Achse der Marsbahn ist $a = 1.523693$ Halbmesser der Erdbahn, und seine Umlaufszeit um die Sonne

$$T = 686.97958 \text{ Tage.}$$

Substituirt man diese Werthe von a und T in der letzten Gleichung, so erhält man

$$\sqrt{\mu} = 0.0172021$$

Hätte man einfacher wieder die Erde gewählt, so ist für diese $a = 1$ und $T = 365.256384$, also wenn man diese Werthe von a und T in der vorhergehenden Gleichung substituirt

$$\log \sqrt{\mu} = 8.235582 \text{ oder } \sqrt{\mu} = 0.0172021 \ldots (8) \text{ wie zuvor.}$$

Dieser Werth von $\sqrt{\mu}$ ist also die Entfernung von dem Mittelpunkte der Sonne, in Theilen des Halbmessers der Erdbahn, für welche die Kraft der Sonne gleich der Einheit ist.

Nimmt man aber die Umlaufszeit T in Zeitsekunden, so wird man in der vorhergehenden Gleichung die in Tagen ausgedrückte Gröfse T durch $24 . (60)^2$ multipliciren, wodurch man erhält:

$$\log \sqrt{\mu} = 3.2990683, \quad \sqrt{\mu} = 0.000000199099 \ldots (9)$$

wo auch $\sqrt{\mu}$ in Halbmessern der Erdbahn ausgedrückt ist.

Wird T in Sekunden ausgedrückt, und sucht man den Werth von $\sqrt{\mu}$ in Theilen des Halbmessers der Erde selbst, so wird man den letzten Werth von $\sqrt{\mu}$ durch Sin $8''.6$ dividiren, wodurch man erhält

$$\log \sqrt{\mu} = 7.6789949, \quad \sqrt{\mu} = 0.004775236 \ldots (10)$$

wo $\sqrt{\mu}$ in Erdhalbmessern ausgedrückt ist.

Wird T in Sekunden ausgedrückt, und sucht man den Werth von $\sqrt{\mu}$ in geographischen Meilen, deren 15 auf einen Grad des Aequators, also 5400 auf den ganzen Aequator gehen, so wird man den letzten Werth von $\sqrt{\mu}$ durch $\frac{5400}{2\pi}$ multipliciren, wodurch man erhält:

$$\log \sqrt{\mu} = 0.6132088, \quad \sqrt{\mu} = 4.1040129 \ldots (11)$$

wo $\sqrt{\mu}$ in geographischen Meilen ausgedrückt ist.

Wird endlich wieder T in Sekunden ausgedrückt, und sucht man den Werth von $\sqrt{\mu}$ in Par. Fufsen, so wird man, vorausgesetzt, dafs die geographische Meile 22829 Par. Fufs hat, den letzten Werth von $\sqrt{\mu}$ durch diese Zahl multipliciren, wodurch man erhält

$$\log \sqrt{\mu} = 4.9716957, \quad \sqrt{\mu} = 93690.52 \ldots (12)$$

wo $\sqrt{\mu}$ in Par. Fufsen ausgedrückt ist. Diese verschiedenen Ausdrücke von $\sqrt{\mu}$ werden uns in der Folge nützlich seyn. Um die Abhängigkeit der beyden Constanten M und $\sqrt{\mu}$ zu bestimmen, hatte man

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{g T^2}, \text{ und } \mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Da aber in der ersten dieser Gleichungen a in Theilen des Erdhalbmessers oder $a = \frac{1}{\text{Sin } 8''.6}$, und in der zweyten a in Theilen des Halbmessers der Erdbahn, oder $a = 1$ angenommen wurde, so hat man

$$M = \frac{4\pi^2}{g T^2 \text{ Sin}^3 \, 8''.6} \text{ und } \mu = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\text{also auch } \mu = M . g \text{ Sin}^3 \, 8''.6$$

In der That hatten wir

$$\begin{aligned} \log M &= 5.5520103 \\ \log g &= 4.1859063 \\ \log \text{Sin}^3 \, 8''.6 &= 6.8602202 \\ \hline \log \mu &= 6.5981368 \\ \hline \log \sqrt{\mu} &= 3.2990684 \end{aligned}$$

übereinstimmend mit der Gleichung (9).

§. 6.

Wir haben gesehen, dafs, wenn die Kraft der Sonne sich verkehrt, wie das Quadrat der Entfernung verhält, die Planeten Kegelschnitte beschreiben, in deren einem Brennpunkte der Mittelpunkt der Sonne ist. Die Natur dieses Kegelschnittes, ob er eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, hängt von der Constante a, und die Gröfse oder Ausdehnung dieses Kegelschnittes hängt von der Constante p ab; diese beyden Constanten a und p aber werden durch die ursprünglichen Bedingungen der Bewegung bestimmt. Um diefs zu zeigen, sey für den Anfang der Bewegung eines Planeten A der Werth von r, und C die Geschwindigkeit, oder der anfängliche Werth von

$$\sqrt{\frac{dr^2 + r^2 \, d\nu^2}{dt^2}}.$$

Wir wollen annehmen, dafs der anfängliche Stofs, welcher den Planeten in Bewegung setzte, eine auf seine ursprüngliche Entfernung A senkrechte Richtung hatte, so ist die anfängliche Geschwindigkeit des Planeten nach der Richtung der A gleich Null,

oder es ist $\frac{dr}{dt} = 0$. Substituirt man also diese Werthe $r = A$ und $\frac{dr}{dt} = 0$ in der Gleichung

$$C^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\nu^2}{dt^2}, \text{ so ist } \frac{d\nu}{dt} = \frac{C}{A}$$

und wenn man diese Werthe von r, $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d\nu}{dt}$ in den beyden Gleichungen (6) des §. 4. substituirt, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu}{a} &= \frac{2\mu}{A} - C^2 \\ \sqrt{\mu p} &= AC \end{aligned}\right\} \ldots (13)$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, die Bahn eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, wenn a positiv, negativ, oder unendlich ist, so ist die Bahn

eine Ellipse, wenn $C < \sqrt{\frac{2\mu}{A}}$,

eine Hyperbel, wenn $C > \sqrt{\frac{2\mu}{A}}$

eine Parabel, wenn $C = \sqrt{\frac{2\mu}{A}}$ ist.

Ist endlich die Bahn ein Kreis, so ist $e = 0$, oder $p = a$, also die beyden Gleichungen (13)

$$\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{A} - C^2$$

$$\sqrt{\mu a} = AC$$

und daher, wenn man aus ihnen die Gröfse a eliminirt

$$C = \sqrt{\frac{\mu}{A}}$$

und dieses ist die Bedingungsgleichung, die statt haben mufs, wenn die Bahn ein Kreis ist.

I. Wir haben in dem Vorhergehenden angenommen, dafs die Richtung des ursprünglichen Stofses auf A senkrecht ist. Allein dieselben Schlüsse werden auch noch dann wahr seyn, wenn die Richtung des Stofses mit A irgend einen Winkel φ bil-

det, denn dann ist die anfängliche Geschwindigkeit in der Richtung von A

$$\frac{dr}{dt} = C \operatorname{Cos} \varphi$$

und überdiefs r = A wodurch die Gleichung

$$C^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\nu^2}{dt^2}$$ in folgende übergeht,

$\frac{d\nu}{dt} = \frac{C}{A} . \operatorname{Sin} \varphi$. Substituirt man diese Werthe von

$r, \frac{dr}{dt}$ und $\frac{d\nu}{dt}$ wieder in den Gleichungen (6), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu}{a} &= \frac{2\mu}{A} - C^2 \\ \sqrt{\mu p} &= AC \operatorname{Sin} \varphi \end{aligned}\right\}$$

von welchen die vorlezte mit der ersten der Gleichungen (13) übereinstimmt, daher die dort aus ihr gefolgerten Schlüsse auch hier gelten. Man sieht aus den beyden letzten Gleichungen, dafs die Natur des Kegelschnittes nur durch die anfänglichen Werthe von A und C bestimmt wird, und dafs diese Natur von dem Winkel φ ganz unabhängig ist, dafs aber die Dimension des Kegelschnittes, nach der zweyten dieser Gleichungen, von der Richtung φ des Stofses abhängt.

Da sonach die anfängliche Geschwindigkeit für die Ellipse und Hyperbel unzählige Werthe haben kann, die Parabel aber, und der Kreis nur bey einer einzigen gegebenen Geschwindigkeit entstehen können, so ist es unendlich wahrscheinlicher, dafs die Planeten und Kometen sich in Ellipsen oder Hyperbeln, als in Parabeln oder Kreisen um die Sonne bewegen; auch haben uns die Beobachtungen noch keine der beyden letzten unter den Bahnen der himmlischen Körper auffinden lassen.

§. 7.

Nach der ersten der Gleichungen (6) ist die Geschwindigkeit c in jedem Punkte der Bahn

$$c = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

In der Sonnennähe ist $r = a(1 - e) = q$ wo q die Distanz des Periheliums von dem Mittelpunkte der Sonne bezeichnet, also ist in der Sonnennähe

$$c = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{q} - \frac{1}{a}\right)} \text{ oder}$$

$$a = \frac{\mu q}{2\mu - c^2 q} \quad \ldots (14)$$

Nimmt man daher an, daſs der Planet in seiner Sonnennähe entstanden ist, wo also c dessen anfängliche Geschwindigkeit ist, so folgt aus der letzten Gleichung, daſs die Bahn

eine Ellipse ist für $c < \sqrt{\frac{2\mu}{q}}$

» Hyperbel » » $c > \sqrt{\frac{2\mu}{q}}$

» Parabel » » $c = \sqrt{\frac{2\mu}{q}}$

ein Kreis » » $c = \sqrt{\frac{\mu}{q}}$

weil für den Kreis in der Gleichung (14) die Gröſse $a = q$ wird. So lange also die anfängliche Geschwindigkeit c von dem Unendlichen bis zu $\sqrt{\frac{2\mu}{q}}$ abnimmt, bleibt die Bahn eine Hyperbel. Wenn die Geschwindigkeit diesen Werth $\sqrt{\frac{2\mu}{q}}$ erreicht, so entsteht für diesen einzigen Fall die Parabel; wenn die Geschwindigkeit noch weiter abnimmt bis zu $\sqrt{\frac{\mu}{q}}$, so entstehen Ellipsen, und für diesen besonderen Fall $c = \sqrt{\frac{\mu}{q}}$ entsteht der Kreis. Nimmt die Geschwindigkeit noch weiter ab, von $= \sqrt{\frac{\mu}{q}}$ bis $c = 0$, so entstehen wieder Ellipsen, aber dann ist der Anfangspunkt der Bewegung nicht das Perihelium, sondern das Aphelium der Bahn. Die Parabel ist daher die Gränze zwischen den Hyperbeln und Ellipsen, wenn die Bewegung in der Sonnennähe anfängt, und der Kreis ist die Gränze zwischen jenen Ellipsen, wo die Bewegung in der Sonnennähe, und jenen, wo sie in der Sonnenferne anfängt.

Um das Vorhergehende auf unsere Erde anzuwenden, hat man für die Distanz des Periheliums $q = a(1 - e)$ also für die Geschwindigkeit der Erde im Perihelium

$$c = \sqrt{\frac{\mu (1+e)}{a (1-e)}}$$

Für die Erde ist a = 1, e = 0.01678 und nach der Gleichung (11)

$$\log \sqrt{\mu} = 0.6132088$$

$$\log \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 0.0072882$$

$$\log c = 0.6204970$$

oder c = 4.1735 geographische Meilen für den Raum, welchen die Erde in ihrer Sonnennähe während einer Zeitsekunde zurücklegt. Substituirt man aber dieselben Werthe von a = 1 und q = a (1—e) = 0.98322 in den vorhergehenden Ausdrücken von c für die Parabel und den Kreis, so erhält man $\sqrt{\frac{2\mu}{q}} = 5.8533$ und $\sqrt{\frac{\mu}{q}} = 4.1389$ geogr. Meilen.

Wäre also die Erde in ihrer Sonnennähe entstanden, und wäre ihre anfängliche Geschwindigkeit während der ersten Sekunde 5.8533 Meilen gewesen, so würde sie sich in einer Parabel von der Sonne entfernt haben; wäre diese anfängliche Geschwindigkeit 4.1389 Meilen gewesen, so würde sie sich in einem Kreise um die Sonne bewegen. Eine gröfsere Geschwindigkeit als 5.8533 würde eine Hyperbel, eine kleinere als 5.8533 eine Ellipse und eine kleinere als 4.1389 endlich würde wieder eine Ellipse gegeben haben, in welcher aber der Anfangspunkt der Bewegung die Sonnenferne der Erde gewesen wäre. Man sieht aus diesen Zusammenstellungen, dafs die Bahn der Erde eine nahe kreisförmige Ellipse seyn mufs, da ihre Geschwindigkeit von jener des Kreises nur wenig verschieden ist.

Eben so ist, wenn q' = a (1 + e) ist, die Geschwindigkeit in der Sonnenferne

$$c' = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{q'} - \frac{1}{a}\right)} \text{ oder}$$

$$a = \frac{\mu q'}{2\mu - c'^2 . q'}$$

woraus folgt, dafs, wenn der Planet seine Bewegung in der Sonnenferne anfing, die anfängliche Geschwindigkeit für die Hyperbel gröfser als $\sqrt{\frac{2\mu}{q'}}$, für die Parabel gleich $\sqrt{\frac{2\mu}{q'}}$, für die Ellipse kleiner als $\sqrt{\frac{2\mu}{q'}}$, und für den Kreis gleich $\sqrt{\frac{\mu}{q'}}$ ist.

Ist endlich die Geschwindigkeit noch kleiner als $\sqrt{\frac{\mu}{q'}}$, so ist die Bahn zwar wieder eine Ellipse, aber ihr Anfangspunkt in der Sonnennähe.

Aus dem Vorhergehenden sieht man zugleich, daſs die anfängliche Geschwindigkeit in der Parabel zu der in dem Kreise sich wie $\sqrt{2}$ zu 1 verhält.

I. Die früheren Schriftsteller über Mechanik pflegten den Raum, welchen der Körper in der gegebenen Zeiteinheit dt nach der Richtung der Tangente seiner Bahn zurücklegt, die Tangential-Kraft, und den nach der Richtung des Radius Vectors zurückgelegten Raum die Normal-Kraft zu nennen. Bezeichnet man die Tangential-Kraft durch τ, so ist offenbar τ, was vorhin C war. Die Normal-Kraft ϱ aber ist in dem Anfange des ersten Augenblickes der Bewegung gleich Null, und am Ende dieses Augenblickes gleich $\frac{\mu}{A^2}$ so daſs während der Dauer des ersten Augenblickes die Normal-Kraft durch

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2}\mu}{A^2}$$

ausgedrückt wird. Setzt man daher in der ersten der Gleichungen (13) $C = \tau$ und $\frac{\mu}{A} = 2A\varrho$, so erhält man

$$a = \frac{2A^2\varrho}{4A\varrho - \tau^2}$$

also die Bahn

eine Hyperbel, wenn $\tau > 2\sqrt{A\varrho}$
» Parabel, » $\tau = 2\sqrt{A\varrho}$
» Ellipse, » $\tau < 2\sqrt{A\varrho}$
ein Kreis, » $\tau = \sqrt{2A\varrho}$ ist.

II. Um die vorhergehenden Betrachtungen auch auf einen Kometen anzuwenden, wollen wir den groſsen Kometen von 1680 wählen, dessen Bahn sehr excentrisch ist. Nach den neuesten Untersuchungen ist für die Bahn desselben

$a = 426.7736$ Halbmesser der Erdbahn, und
$e = 0.9999854\text{2}$ in Theilen von a; die Gleichung

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{\frac{3}{2}}$ gibt, wenn man nach der Gleichung (8)

$\log \sqrt{\mu} = 8.2355820$ setzt, für die Umlaufszeit des Kometen

$T = (365{,}256384) \cdot a^{\frac{3}{2}} = 3220284$ Tage, oder 8816.65 Julianische Jahre, jedes derselben zu $365\frac{1}{4}$ Tagen genommen.

Die Geschwindigkeit, oder der in einer Sekunde zurückgelegte Raum ist

$$\text{im Perihelium } \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}} = 73.577 \text{ Meilen}$$

$$\text{im Aphelium } \sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}} = 0.0005364 \text{ Meilen}$$

$$= 12.24 \text{ Par. Fuſs},$$

also auch die heliocentrische Winkelbewegung während einer Zeitsekunde im Perihelium 118″.324 und im Aphelium 0″.0000000006288, oder der Komet legt aus dem Mittelpunkte der Sonne gesehen, während einer Stunde im Perihelium den Winkel von 118.324 Graden zurück, während er im Aphelium 1840 Tage braucht, um den Winkel von einer Raumsekunde zurückzulegen. Da ferner $a(1-e) = 128260$ Meilen und der Halbmesser der Sonne 93900 Meilen ist, so ist im Perihelium die Entfernung des Kometen von der Oberfläche der Sonne 34360 Meilen oder nahe $\frac{7}{10}$ der Entfernung des Mondes von der Erde. Im Aphelium aber ist die Entfernung des Kometen von der Sonne über 17590 Millionen Meilen. Ist endlich $\operatorname{Sin}\alpha = \frac{93900}{a(1-e)}$ und $\operatorname{Sin}\alpha' = \frac{93900}{a(1+e)}$ so sieht man von dem Kometen den Durchmesser der Sonne in Perihelium unter dem Winkel $2\alpha = 94^\circ\ 8'$, und im Aphelium unter dem Winkel $2\alpha = 2''.2$

§. 8.

Noch muſs bemerkt werden, daſs der oben bestimmte Werth von $\sqrt{\mu}$ zwar für alle Planeten und Kometen unseres Sonnensystemes, aber nicht für die Satelliten der ersten gehört, da diese mit ihren Hauptplaneten gleichsam abgesonderte Systeme bilden, in deren jedem die Gröſse $\sqrt{\mu}$ einen eigenen Werth hat. So ist für die Erde und ihren Mond, wenn $T = 27\ 32166,60^2.24$ die siderische Umlaufszeit des Mondes in Zeitsekunden, und $a = 60.46085$ die mittlere Entfernung des Mondes von dem Mittelpunkte der Erde in Erdhalbmessern ist

$$\sqrt{\mu} = \frac{2\pi\ a^{\frac{3}{2}}}{T} = 0.001251327 \text{ Erdhalbmesser, oder wenn man}$$

diese Gröſse durch $\frac{5400}{2\pi}$ multiplicirt, $\sqrt{\mu} = 1.075136$ geographische Meilen.

I. Man suche die anfängliche Geschwindigkeit, mit welcher ein Körper auf der Oberfläche der Erde in horizontaler Richtung gewor-

fen werden müfste, um einen Kreis um die Erde zu beschreiben. Nach §. 6. hat man für diese anfängliche Geschwindigkeit

$$C = \sqrt{\frac{\mu}{A}},$$

wo A die anfängliche Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde, also $A = 1$ ist. Es ist daher $C = \sqrt{\mu} = 1.075136$ Meilen, oder 24544 Fufs, und die Umlaufszeit des Körpers um die ganze Erde ist

$$\frac{5400}{1.075136} = 5023'' = 1^h\ 23'\ 43''.$$

Wäre $C = \sqrt{\frac{2\mu}{A}} = 1.521$ Meilen, so würde der Körper eine Parabel um die Erde beschreiben, deren Anfangspunkt im Perigäum ist. Die Uebereinstimmung dieses Resultates mit dem, welches wir Cap. VI §. 6. für dieselbe Aufgabe erhalten haben, zeigt, dafs die Kraft der Schwere, welche die Körper auf der Oberfläche der Erde zu ihrem Mittelpunkte zieht, dieselbe ist, welche den Mond in seiner Bahn um die Erde bewegt. Um diese Identität noch auf einem anderen Wege zu untersuchen, so folgt aus der angenommenen siderischen Umlaufszeit des Mondes von $T = 27.321661$ Tagen, dafs dieser Körper sich während einer Sekunde in seiner Bahn um den Bogen $\alpha = \frac{15}{T} = 0''.54901$ bewegt. Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde ist 60.46085 Erdhalbmesser, oder in Par. Fufsen ausgedrückt, gleich

$$r = (60.46085)\ \frac{(5400)}{2\pi}\ (22829)$$

$$\text{oder} \qquad r = 1186247100 \text{ Fufs.}$$

Der Sinus Versus des Bogens α aber ist gleich

$$2r \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{r\alpha^2}{2} \operatorname{Sin}^2 1''$$

das heifst, wenn man statt r und α die vorhergehenden Werthe substituirt 0.004202 Fufs, und dieses ist der Raum, um welchen der Mond durch die Anziehung der Erde in einer Sekunde gegen die Erde fällt. Wenn also die Kraft der Erde sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält, so würde der Mond, wenn er der Erde 60.46085 mahl näher wäre, oder so würde der Mond auf der Oberfläche der Erde während einer Sekunde durch den Raum $(0.004202)\ (60.46085)^2$ das heifst durch 15.36 Fufs fallen, also nahe eben so viel, wie die Körper auf der Oberfläche der Erde unseren Beobachtungen gemäfs in der That während der ersten Sekunde fallen. Die vorhergehende Be-

rechnung wird noch eine genauere Uebereinstimmung, oder ein der Zahl $\frac{1}{2}$ g = 15.0514 (Cap. V) noch näheres Resultat geben, wenn man mehrere kleine Correctionen berücksichtiget, welche wir der Kürze wegen vernachlässigt haben: so wird die Central-Kraft der Erde in ihrer Wirkung auf den Mond durch die Anziehung der Sonne um den 358sten Theil dieser Central-Kraft vermindert, und durch die Masse des Mondes um ihren 59sten Theil vermehrt, so wie die Schwere $\frac{1}{2}$ g durch die Rotation der Erde an dem Aequator um ihren 288sten Theil vermindert wird etc. Aber schon das Vorhergehende ist hinreichend, die Identität beyder Kräfte aufser Zweifel zu setzen.

§. 9.

Wir haben oben gesehen, dafs sich die Flächen, welche der Radius Vector eines gegebenen Planeten in verschiedenen Zeiten beschreibt, wie diese Zeiten verhalten. Um noch zu sehen, wie sich die Flächen verschiedener Planeten gegen einander verhalten, so hatte man

$$\tfrac{1}{2}\,Bt = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\nu,\quad \frac{B^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\ \text{und}\ \mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

Ist aber S die Fläche des elliptischen Sectors, welche der Radius Vector r in der Zeit t beschreibt, so ist $S = \frac{1}{2}\int r^2\,d\nu$, also geben die vorhergehenden Gleichungen, wenn man aus ihnen die Gröfsen B und T eliminirt,

$$S = \tfrac{1}{2}\,t\,.\,\sqrt{\mu p}$$

oder da μ eine Constante ist, so verhalten sich bey verschiedenen Planeten desselben Systemes die Flächen, wie die Produkte aus den Zeiten in die Quadratwurzel der Parameter ihrer Bahnen.

I. In der Gleichung $M = \frac{4\pi^2 a^3}{g T^2}$ des §. 5. bezeichnet a die halbe grofse Achse und T die siderische Umlaufszeit eines Planeten, und M die Masse des Central-Körpers, die Masse des Planeten als Einheit vorausgesetzt. In einem anderen Systeme sey m die Masse des Central-Körpers und a′ T′ die halbe grofse Achse, und die Umlaufszeit eines Planeten um diesen zweyten Central-Körper, so ist eben so

$$m = \frac{4\pi^2 a'^3}{g T'^2}\ \text{also:}$$

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \cdot \left(\frac{T'}{T}\right)^2 \quad \ldots\ (15)$$

Diese Gleichung enthält das dritte Gesetz Keplers, auf verschiedene Systeme angewendet, und sie dient, die Massen derjeni-

gen Planeten zu bestimmen, um welche sich Satelliten bewegen, da diese Körper unseres Sonnen-Systemes gleichsam eigene Systeme für sich bilden. Für Jupiter z. B. ist seine mittlere Entfernung von der Sonne $a = 5.20279$ Halbmesser der Erdbahn, und seine siderische Umlaufszeit $T = 4332.59631$ Tage. Für seinen vierten Satelliten aber ist die Umlaufszeit um Jupiter $T' = 16.68877$ Tage und die mittlere Entfernung desselben von dem Mittelpunkte Jupiters (II Thl. p. 241) gleich 26,998 Halbmesser Jupiters. Allein der Halbmesser Jupiters erscheint in seiner mittleren Entfernung von der Sonne, aus dem Mittelpunkte der Sonne gesehen, unter dem Winkel von 13″.37 (a, a. O.), also ist der Halbmesser Jupiters gleich a. tang 18″.371 Halbmesser der Erdbahn, und daher die mittlere Entfernung des vierten Satelliten von dem Mittelpunkte Jupiters $a' = (26\,998)$ a. tang $18''.371 =$ $= 0.01251053$ Halbmesser der Erdbahn. Substituirt man diese Werthe von aa' und TT' in der letzten Gleichung, so erhält man

$$\frac{M}{m} = 1067$$

für die Masse der Sonne, die Masse Jupiters als Einheit vorausgesetzt.

Für die Erde ist eben so $a = 1$ und $T = 365.256384$ und für den Mond $T = 27.32166$ Tage. Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde aber ist 60.46085 Erdhalbmesser, oder $a' = (60\,46085)$ Sin $8''\,6 = 0.002520854$ Halbmesser der Erdbahn. Substituirt man diese Werthe von aa' und TT' in der Gleichung (15) so ist

$$\frac{M}{m} = 349280$$

die Masse der Sonne gegen die der Erde. Die Ursache der Verschiedenheit dieser Angabe von der des §. 5. liegt vorzüglich in der Sonnen-Parallaxe, deren geringste Aenderung auf den Werth von $\frac{M}{m}$ schon einen sehr merkbaren Einfluſs äuſsert.

II. Vergleicht man die Gleichungen III. des §. 4., von welchen wir bey allen gegenwärtigen Untersuchungen ausgegangen sind, mit den letzten Gleichungen des §. 4 Cap. II, so sieht man, daſs die constante Gröſse μ nicht sowohl der Masse M des Central-Körpers, als vielmehr der Summe der Massen $(M+m)$ beyder Körper proportional ist. Sucht man nähmlich die absolute Bewegung des Körpers m, so ist, wie die Gleichungen des §. 3. Nro. II. des zweyten Capitels zeigen, der Faktor μ der Masse des anziehenden Körpers proportional: sucht man aber bloſs die relative Bewegung des Körpers m um M, so ist, wie

die Gleichungen § 4 Nro. III und IV desselben Capitels zeigen, der Faktor μ der Summe der Massen (M + m) proportional. Die Vergleichung beyder Gattungen von Gleichungen zeigt also, daſs die relative Bewegung des Körpers m um M, den letzten als ruhend betrachtet, so bestimmt wird, als wenn man die Bewegung von m überhaupt unter der Voraussetzung suchte, daſs m von M mit der Kraft (M + m) angezogen wird. Die oben gegebene Gleichung $\sqrt{\mu} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T}$ des §. 4. I ist daher eigentlich, wenn man μ der Gröſse M + m proportional setzt

$$\sqrt{M + m} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T}$$

Das dritte Gesetz Keplers, nach welchem für alle Planeten unseres Sonnen-Systemes die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Würfel der groſsen Achsen verhalten, ist also nur dann als genau richtig anzunehmen, wenn man für alle Planeten die Gröſse M + m als eine beständige Gröſse betrachten könnte, d. h. wenn die Masse m eines jeden Planeten gegen die Masse M der Sonne als verschwindend angesehen werden kann, was in der That auch nahe der Fall ist. Erlaubt man sich aber diese Voraussetzung weder bey den Planeten gegen die Sonne, noch bey den Satelliten gegen ihre Hauptplaneten, und nennt man, wie zuvor, m, a, T die Masse, mittlere Entfernung von der Sonne, und Umlaufszeit des Planeten, und m′ a′ T′ die Masse, mittlere Entfernung von dem Planeten, und Umlaufszeit des Satelliten so ist

$$\sqrt{M + m} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T} \text{ und } \sqrt{m + m'} = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{T'}$$

also auch

$$\frac{M + m}{m + m'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2 \quad \ldots . \; (16)$$

und diese Gleichung ist es, die statt der (15) substituirt werden muſs. Vernachlässigt man in dem letzten Ausdrucke die gegen die Einheit äuſserst kleine Gröſse $\frac{m'}{M + m}$, so erhält man

$$\frac{m}{M + m} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2 = \frac{\frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}}$$

also auch

$$\frac{m}{M} = \frac{\left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2}{1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2}$$

und diese letzte Gleichung wird man genauer statt der (15) brauchen, um die Massen derjenigen Planeten gegen die Sonnenmasse zu bestimmen, welche mit Satelliten umgeben sind.

III. Ist für irgend einen Planeten a seine Entfernung von der Sonne, ϱ sein aus dem Mittelpunkte der Sonne in der Entfernung a gesehener scheinbarer Halbmesser, R sein wahrer Halbmesser, O der Flächeninhalt seiner Oberfläche, V sein Volum oder sein körperlicher Inhalt, m seine Masse, d die Dichtigkeit seiner Masse, und g die Fallhöhe der Körper in der ersten Sekunde auf der Oberfläche der Planeten, und bezeichnet man für einen andern Planeten dieselben Gröſsen durch a' ϱ' R'.... so hat man die Gleichungen:

$$\frac{d}{d'} = \frac{m}{m'} \cdot \left(\frac{R'}{R}\right)^3, \quad \frac{g}{g'} = \frac{m}{m'} \left(\frac{R'}{R}\right)^2$$

$$\frac{O}{O'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2, \quad \frac{V}{V'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^3$$

$$\text{und } \sin \varrho = \frac{R}{a}, \quad \sin \varrho' = \frac{R'}{a'}$$

Gehören z. B. die a' ϱ' R'... für die Erde, und a ϱ R... für Jupiter, so hat man

$$m' = \frac{1}{356460} \text{ der Sonnenmasse.}$$

$$R' = \frac{5400}{2\pi} = 859.4366 \text{ geogr. Meilen, und } \varrho' = 8''.6$$

Ist aber R der Halbmesser einer Kugel, so ist die Oberfläche derselben $4 R'^2 \pi$ und ihr Volum $\frac{4}{3} R'^3 \pi$, also der Erde Oberfläche

$O' = 9281916$ Quadr. Meilen, und ihr Volum
$V' = 2659073100$ Kubik-Meilen

Für Jupiter ist $m = \frac{1}{1067}$ der Sonnenmasse, und die halbe groſse Achse seiner Bahn

5.2027911 Halbmesser der Erdbahn also

$$a = (5.2027911) \frac{5400}{2\pi \text{ Sin}: 8''.6} \text{ Meilen.}$$

Ferner ist (nach Nro. I) $\varrho = 18''.37$ also nach der obigen Gleichung $R = a \operatorname{Sin} \varrho = 9551.27$ Meilen, der Halbmesser Jupiters. Für dessen Oberfläche ist $\frac{O}{O'} = 123{,}5077$, oder $O = 1146$ Millionen Quadr. Meilen, und für den körperlichen Inhalt $\frac{V}{V'} = 1372.592$ oder $V = 3649821$ Millionen Kubik-Meilen. Für das Verhältnifs der Schweren auf der Oberfläche Jupiters und der Erde ist

$$\frac{g}{g'} = \frac{m}{m'} \left(\frac{R'}{R}\right)^2 \text{ also } \frac{g}{g'} = 2.7049 \text{ und da}$$

$g' = 15.0514$ Fufs, so ist $g = 40.7125$ oder die Körper fallen auf der Oberfläche Jupiters in der ersten unserer Sekunden durch 40.7125 Par. Fufs, wenn man auf die durch die schnelle Rotation dieses Planeten entstehende Centrifugal-Kraft keine Rücksicht nimmt. Das Verhältnifs der Dichtigkeiten beyder Massen endlich ist

$$\frac{d}{d'} = \frac{m}{m'} \left(\frac{R'}{R}\right)^3 = 0.2434$$

Gehörten die Gröfsen $m'R'\ldots$ für die Erde, und $m\,R\ldots$ für die Sonne, so ist $\frac{m}{m'} = 356460$ und nahe $\frac{R'}{R} = \frac{1}{113}$ also geben jene zwey ersten Gleichungen

$$\frac{d}{d'} = 0{,}25 \text{ und } \frac{g}{g'} = 27.92 \text{ und } g = 420 \text{ Par. Fufs.}$$

oder die Erde ist viermahl dichter als die Sonne, und die Körper fallen in der ersten Sekunde auf der Oberfläche der Sonne durch 420 Par. Fufs.

M a s k e l y n e fand durch die bekannten von C a v e n d i s h auf einem anderen Wege bestätigten Versuche, dafs die Dichte der Erde nahe viermahl gröfser ist, als die des reinen Wassers, woraus also folgt, dafs die Dichte der Sonne, so wie die des Jupiters, ebenfalls nahe der Dichte unseres Wassers gleich ist.

§. 10.

In allem Vorhergehenden haben wir, um die Bewegung der Planeten um die Sonne, und der Satelliten um ihre Hauptplaneten zu bestimmen, alle diese Körper als P u n k t e angenommen. Da aber offenbar alle Elemente eines Planeten von jedem Elemente der Sonne im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung beyder Elemente angezogen werden, so wäre es möglich, dafs die vorhergehenden Resultate durch die Gröfse und Gestalt der Körper unseres Systemes, auf welche wir bisher

keine Rücksicht genommen haben, beträchtliche Aenderungen leiden.

Diese Körper haben alle, wenn man die kleinen Abplattungen derselben vernachlässigt, die Gestalt einer Kugel. Wir wollen zuerst annehmen, daſs die Dichte dieser kugelförmigen Massen bey jedem dieser Körper in allen seinen Theilen dieselbe sey.

Dieses vorausgesetzt, suchen wir die Anziehung einer Kugel, deren Halbmesser a ist, auf einen auſser ihr gelegenen Punkt, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte der Kugel gleich A ist. Eine auf die Linie zwischen diesen beyden Punkten senkrechte Ebene schneide die Kugel in einem Kreise, dessen Halbmesser r, und dessen Entfernung von dem Mittelpunkte der Kugel x, also von dem angezogenen Punkte A — x seyn soll. Nennt man dm ein Element der Peripherie dieses Kreises, so ist die Entfernung f dieses Elementes von dem angezogenen Punkte $f = \sqrt{(A-x)^2 + r^2}$, also auch die Kraft, mit welcher der Punkt von diesem Elemente in der Richtung der Distanz f angezogen wird, gleich $\frac{dm}{f^2}$. Diese Kraft läſst sich in zwey andere unter einander senkrechte zerlegen, deren die erste $\frac{dm}{f^2} \cdot \frac{A-x}{f}$ die Richtung von f, und die zweyte $\frac{dm}{f^2} \cdot \frac{r}{f}$ die Richtung des Durchmessers des Kreises hat, zu welchem das Element dm gehört. Da aber an dem anderen Endpunkte dieses Durchmessers wieder ein ähnliches Element des Kreises ist, dessen Anziehung $-\frac{dm}{f^2} \cdot \frac{r}{f}$ der letzten gleich, aber in der Richtung entgegengesetzt ist, so heben sich diese zweyten Kräfte, deren Richtungen alle in der Ebene des Kreises liegen, auf, und es bleibt daher bloſs die Kraft $\frac{dm}{f^2} \cdot \frac{A-x}{f}$, nach der auf dem Kreise senkrechten Richtung, oder nach der Richtung der geraden Linie übrig, welche den angezogenen Punkt mit dem Mittelpunkt der Kugel verbindet.

Denken wir uns irgend einen seiner Lage nach unveränderlichen Halbmesser dieses Kreises, und nennen wir ϑ den Winkel, welchen der Halbmesser r des Elementes dm mit jenen fixen Halbmesser bildet, so ist $r\,d\vartheta$ das Element des Bogens, und $r\,d\vartheta\,dr$ das Element der Fläche dieses Kreises. Betrachtet man daher diesen Kreis als einen körperlichen Theil der Kugel oder als eine Kreisscheibe, deren Dicke dx ist, so ist das Element dieser Kreisscheibe, also auch das Element der Kugel $dm = r\,d\vartheta\,dr\,dx$. Substituirt man diesen Werth von dm in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\frac{dm}{f^2} \cdot \frac{A-x}{f}$, so erhält man für die Anziehung der ganzen Kugel

$$R = \iiint \frac{(A-x)\, r\, dr \,.\, d\vartheta \,.\, dx}{f^3}$$

Integrirt man diesen Ausdruck zuerst in Beziehung auf den Winkel ϑ, so hat man, da $f = \sqrt{(A-x)^2 + r^2}$ von ϑ unabhängig ist

$$R = \iint \frac{(A-x)\, r\, dr \,.\, dx}{f^3} \; (\vartheta + \text{Const.})$$

oder da dieses Integral von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ genommen werden muſs,

$$R = \iint \frac{2\pi (A-x)\, r\, dr \,.\, dx}{[(A-x)^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Integrirt man dann in Beziehung auf r, so ist

$$R = \int 2\pi (A-x)\, dx \left\{ \text{Const.} - \frac{1}{\sqrt{(A-x)^2 + r^2}} \right\}$$

oder da dieses Integral von $r = 0$ bis $r = \sqrt{a^2 - x^2}$ genommen werden soll,

$$R = \int 2\pi (A-x)\, dx \left\{ \frac{1}{A-x} - \frac{1}{\sqrt{A^2 + a^2 - 2Ax}} \right\}$$

und wenn man endlich in Beziehung auf x integrirt

$$R = \text{Const.} + 2\pi x + \frac{2\pi}{3A^2}(2A^2 - a^2 - Ax) \,.\, \sqrt{A^2 + a^2 - 2Ax}$$

und dieses ist die Anziehung, welche der äuſsere Punkt von dem Theile der Kugel leidet, welcher zu der Abscisse x gehört. Sucht man also die Anziehung der g a n z e n Kugel, so wird man das letzte Integral zwischen den Werthen $x = a$ und $x = -a$ nehmen, wodurch man erhält

$$R = 4\pi a + \frac{2\pi}{3A^2}(2a^3 - 6A^2 a) \text{ oder } R = \frac{4\pi a^3}{3A^2}$$

Es ist aber der körperliche Inhalt, oder die Masse M einer Kugel, deren Halbmesser a ist, gleich $M = \frac{4}{3}\pi a^3$, also ist auch die Anziehung der ganzen Kugel auf einen Punkt, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte der Kugel A ist, gleich

$$R = \frac{M}{A^2}$$

oder die Anziehung der Kugel auf einen äuſseren Punkt verhält sich wie die Masse der Kugel dividirt durch das Quadrat der Entfernung des Punktes. Diese Anziehung ist also dieselbe, als wenn die ganze Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkte vereiniget wäre.

Es ist daher erlaubt, bey der Untersuchung der Wirkung der gegenseitigen Anziehung der himmlischen Körper, diese letzten als bloſse Punkte zu betrachten, in welchen ihre Massen vereiniget sind.

Nennt man Δ die Dichte der Masse, aus welcher die Kugel besteht, so wird man in dem Vorhergehenden $dm = \Delta\, r\, d\vartheta\, dr\, dx$ setzen. Ist diese Dichte durch die ganze Kugel dieselbe, oder ihre Masse gleichartig, so ändert dieser constante Faktor Δ in dem Ausdrucke von dm nichts in den drey vorhergehenden Integrationen, und man erhält als Endresultat für die Anziehung der ganzen Kugel

$$R = \frac{4\pi a^3 \Delta}{3 A^2}$$

wo $\frac{4\pi a^3}{3}$ das Volum, oder den körperlichen Inhalt, und Δ die Dichte, also beyder Produkt die Masse M der Kugel bezeichnet, so daſs man also wieder hat

$$R = \frac{M}{A^2}$$

Eine andere nächst kleinere, mit jener concentrische Kugel, wird also den äuſseren Punkt nach demselben Gesetze anziehen, also auch die Differenz beyder Kugeln, das heiſst, eine Kugelschale zieht einen äuſseren Punkt ebenfalls im geraden Verhältnisse ihrer Masse und im verkehrten des Quadrats ihrer Entfernung an.

Wäre die Dichte der ganzen Kugel nicht gleichförmig, sondern, wie es bey den himmlischen Körpern sehr wahrscheinlich ist, gegen den Mittelpunkt nach irgend einem Gesetze zunehmend, so daſs die Dichte jedes Elementes der Masse eine Funktion der Entfernung des Elementes von dem Mittelpunkte der Kugel ist, so kann man sich eine solche Kugel als aus unzähligen Kugelschalen bestehend denken, deren jede eine bestimmte Dichte hat, und den äuſseren Punkt nach dem Vorhergehenden mit der Kraft $\frac{m}{A^2}$ anzieht, wenn m die Masse der Kugelschale, und A die Entfernung ihres Mittelpunktes von dem äuſseren Punkte ist. Nennt man dann m' m''... die Massen der nächstfolgenden Kugelschalen, so ist die Kraft aller dieser Kugelschalen, d. h. die Kraft der ganzen Kugel

$$R = \frac{m + m' + m'' + \ldots}{A^2}$$

also wieder

$$R = \frac{M}{A^2},$$

wenn $M = m + m' + m'' \ldots$ die Masse der ganzen Kugel bezeichnet. Die Körper des Himmels ziehen also einander so an, als ob ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereiniget wären, und zwar nicht bloſs, weil ihre Distanzen von einander in Beziehung auf die Dimensionen dieser Körper selbst sehr groſs sind, sondern auch, weil ihre Gestalt von der einer Kugel sehr wenig verschieden ist.

§. 11.

Es ist interessant, zu untersuchen, ob diese Anziehung der Kugeln auch noch bey anderen Gesetzen, als dem der Natur, statt haben kann. Wir wollen also die Gesetze der Anziehung suchen, für welche eine Kugel, oder was hier, nach dem Vorhergehenden, dasselbe ist, für welche eine Kugelschale einen auſser ihr gelegenen Punkt so anzieht, als ob die ganze Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereiniget wäre.

Wenn man die Elemente eines Körpers auf rechtwinklichte Coordinaten x, y, z bezieht, so kann man sich den Körper als in unzählige unendlich kleine rechtwinklichte Parallelepipeda getheilt vorstellen, deren Seitenlinien den Achsen der x y und z parallel sind, so daſs also das Volum eines Elementes des Körpers durch das dreyfache Produkt $dx \cdot dy \cdot dz$ ausgedrückt wird.

Allein zu unserer gegenwärtigen Absicht wird es bequemer seyn, $x = r \operatorname{Cos} \vartheta$, $y = r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} w$ und $z = r \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} w$ zu setzen, wodurch (Cap. I §. 16.) das Element des Körpers durch $r^2\, dr\, dw\, d\vartheta \operatorname{Sin} \vartheta$ ausgedrückt wird.

Da in diesem Ausdrucke die Entfernung r nach der einen oder auch nach der entgegengesetzten Seite verlängert, doch immer als positiv angesehen wird, also r immer positiv ist, so wird der Punkt A im Raume vollkommen bestimmt seyn, wenn der Winkel ϑ nur zwischen 0 und 180° genommen wird, während der Winkel w von 0° bis 360° wachsen kann. Wird also der vorige Ausdruck auf den ganzen Körper ausgedehnt, so wird man dessen Integral in Beziehung auf ϑ nur zwischen den Gränzen 0 und 180, das in Beziehung auf w aber zwischen 0 und 360° nehmen.

I. Dieſs vorausgesetzt sey ϱ die Distanz des äuſseren Punktes vom Mittelpunkte der Kugelfläche, und r der Halbmesser der Kugelfläche; ϑ der Winkel, welchen der Halbmesser r mit der Distanz ϱ bildet, und w der Winkel, welchen eine Ebene, die durch r und ϱ geht, mit einer fixen Ebene, die durch r geht, macht, so ist das Element der Kugelfläche nach dem Vorhergehenden gleich

$$dm = r^2 \operatorname{Sin} \vartheta \cdot dr\, d\vartheta\, dw.$$

Nennt man dann f die Entfernung dieses Elementes von dem äusseren Punkte, so ist

$$f^2 = \varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \operatorname{Cos} \vartheta$$

Stellt man die noch unbekannte Anziehung in der Entfernung f durch φ (f) vor, so ist die Anziehung des Elementes, parallel mit der Richtung der Linie ϱ zerlegt, gleich dm multiplicirt durch den Cosinus des Winkels der Linien r f, oder da dieser Cosinus $\frac{\varrho - r \operatorname{Cos}. \vartheta}{f}$ ist, und da nach der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{\varrho - r \operatorname{Cos} \vartheta}{f} = \left(\frac{df}{d\varrho}\right) \text{ ist,}$$

so ist diese Anziehung gleich $\varphi (f) . \left(\frac{df}{d\varrho}\right)$ dm. Bezeichnet man also durch Φ (f) das Integral $\int df . \varphi (f)$, so wird die Anziehnng der ganzen Kugelfläche parallel mit der Linie ϱ, welche den äusseren Punkt mit dem Mittelpunkte der Schale verbindet, durch das Integral ausgedrückt seyn.

$$R = r^2 \, dr \int dw . d\vartheta \operatorname{Sin} \vartheta . \Phi (f)$$

wenn man dasselbe in Beziehung auf ϱ differentiirt und nach der Differentiation durch $d\varrho$ dividirt.

Dieses Integral von $w = o$ bis $w = 2 \pi$ genommen, wo $\pi = 3.14159 \ldots$ gibt

$$R = 2 \pi r^2 \, dr \int d\vartheta \operatorname{Sin} \vartheta . \Phi (f.)$$

Aber, wenn man die erste der vorhergehenden Gleichungen in Beziehung auf f und ϑ differentiirt, so erhält man

$$d\vartheta \operatorname{Sin} \vartheta = \frac{f \, df}{\varrho r}, \text{ also ist auch}$$

$$R = \frac{2 \pi r \, dr}{\varrho} . \int f \, df . \Phi (f)$$

Nach der vorhergehenden Anmerkung wird man das Integral in Beziehung auf ϑ nur zwischen den Gränzen $\vartheta = o$ und $\vartheta = \pi$ das heifst: zwischen den Gränzen $f = \varrho - r$ und $f = \varrho + r$ nehmen. Nennt man daher ψ (f) die Gröfse $\int f \, df . \Phi$ (f), so hat man

$$R = \frac{2 \pi r \, dr}{\varrho} . [\psi (\varrho + r) - \psi (\varrho - r)]$$

II. Bleiben wir bey dem letzten Ausdrucke von R einen Augenblick stehen. Für das Gesetz der Natur haben wir $\varphi (f) = \frac{1}{f^2}$ also $\Phi (f) = -\frac{1}{f}$, und daher $\psi (f) = - f$, also auch

$$\psi (\varrho + r) = - (\varrho + r), \text{ und } \psi (\varrho - r) = - (\varrho - r).$$

Dieser Ausdruck von R geht daher für das Gesetz der Natur in den folgenden über

$$R = -\frac{4\pi r^2 dr}{\varrho}$$

und da nach dem Vorhergehenden die Anziehung der ganzen Kugelschale $\left(\frac{dR}{d\varrho}\right)$ ist, so hat man, wenn man den letzten Ausdruck von R in Beziehung auf R und ϱ differentiirt;

$$\left(\frac{dR}{d\varrho}\right) = \frac{4\pi r^2 dr}{\varrho^2}$$

für die Anziehung der Kugelschale, deren Dicke dr ist, also auch die Anziehung der Kugel, deren Halbmesser r ist,

$$\frac{4\pi}{\varrho^2}\int r^2 dr = \frac{4\pi r^3}{3\varrho^2}$$

wie oben §. 10; oder für das Gesetz der Natur ist die Anziehung der Kugelschalen und der Kugeln selbst dasselbe, als ob ihre Massen in ihrem Mittelpunkte vereinigt wären, so dafs wir also hier einen neuen Beweis des oben aufgestellten Satzes erhalten.

III. Nach dieser kleinen Digression wollen wir nun die Funktion φ (f) der Bedingung gemäfs zu bestimmen suchen, dafs die Anziehung der Kugelschale dieselbe ist, als wenn ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereiniget wäre. Diese Masse der Kugelschale ist gleich $4\pi r^2 dr$, und wenn sie ganz in dem Mittelpunkte der Schale vereiniget wäre, so hätte man für ihre Wirkung auf den äufseren Punkt $4\pi r^2 dr . \varphi(\varrho)$, also auch

$$2\pi r\, dr . \frac{d . \left\{\frac{\psi(\varrho+r)}{\varrho} - \frac{\psi(\varrho-r)}{\varrho}\right\}}{d\varrho} = 4\pi r^2 dr . \varphi(\varrho)$$

oder

$$\frac{d . \left\{\frac{\psi(\varrho+r)}{\varrho} - \frac{\psi(\varrho-r)}{\varrho}\right\}}{d\varrho} = 2r . \varphi(\varrho) \ldots . (17)$$

und dessen Integral in Beziehung auf ϱ,

$$\psi(\varrho+r) - \psi(\varrho-r) = 2\varrho r \int d\varrho . \varphi(\varrho) + \varrho U$$

wo U eine Funktion von r und anderen Constanten ist.

Sey $\psi(\varrho+r) - \psi(\varrho-r) = S$, so hat man

$$S = 2\varrho r \int d\varrho . \varphi(\varrho) + \varrho U$$

Differentiirt man diesen Ausdruck zweymahl in Beziehung auf ϱ, so ist

$$\left(\frac{dS}{d\varrho}\right) = 2r \int d\varrho \,.\, \varphi(\varrho) + 2\varrho r \,.\, \varphi(\varrho) + U$$

$$\left(\frac{d^2S}{d\varrho^2}\right) = 4r \,.\, \varphi(\varrho) + 2\varrho r \,.\, \frac{d\,\varphi(\varrho)}{d\varrho}$$

und eben so:

$$\left(\frac{dS}{dr}\right) = 2\varrho \int d\varrho \,.\, \varphi(\varrho) + \varrho \left(\frac{dU}{dr}\right)$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right) = \varrho \left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)$$

Aus der Natur der Funktion S aber folgt

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right) = \left(\frac{d^2S}{d\varrho^2}\right)$$

Setzt man daher die Werthe von $\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2S}{d\varrho^2}\right)$ einander gleich, so ist

$$\frac{2\varphi(\varrho)}{\varrho} + \frac{d.\,\varphi(\varrho)}{d\varrho} = \frac{1}{2r}\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)$$

Da aber das erste Glied dieser Gleichung von r, und das zweyte von ϱ unabhängig ist, so muſs jedes dieser Glieder für sich gleich einer constanten Gröſse seyn, die wir durch 3A bezeichnen wollen, so daſs man hat

$$\frac{2\varphi(\varrho)}{\varrho} + \frac{d.\,\varphi(\varrho)}{d\varrho} = 3A \text{ oder}$$

$$2\varphi(\varrho).d\varrho + \varrho.d\varphi(\varrho) = 3A\varrho d\varrho$$

das heiſst:

$$d.[\varrho^2 .\, \varphi(\varrho)] = 3A\varrho^2 d\varrho$$

und daher dessen Integral

$$\varrho^2 .\, \varphi(\varrho) = A\varrho^3 + B$$

wo B eine constante Gröſse ist, oder endlich

$$\varphi(\varrho) = A\varrho + \frac{B}{\varrho^2}$$

Alle Gesetze der Anziehung, für welche eine Kugel auf einen äusseren Punkt so wirkt, als ob ihre Masse in dem Mittelpunkte vereinigt wäre, sind also in dem allgemeinen Ausdrucke

$$A\varrho + \frac{B}{\varrho^2}$$

enthalten, wo ρ die Entfernung des äufseren Punktes von dem Mittelpunkte der Kugel ist. Auch sieht man leicht, dafs dieser Ausdruck der Gleichung (17) genug thut, welches auch die Werthe von A und B seyn mögen.

Setzt man voraus, dafs A gleich Null ist, so hat man das Gesetz der Natur, so dafs also von der unendlichen Anzahl der Gesetze, welche die Anziehung für grofse Distanzen sehr klein geben, jenes der Natur das einzige ist, für welches die Kugeln die oben angegebene Eigenschaft haben.

§. 12.

Dieses Gesetz der Natur scheint endlich noch eine andere viel wichtigere Eigenschaft zu haben, die ihm ausschliefsend zukömmt, und zur Erhaltung des Ganzen nothwendig ist. Wir haben z. B. oben gesehen, dafs, wenn die Kraft, mit welcher sich die Körper gegenseitig anziehen, sich wie verkehrt der Würfel ihrer Entfernung verhielte, die Bahn der Planeten eine hyperbolische Spirale wäre, in welcher sich also diese Körper der Sonne immer mehr nähern, und endlich nach unzähligen immer kleineren Umgängen in sie stürzen würden. Dasselbe würde der Fall schon nach dem ersten Umgange seyn, wenn die Kraft sich verkehrt wie die fünfte Potenz der Entfernung verhielte. Bey diesen und vielen anderen ähnlichen Gesetzen würde also das ganze System entweder völlig aufgelöset, oder doch bald gewaltsamen Aenderungen unterworfen werden, welche die Symmetrie, und die schönen Verhältnisse, die wir jetzt an demselben beobachten, gänzlich zerstören. Wenn wir aber auch nie ergründen können, warum der Urheber der Natur unter allen unzähligen Gesetzen, eben dieses gewählt, und warum er die Dimensionen der einzelnen Himmelskörper sowohl, als die der Distanzen, welche sie jetzt von einander trennen, eben nach diesem Mafsstabe angeordnet hat, der nun der Gegenstand unserer Beobachtungen ist, so scheint es doch eine wesentliche Eigenschaft eines jeden Systemes, das auf Dauer Anspruch machen soll, zu seyn, dafs dasselbe bey den einmahl bestehenden Verhältnissen seiner Theile auch nach einem anderen Mafsstabe ausgeführt werden könne, ohne dadurch eine wesentliche Aenderung zu leiden. Nehmen wir an, dafs alle Dimensionen der Körper dieses Systemes sowohl als ihrer Entfernungen von einander in dem Verhältnisse 1 zu n geändert werden, und dafs die Planeten auch nach dieser Aenderung noch Bahnen um die Sonne beschreiben, welche den gegenwärtigen ähnlich sind, was offenbar nur dann möglich ist, wenn auch die Kraft der Sonne in demselben Verhältnisse 1 zu n geändert wird. Ist z. B. bey den gegenwärtigen Verhältnissen M die Masse der Sonne, und r ihre Entfernung von der Erde, und drückt $\frac{M}{\varphi(r)}$ das noch unbekannte Gesetz der Kraft aus, mit welcher die Sonne auf die Erde und auf alle übrigen Planeten wirkt, so werden in

dem geänderten Systeme die Gröfsen r, φ (r) und M in folgende übergehen rn, φ (rn) und Mn^3, und die neue Kraft der Sonne, mit welcher sie die Erde in der Entfernung rn anzieht, wird $\frac{Mn^3}{\varphi (rn)}$ seyn. Da aber, wenn die neue Bahn der Erde der vorhergehenden ähnlich seyn soll, die Kraft $\frac{M}{\varphi (r)}$ der Sonne in demselben Verhältnisse 1 : n geändert werden mufs, weil die Sinus versus der Bogen, welche die Erde unter beyden Voraussetzungen durch die Wirkung der Sonne beschreibt, der Kraft der Sonne proportionirt seyn müssen (§. 5.), so wird man haben

$$\frac{Mn^3}{\varphi (rn)} = n \,.\, \frac{M}{\varphi (r)} \text{ oder}$$

$$n^2 . \varphi (r) = \varphi (rn)$$

oder die Kraft φ (r) mufs eine solche Funktion von r seyn, die ungeändert bleibt, wenn man in ihr rn statt r substituirt, und den neuen Ausdruck durch n^2 dividirt. Ist z. B. die Kraft der Sonne irgend einer Potenz der Entfernung proportionirt, also $\varphi (r) = Ar^m$, wo A eine constante Gröfse ist, so hat man $\varphi (rn) = Ar^m n^m$, und $n^2 . \varphi (r) = Ar^m . n^2$. Setzt man daher die beyden letzten Ausdrücke einander gleich, so ist $n^{m-2} = 1$ oder $m = 2$, das heifst, wenn bey einem geänderten Mafsstabe des ganzen Systemes die Verhältnisse seiner Theile noch dieselben bleiben, und das neue System dem Vorhergehenden ähnlich seyn soll, so mufs $m = 2$ also $\varphi (r) = Ar^2$ und daher die Kraft der Sonne gleich $\frac{M}{A . r^2}$ seyn, welches wieder das Gesetz der Natur, also auch das einzige ist, für welches die Bewegungen und alle Erscheinungen der Natur, nicht von der absoluten Gröfse des Systemes und seiner Theile, sondern blofs von ihren Verhältnissen gegen einander abhängig sind, während für jedes andere Gesetz die geringste Veränderung des Mafsstabes, wenn die Verhältnisse ungeändert bleiben, eine ganz andere Welt zur Folge haben würde.

§. 13.

Zum Schlusse dieses Gegenstandes wollen wir noch im Allgemeinen die Anziehung eines gegebenen Körpers von irgend einer Gestalt auf einen gegebenen Punkt suchen.

Sey P ein Punkt der Oberfläche dieses Körpers, dessen drey rechtwinklichte Coordinaten x y z seyn sollen. Durch den Punkt P ziehe man die drey geraden Linien PX, PY, PZ den Coordinaten x y z parallel, und die Normale PQ der Oberfläche. Sey ferner M irgend ein Punkt in oder aufser dem Körper, und seine mit den vorigen parallelen Coordinaten a b c, und endlich die Entfernung beyder Punkte PM = r also

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.$$

Der Kürze wegen wollen wir

die Winkel MPX, MPY, MPZ .. QPX, QPY, QPZ und QPM
durch MX, MY, MZ .. QX, QY, QZ und QM

bezeichnen, so daſs man also hat

$$\text{Cos MX} = \frac{a-x}{r},\ \text{Cos MY} = \frac{b-y}{r},\ \text{Cos MZ} = \frac{c-z}{r}.$$

Da die gerade Linie r durch die zwey Punkte geht, deren Coordinaten x y z und a b c sind, so sind die Gleichungen dieser geraden Linie zwischen den Coordinaten $\xi\ \upsilon\ \zeta$ folgende:

$$\xi - x = (\zeta - z)\,\frac{x-a}{z-c} \text{ und } \upsilon - y = (\zeta - z)\,\frac{y-b}{z-c}\ldots$$

Sucht man aber aus der gegebenen Gleichung der Oberfläche des Körpers die partiellen Differentialien

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = P \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = Q,$$

so sind bekanntlich die Gleichungen der Normale dieser Fläche

$$\xi - x + (\zeta - z)\,P = o \text{ und } \upsilon - y + (\zeta - z)\,Q = o$$

Daraus folgt für den Winkel QPM der Normale mit der Entfernung r

$$\text{Cos QM} = \frac{(a-x)\,P + (b-y)\,Q + c-z}{r\,.\,R}$$

und für die Winkel der Normale QPX, QPY, QPZ mit den Achsen der x, y, z

$$\text{Cos QX} = \frac{P}{R},\ \text{Cos QY} = \frac{Q}{R},\ \text{Cos QZ} = \frac{1}{R}$$

$$\text{wo } R = \sqrt{1 + P^2 + Q^2} \text{ ist.}$$

I. Dieses vorausgesetzt, ist bekanntlich das Element der Oberfläche des Körpers $ds = R\,dx\,dy\ \sqrt{1 + P^2 + Q^2}$, und das Element des Körpers selbst $dK = dx\ dy\ dz$, also ist auch

$$dK = \frac{ds\,.\,dz}{R}$$

oder da nach dem Vorhergehenden $dz = R\,dx$ Cos QX ist,

$$K = \int\!\!\int x\ ds\,.\ \text{Cos QX}$$

was offenbar auch so ausgedrückt werden kann

$$K = \int\int y\,ds\,.\,\mathrm{Cos}\,QY \text{ oder } K = \int\int z\,ds\,.\,\mathrm{Cos}\,QZ.$$

II. Die Projection des Elementes ds der gegebenen Oberfläche auf eine Ebene, die auf der Achse der x senkrecht steht, ist

$$d\Sigma = dy\,dz \text{ oder } d\Sigma = R\,dx\,dy\,.\,\frac{P}{R}$$

also auch, wenn man die vorhergehenden Werthe von $R\,dx\,dy$ und $\frac{P}{R}$ substituirt, $d\Sigma = ds$ Cos QX. Denkt man sich durch alle Punkte des Umfanges von $d\Sigma$ gerade Linien, welche senkrecht auf die Projections-Ebene, also parallel mit der Achse der x stehen, so werden diese Linien einen Cylinder bilden, dessen Element $d\Sigma\,dx$ ist, und wenn fr das Anziehungsgesetz der Materie dieses Cylinders ausdrückt, so wird die Anziehung dieses cylindrischen Elementes auf den um die Distanz r entfernten Punkt M seyn $d\Sigma\,.\,dx\,.\,fr$.

$$\text{Es ist aber } r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2,$$

also da durch den ganzen Cylinder nur x als variabel anzusehen ist, $r\,dr = -(a-x)\,dx$, und daher die Anziehung des cylindrischen Elementes $= -\frac{r\,.\,fr\,.\,dr\,d\sigma}{a-x}$. Wird diese Anziehung nach der Achse der x zerlegt, so erhält man $-fr\,.\,dr\,.\,d\Sigma$, und bezeichnet man das Integral $\int.\,fr\,dr$ durch Fr, so ist die Anziehung des ganzen Cylinders von der Grundfläche $d\Sigma$ auf den Punkt M in der Richtung der x gleich $-Fr\,.\,d\Sigma$, oder wenn man den vorhergehenden Werth von $d\Sigma$ substituirt, so ist die Anziehung des ganzen gegebenen Körpers auf den Punkt M parallel mit der Achse der x gleich $-\int Fr\,.\,ds$ Cos QX, und eben so ist die Anziehung des Körpers auf den Punkt M parallel mit y und mit z gleich

$$-\int Fr\,.\,ds\,\mathrm{Cos}\,QY \text{ und } -\int Fr\,.\,ds\,\mathrm{Cos}\,QZ.$$

§. 14.

Diese Untersuchungen, den körperlichen Inhalt und die Anziehung eines Körpers auf einen gegebenen Punkt M zu suchen, lassen sich noch auf eine andere merkwürdige Art anstellen. Zu diesem Zwecke denke man sich um den Punkt M als Mittelpunkt eine Kugel beschrieben, deren Halbmesser die Einheit ist. Sey Π ein auf der Oberfläche dieser Kugel dem kleinen Raum dS zugehöriger Punkt. Die Linie $M\Pi$ schneide verlängert die Oberfläche des Körpers zuerst in dem Punkte P′, dann weiter verlängert das zweyte Mahl in dem Punkte P″, dann in P‴ u. f. Zieht man dann von dem Punkte M an die Peripherie des Raumes dS gerade Linien, so werden diese Linien eine Art von

Kegel bilden, und an der Oberfläche des gegebenen Körpers an den Punkten P′, P″, P‴. . . die Räume ds′, ds″, ds‴. . . begränzen. Endlich beschreibe man noch aus dem Mittelpunkte M mit den Halbmessern MP′ = r′, MP″ = r″, MP‴ = r‴ . . . durch die Punkte P′, P″, P‴. . . Theile sphärischer Oberflächen, und nenne dσ′, dσ″, dσ‴ . . . die Räume, welche jener Kegel von diesen sphärischen Oberflächen ausschneidet.

Dieses vorausgesetzt hat man, da diese Theile der sphärischen Oberflächen sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten

$$dS = \frac{d\sigma'}{r'^2} = \frac{d\sigma''}{r''^2} = \frac{d\sigma'''}{r'''^2} \ldots$$

und da der Elementarraum dσ′ als die Projection des Raumes ds′ auf eine Ebene, der die Gerade P′M normal ist, angesehen werden kann,

$$d\sigma' = \pm\, ds' \operatorname{Cos} MQ' \text{ und eben so } d\sigma'' = \pm\, ds'' \operatorname{Cos} MQ'',$$
$$d\sigma''' = \pm\, ds''' \operatorname{Cos} MQ''' \ldots$$

wo das obere Zeichen statt hat, wenn der Winkel MQ = MPQ kleiner als ein rechter ist, d. h. wenn der angezogene Punkt M innerhalb dem Körper liegt, das untere Zeichen aber, wenn M ein äusserer Punkt des Körpers ist. Betrachten wir jeden dieser Fälle für sich.

I. Ist M ein innerer Punkt des Körpers, so ist also für den ersten Durchschnittspunkt der Linie MΠ mit der Oberfläche des gegebenen Körpers

$$d\sigma' = + ds' \operatorname{Cos} MQ' \text{ oder da } d\sigma' = r'^2 . dS \text{ ist,}$$
$$\frac{ds' \operatorname{Cos} MQ'}{r'^2} = + dS.$$

Für den zweyten Durchschnittspunkt der verlängerten Linie MΠ mit der Oberfläche des Körpers kömmt diese Linie aus einem äufseren Raume in den Körper, also ist $\frac{ds'' \operatorname{Cos} MQ''}{r''^2} = - dS$; für den dritten Durchschnittspunkt kömmt jene Linie aus dem Körper in den äufsern Raum, oder es ist

$$\frac{ds''' \operatorname{Cos} MQ'''}{r'''^2} = + dS \text{ u. s. w.}$$

und da die Anzahl dieser Durchschnittspunkte gerade ist, so hat man für einen inneren Punkt M

$$\frac{ds'}{r'^2} \operatorname{Cos} MQ' + \frac{ds''}{r''^2} \operatorname{Cos} MQ'' + \frac{ds'''}{r'''^2} \operatorname{Cos} MQ''' + \ldots$$
$$= dS - dS + dS - \ldots = 0.$$

Werden dann alle anderen Elemente dS der Oberfläche unserer Kugel, deren Halbmesser die Einheit ist, eben so behandelt und summirt, oder wird dieses Verfahren auf die ganze Oberfläche dieser Kugel ausgedehnt, so hat man nach dem Geiste der Integralrechnung, für einen inneren Punkt

$$\int \cdot \frac{ds}{r^2} \operatorname{Cos} MQ = o$$

II. Ist aber M ein äußerer Punkt, so hat man eben so für den

$$\text{ersten Durchschnitt } \frac{ds'}{r'^2} \operatorname{Cos} MQ' = -dS$$

$$\text{zweyten } \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{ds''}{r''^2} \operatorname{Cos} MQ'' = +dS$$

$$\text{dritten } \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{ds'''}{r'''^2} \operatorname{Cos} MQ''' = -dS \text{ u. f.}$$

und da die Anzahl dieser Durchschnittspunkte ungerade ist, so heben sich in der Summe dieser Ausdrücke alle bis auf den letzten auf, und man erhält

$$\int \frac{ds}{r^2} \operatorname{Cos} MQ = -S,$$

oder da S die ganze Oberfläche der mit dem Radius $= 1$ beschriebenen Kugelfläche bezeichnet, also $S = 4\pi$ ist, für einen äußeren Punkt

$$\int \frac{ds}{r^2} \cdot \operatorname{Cos} MQ = -4\pi$$

$$\text{wo } \pi = 3.14159 \ldots$$

III. Das Volum des Kegelraumes von der Spitze M bis zu den Punkten P′, P″, P‴ .. ist in derselben Ordnung

$$\tfrac{1}{3} r' d\sigma', \ \tfrac{1}{3} r'' d\sigma'', \ \tfrac{1}{3} r''' d\sigma''' \ldots$$

$$\text{oder } \pm \tfrac{1}{3} r' ds' \operatorname{Cos} MQ', \ \pm \tfrac{1}{3} r'' ds'' \operatorname{Cos} MQ'',$$
$$\pm \tfrac{1}{3} r''' ds''' \operatorname{Cos} MQ''' \ldots$$

das obere Zeichen, wenn der Punkt M in dem Inneren des Körpers liegt, woraus sofort folgt, daß das Volum des ganzen Körpers gleich ist

$$K = -\tfrac{1}{3} \int r ds \operatorname{Cos} MQ.$$

IV. Um nun auch die Attraction dieses Körpers auf den gegebenen Punkt M zu finden, so war dS die Basis des Kegels, dessen Höhe die Einheit ist, also ist auch $r^2 . dS$ die Basis des Kegels, dessen Höhe gleich r ist. Das Volum des lezten Kegels

ist daher $\frac{1}{3}$ $r^3 . dS$, und dessen Differential $r^2 dr . dS$. Ist also wieder Fr das Gesetz der Attraction, so ist die Attraction selbst gleich dem Volum des Elementes in fr multiplicirt, oder gleich r^2 dr . dS . fr. Bezeichnet man daher das Integral $\int r^2 . fr . dr$ durch φr, so ist die Attraction des ganzen Kegels gleich $\varphi r . dS$ oder gleich

$$\frac{\varphi r . ds}{r^2} \text{ Cos } MQ,$$

und daher die Attraction des ganzen Körpers auf den Punkt M gleich dem Integrale

$$\int \frac{\varphi r . ds}{r^2} \text{ Cos } MQ$$

wo dieses Integral über die ganze Oberfläche des Körpers auszudehnen ist. Das Produnkt dieses Ausdruckes in Cos MX gibt die Attraction des Körpers auf den Punkt M nach der Richtung der Achse der x, die also gleich

$$\int \frac{\varphi r . ds}{r^2} \text{ Cos } MQ . \text{ Cos } MX$$

ist, und eben so ist die Attraction des Körpers

nach der Richtung der y $\int \frac{\varphi r . ds}{r^2} \text{ Cos } MQ . \text{ Cos } MY$

und nach der Richtung der z . . . $\int \frac{\varphi r . ds}{r^2} \text{ Cos } MQ . \text{ Cos } MZ$

V. Nehmen wir alles Vorhergehende zusammen, so hat man folgende Theoreme:

1) Das auf die ganze Oberfläche des Körpers ausgedehnte Integral

$$\int ds . \text{ Cos } QX \text{ ist immer } = 0.$$

2) Das Volum des Körpers ist

$$\int x ds \text{ Cos } QX = \int y ds \text{ Cos } QY = \int z ds \text{ Cos } QZ,$$
$$\text{oder } = -\tfrac{1}{3} \int r ds \text{ Cos } QM.$$

3) Für einen Punkt M, dessen Entfernung von einem willkührlichen Punkt der Oberfläche des Körpers gleich r ist, ist das Integral

$$\int \frac{ds}{r^2} \text{ Cos } MQ \text{ gleich } 0,$$

wenn der Punkt M inner dem Körper, und gleich -4π, wenn er aufser dem Körper liegt.

4) Die Anziehung des Körpers auf den Punkt M ist:

nach der Richtung der x $X = -\int Fr.ds \operatorname{Cos} QX$

$$= -\int \frac{\varphi r.ds}{r^2} \operatorname{Cos} QM \operatorname{Cos} MX$$

nach der Richtung der y $Y = -\int Fr.ds \operatorname{Cos} QY$

$$= -\int \frac{\varphi r.ds}{r^2} \operatorname{Cos} QM \operatorname{Cos} MY$$

nach der Richtung der z $Z = -\int Fr.ds \operatorname{Cos} QZ$

$$= -\int \frac{\varphi r.ds}{r^2} \operatorname{Cos} QM \operatorname{Cos} MZ$$

wo das Gesetz der Anziehung $fr = \frac{1}{r^2}$ und wo $Fr = \int fr.dr$ und $\varphi r = \int r^2.fr.dr$ ist, und wo alle vorhergehenden Integrale auf die ganze Oberfläche des Körpers ausgedehnt werden sollen. Für den Fall der Natur hat man $fr = \frac{1}{r^2}$ also $Fr = -\frac{1}{r}$ und $\varphi r = r$. —

Mehrere Anwendungen dieser Ausdrücke werden sich in der Folge finden. (Monatl. Corresp. XXVIII. Band.)

ACHTES KAPITEL.

Problem der drey Körper.

Vorbereitungen.

§. 1.

Wir haben bereits in dem vorhergehenden Kapitel gesehen, welche Schwierigkeiten die Bestimmung der Bewegung von Körpern, die ihrer gegenseitigen Anziehung unterworfen sind, selbst in den einfachsten Fällen darbiethet, sobald die Anzahl dieser Körper gröſser als zwey ist. Der vorzüglichste Zweck der Anwendung der Mechanik auf die Astronomie ist die Bestimmung der Bewegung der Körper unseres Planetensystemes, deren jeder nicht nur der Anziehung der Sonne, des Central-Körpers des Systemes, sondern auch noch den Anziehungen aller übrigen Körper desselben unterworfen ist. In dieser Allgemeinheit aber ist die Auflösung dieses groſsen Problemes bey dem gegenwärtigen Zustande unserer Analysis völlig unmöglich. Glücklicher Weise sind die Entfernungen, welche diese Körper von einander trennen, in Beziehung auf ihre eigenen Dimensionen so groſs, daſs die Störungen, welche jeder Planet, während er der Hauptkraft der Sonne gehorchend seine elliptische Bahn um dieselbe beschreibt, von allen übrigen Planeten leidet, so klein sind, daſs man bey der Untersuchung der Wirkungen eines jeden Planeten auf einen anderen, den ungestörten elliptischen Ort des ersten zu Grunde legen kann, ohne einen für unsere Beobachtungen merkbaren Fehler zu befürchten, daſs man also die Störungen, welche jeder einzelne Planet von allen andern erfährt, von einander abgesondert betrachten, oder daſs man nur die Störung eines jeden Planeten durch einen jeden andern, als ob der letzte allein da wäre, aufzusuchen, und dann alle diese Störungen zu summiren braucht, um die gesammte Störung eines jeden Planeten durch alle übrigen zu erhalten. Dadurch wird unser Problem auf die Bestimmung der Bewegung eines Planeten zurückgeführt, der in seiner elliptischen Bahn um die Sonne, deren Kraft die

aller anderen Planeten weit überwiegt, durch die viel schwächere Kraft eines zweyten Planeten gestört wird, daher man diese Aufgabe, mit deren Auflösung wir uns in diesem und den folgenden zwey Kapiteln beschäftigen wollen, das Problem der drey Körper genannt hat. Wir werden aber bald sehen, dafs selbst nach dieser Beschränkung die directe Auflösung dieser Aufgabe noch immer als unmöglich angesehen werden mufs, und dafs wir uns daher mit einer blofs genäherten Bestimmung begnügen müssen, welche uns durch die, wie es scheint, blofs zufällige Einrichtung des Sonnensystemes möglich gemacht wird, nach welcher die Bahnen aller Planeten sehr nahe kreisförmig, und die Winkel, welche die Ebenen ihrer Bahnen unter einander bilden, sehr klein sind, so dafs man ihre wahren, von den übrigen Planeten gestörten Längen, Breiten und Entfernungen von der Sonne in Reihen auflösen kann; welche nach den Potenzen der Excentricitäten und Neigungen der Bahnen fortgehen, welche wegen den geringen Werthen dieser Gröfsen sehr schnell convergiren, und dadurch die Integrationen der äufserst verwickelten zweyten Differentialgleichungen, welche die Mechanik für die Bewegung dieser Körper darbiethet, wenigstens Annäherungsweise möglich machen.

§. 2.

Diese Differentialgleichungen haben alle, wie wir im zweyten Kapitel gesehen haben, die Form

$$o = \frac{d^2u}{dt^2} + P + \alpha Q$$

wo P und Q Funktionen von u, t, und $\frac{du}{dt}$ sind, und wo α ein sehr kleiner constanter Factor ist. Wir wollen annehmen, dafs man das endliche oder zweyte Integral dieser Gleichung für den Fall kenne, wo α gleich Null ist. Differentiirt man dieses Integral in Beziehung auf u und t, so hat man also zwey Gleichungen; nämlich das erste und zweyte Integral der Gleichung $o = \frac{d^2u}{dt^2} + P$, und kann daher aus diesen zwey Gleichungen durch Elimination die Werthe von zwey Constanten c und c′ finden, die in diesen zwey Gleichungen enthalten sind. Diese Constanten c und c′ werden also in Funktionen von u und t und $\frac{du}{dt}$ ausgedrückt seyn. Nennt man daher V und V′ diese Funktionen, so sind jene zwey Gleichungen

$$c = V, \text{ und } c' = V'$$

und sie sind offenbar die zwey ersten Integralien von der gege-

benen Gleichung $o = \frac{d^2u}{dt^2} + P$, und sie werden durch die Elimination von $\frac{du}{dt}$ das gesuchte zweyte oder endliche Integral dieser Gleichung wieder geben. Differentiirt man diese beyden Gleichungen noch einmahl, so erhält man

$$o = dV \text{ und } o = dV'$$

und da diese Gleichungen vollständige Differentialgleichungen der zweyten Ordnung sind, so kann jede von ihnen nichts anders seyn als die gegebene Gleichung $o = \frac{d^2u}{dt^2} + P$ selbst mit irgend einen Faktor multiplicirt. Nennt man also $F\,dt$ den Faktor dieser letzten Gleichung, der die Gleichung $o = dV$, und nennt man $F'\,dt$ den Faktor, der die Gleichung $o = dV'$ gibt, so hat man

$$dV = F\,dt\left(\frac{d^2u}{dt^2} + P\right) \text{ und}$$

$$dV' = F'dt\left(\frac{d^2u}{dt^2} + P\right).$$

Es ist aber leicht, diese Faktoren F und F' zu bestimmen, wenn die Gröfsen V und V' bekannt sind. Denn F ist offenbar der Faktor von $\frac{d^2u}{dt^2}$ in dem zweyten Differentiale von V, und F' ist der Faktor von $\frac{d^2u}{dt^2}$ in dem zweyten Differentiale von V'. Da man also, nach der Voraussetzung, die Werthe von V und V' kennt, so darf man nur die Faktoren von $\frac{d^2u}{dt^2}$ aus diesen beyden Werthen suchen, um die Werthe von F und F' zu erhalten.

Gehen wir jetzt wieder zu unserer ursprünglichen Gleichung

$$o = \frac{d^2u}{dt^2} + P + \alpha Q$$

zurück. Multiplicirt man sie durch $F\,dt$ und $F'dt$, so erhält man

$$o = dV + \alpha dt\,F\,Q \text{ und}$$
$$o = dV' + \alpha dt\,F'Q$$

und davon sind die Integralien

$$c - \alpha\int dt\,F\,Q = V$$
$$c' - \alpha\int dt\,F'Q = V',$$

und so hat man zwey Differentialgleichungen, welche dieselbe Form haben, wie in dem Falle wo $\alpha = o$ ist, mit dem einzigen Unterschiede, dafs man statt den willkührlichen Constanten c und c′ die folgenden Gröfsen setzt

$$c - \alpha \int dt\, FQ \text{ und } c' - \alpha \int dt\, F'Q$$

Wenn man aber unter der Voraussetzung $\alpha = o$, aus den zwey Integralen $c = V$ und $c' = V'$ die Gröfse $\frac{du}{dt}$ eliminirt, so erhält man, wie wir oben gesehen haben, das endliche Integral der Gleichung $o = \frac{d^2u}{dt^2} + P$; also erhält man auch das endliche Integral der gegebenen Gleichung $o = \frac{d^2u}{dt^2} + P + \alpha Q$, wenn man blofs in dem vorhergehenden Integrale die Gröfsen c und c′ in $c - \alpha \int dt\, FQ$ und $c' - \alpha \int dt\, F'Q$ verwandelt. Um das Vorhergehende auf einen besondern Fall anzuwenden, sey die Gleichung

$$o = \frac{d^2u}{dt^2} + a^2u + \alpha Q$$

gegeben, wo α eine sehr kleine Gröfse, und Q irgend eine Funktion von u t und $\frac{du}{dt}$ ist. Für $\alpha = o$ hat man

$$o = \frac{d^2u}{dt^2} + a^2u$$

und von dieser Gleichung ist das zweyte Integral

$$u = \frac{c}{a} \text{ Sin } at + \frac{c'}{a} \text{ Cos } at,$$

wo c und c′ zwey beständige Gröfsen sind, und davon ist das erste Differential

$$\frac{du}{dt} = c \text{ Cos. } at - c' \text{ Sin } at.$$

Die Combination dieser beyden letzten Gleichungen gibt

$$c = au \text{ Sin } at + \frac{du}{dt} \text{ Cos } at$$

$$c' = au \text{ Cos } at - \frac{du}{dt} \text{ Sin } at.$$

Dieses sind die zwey Gleichungen, welche wir oben $c = V$ und $c' = V'$ genannt haben. In der ersten derselben ist der Faktor

von $\frac{d^2u}{dt^2}$ gleich $F = \text{Cos}\, at$, und in der zweyten $F' = -\text{Sin}\, at$. Wir werden daher, um das vollständige Integral der gegebenen Gleichung zu erhalten, nach dem Vorhergehenden in der Gleichung

$$u = \frac{c}{a}\,\text{Sin}\, at + \frac{c'}{a}\,\text{Cos}\, at$$ blofs statt c die Gröfse $c - \alpha \int dt\, FQ$,

und statt c′ die Gröfse $c' - \alpha \int dt\, F'Q$ substituiren, wodurch man erhält

$$u = \left(\frac{c - \alpha \int Q\, dt\, \text{Cos}\, at}{a}\right) \text{Sin}\, at + \left(\frac{c' + \alpha \int Q\, dt\, \text{Sin}\, at}{a}\right) \text{Cos}\, at$$

oder das vollständige Integral der gegebenen Gleichung

$$o = \frac{d^2u}{dt^2} + a^2u + \alpha Q \text{ wird seyn}$$

$$u = \frac{c}{a}\,\text{Sin}\, at + \frac{c'}{a}\,\text{Cos}\, at - \frac{\alpha}{a}\,\text{Sin}\, at \int Q\, dt\, \text{Cos}\, at$$

$$+ \frac{\alpha}{a}\,\text{Cos}\, at \int Q\, dt\, \text{Sin}\, at \ldots (A)$$

Ist z. B. $\alpha Q = A + B\,\text{Cos}\, mt + C\,\text{Cos}\, nt$
$+ \beta\,\text{Sin}\, mt + \gamma\,\text{Sin}\, nt$

so ist das gesuchte Integral

$$u = -\frac{A}{a^2} + \frac{c}{a}\,\text{Sin}\, at + \frac{c'}{a}\,\text{Cos}\, at$$

$$+ \frac{B}{m^2 - a^2}\,\text{Cos}\, mt + \frac{C}{n^2 - a^2}\,\text{Cos}\, nt +$$

$$+ \frac{\beta}{m^2 - a^2}\,\text{Sin}\, mt + \frac{\gamma}{n^2 - a^2}\,\text{Sin}\, nt +$$

I. In der Theorie der Störungen besteht, wie wir sehen werden, die Gröfse Q blofs aus Gliedern der Form $A\,\text{Sin}\,(mt + \varepsilon)$ oder $A\,\text{Cos}\,(mt + \varepsilon)$, und man sieht leicht, wenn man diese Werthe statt Q in dem letzten Ausdrucke von u substituirt, dafs jedes Glied von Q, welches die Form hat $A\,\text{Sin}\,(mt + \varepsilon)$, in dem Ausdrucke von u ein Glied $\frac{\alpha A}{m^2 - a^2}\,\text{Sin}\,(mt + \varepsilon)$, und dafs eben so jedes Glied von Q, welches die Form $A\,\text{Cos}\,(mt + \varepsilon)$ hat, in dem Ausdrucke von u ein ihm correspondirendes Glied $\frac{\alpha A}{m^2 - a^2}\,\text{Cos}\,(mt + \varepsilon)$ hervorbringt. Man wird daher, wie man

schon jetzt sieht, bey den folgenden bloſs genäherten Integrationen dieser Gleichungen vorzüglich auf diejenigen Glieder Rücksicht nehmen müssen, für welche die Gröſsen m und a einander nahe gleich sind, weil diese durch die Integration oft sehr beträchtliche Werthe erhalten können.

Davon macht der Fall, wenn m = a ist, eine Ausnahme. Denn ist z. B. in der Gleichung (I) die Gröſse $\alpha Q = B \,\mathrm{Cos}\, at$, so findet man für ihr Integral

$$u = \frac{c}{a} \mathrm{Sin}\, at + \frac{c'}{a} \mathrm{Cos}\, at - \frac{B}{4a^2} \mathrm{Cos}\, at - \frac{Bt}{2a} \mathrm{Sin}\, at,$$

und hier unterscheidet sich das letzte Glied $-\frac{Bt}{2a} \mathrm{Sin}\, at$ wesentlich vor allen übrigen, weil es die Zeit t auſser dem Zeichen des Sinus enthält, und also mit der Zeit ohne Ende wächst oder abnimmt, während alle andern Glieder, die die Zeit t nur unter dem Zeichen des Sinus oder Cosinus enthalten, bloſsen periodischen Aenderungen, so wie jene trigonometrischen Funktionen selbst unterworfen sind, und daher zwischen bestimmten Gränzen ab- und zunehmen, aber ohne diese Gränzen selbst zu überschreiten.

Da die Werthe der Sinus und Cosinus periodisch wiederkehren, wenn auch ihre Winkel ins unendliche wachsen, so ist jedes Glied der Form $A \,{}^{\mathrm{Sin}}_{\mathrm{Cos}} (mt + \varepsilon)$ selbst periodisch, und man nennt A das Maximum, $mt + \varepsilon$ das Argument, und endlich $\frac{360}{m}$ die Periode des Ausdruckes $A \,{}^{\mathrm{Sin}}_{\mathrm{Cos}} (mt + \varepsilon)$, wo m in Graden, und die Periode in solchen Zeiteinheiten ausgedrückt wird, in welchen die Gröſse t selbst ausgedrückt ist. Die Periode jenes Ausdruckes ist nähmlich die Zeit, während welcher der Werth von $A \,{}^{\mathrm{Sin}}_{\mathrm{Cos}} (mt + \varepsilon)$ durch alle seine Abwechslungen von Gröſsen und Zeichen geht, bis er wieder zu dem Punkte gelangt, von welchem er ausgegangen ist, um eine neue ähnliche Reihe von Abwechslungen zu beginnen. Wird also z. B. die Gröſse t in Tagen und deren Theilen ausgedrückt, so ist m die tägliche Aenderung des Argumentes in Graden ausgedrückt, und daher $m : 1 = 360 : T$, oder die Periode

$$T = \frac{360}{m} \text{ Tage.}$$

Während also die oben betrachteten Glieder von u, welche die Form $\frac{\alpha A}{m^2 - a^2} \,{}^{\mathrm{Sin}}_{\mathrm{Cos}} (mt + \varepsilon)$ haben, nur periodische, in kürzeren oder längeren Perioden wiederkehrende Ungleichhei-

ten sind, bezeichnen im Gegentheile die $\pm \frac{\alpha At}{2a} \frac{Cos}{Sin} (at + \varepsilon)$ über alle Gränzen fortgehende Störungen, die, wenn sie in der That in einem Systeme statt haben, endlich die völlige Zerstörung, oder doch eine gänzliche Umänderung des Systemes zur Folge haben müssen. Wir werden aber weiter unten, wo wir auf die Gleichungen der letzten Art wieder zurückkommen werden, sehen, daſs sie ihren Ursprung nicht sowohl in der Natur der Differentialgleichungen, sondern in der Unvollkommenheit unserer Analysis haben, und daſs ihre nähere Betrachtung zu einer eigenen Gattung von Störungen führte, die wir in dem zehnten Capitel entwickeln werden.

II. Wenn also, wie es bey der Bestimmung der Bewegungen der himmlischen Körper der Fall ist, die Gröſse Q eine ganze und rationelle Funktion von u und von dem Sinus und Cosinus solcher Winkel ist, die mit der Zeit t gleichförmig wachsen, so wird die Integration der Gleichungen der Form

$$o = \frac{d^2u}{dt^2} + a^2u + \alpha Q$$

darin bestehen, daſs man zuerst die kleine Gröſse α gleich Nul annimmt, wo dann das endliche Integral der Gleichung $o = \frac{d^2u}{dt^2} + a^2u$ einen ersten genäherten Werth von u, den rein elliptischen Werth gibt, wenn αQ die störenden Kräfte enthält. Substituirt man diesen ersten Werth in Q, so wird man dadurch Q als eine ganze und rationelle Funktion erhalten, deren Glieder alle von der Form $A \frac{Sin}{Cos} (mt + \varepsilon)$ sind. Integrirt man dann die Gleichung $o = \frac{d^2u}{dt^2} + a^2u + \alpha Q$ mit Hülfe der Gleichung (A), so erhält man einen zweyten Werth von u, der aus zwey Theilen bestehen wird, wovon der erste (wie die Gleichung (A) zeigt), den vorigen elliptischen Werth von u, und der zweyte die Correction dieses elliptischen Werthes enthalten wird, welche Correction offenbar von der Ordnung der störenden Kräfte d. h. von der Ordnung der kleinen Gröſse α seyn wird. Substituirt man dann diesen zweyten Werth von u in Q, und integrirt die so erhaltene Gleichung wieder, so wird man einen dritten Werth von u erhalten, der aus drey Theilen besteht, dem elliptischen, dem von der Ordnung α, und dem von der Ordnung α^2, und wenn man dasselbe Verfahren fortsetzt, so wird man den genäherten Werth von u bis zu einer gegebenen Potenz der störenden Kräfte erhalten.

§. 3.

Die Untersuchungen des folgenden Capitels werden sich auf die Entwicklung der Gröſse

$$R'' = \frac{a}{a'^2} \operatorname{Cos} \vartheta - (a^2 - 2aa' \operatorname{Cos} \vartheta + a'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

in eine Reihe beziehen, die nach dem Cosinus der vielfachen Winkel ϑ fortgeht. Um den Gang jener Untersuchungen dort nicht mehr zu unterbrechen, wollen wir diese Entwicklung schon hier vornehmen.

Nehmen wir also an, daſs die zu suchende Reihe folgende Gestalt habe

$$R'' = \tfrac{1}{2}\left(A^{(0)} + A^{(1)} \operatorname{Cos} \vartheta + A^{(2)} \operatorname{Cos} 2\vartheta + A^{(3)} \operatorname{Cos} 3\vartheta + \ldots\right)$$

wofür man allgemein setzen kann

$$R'' = \tfrac{1}{2} \Sigma A^{(\varkappa)} \operatorname{Cos} \varkappa \vartheta$$

wenn man voraussetzt, daſs $\varkappa$ alle ganze Zahlen von $\varkappa = -\infty$ bis $\varkappa = +\infty$ bezeichnet, auch den Werth $\varkappa = 0$ mit begriffen, wo dann $A^{(-\varkappa)} = A^{(\varkappa)}$ ist, und daher in dem letzten Ausdrucke der Cosinus für jeden Werth von $\varkappa$ zweymahl vorkömmt, so daſs also für $\varkappa = 3$ ist

$$R'' = \tfrac{1}{2} A^{(3)} \operatorname{Cos} (3\vartheta) + \tfrac{1}{2} A^{(-3)} \operatorname{Cos} (-3\vartheta)$$

das heiſst, da $A^{(3)} = A^{(-3)}$ und $\operatorname{Cos} (3\vartheta) = \operatorname{Cos} (-3\vartheta)$ ist,

$$R'' = A^{(3)} \operatorname{Cos} 3\vartheta \text{ wie zuvor.}$$

Dieses vorausgesetzt, wollen wir die Werthe von $A^{(\varkappa)}$ und ihre Differentialien in Beziehung auf a und a′ d. h. die Werthe von

$$A^{(\varkappa)}, \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right), \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da'}\right), \left(\frac{d^2A^{(\varkappa)}}{da^2}\right) \text{ u. f. suchen.}$$

Zu diesem Zwecke wollen wir zuerst die Gröſse $(a^2 - 2aa' \operatorname{Cos} \vartheta + a'^2)^{-x}$ in eine solche Reihe entwickeln, die nach den Cosinus der vielfachen ϑ fortgeht. Setzt man $\frac{a}{a'} = \alpha$, so wird jene Gröſse $a'^{-2x} (1 - 2\alpha \operatorname{Cos} \vartheta + \alpha^2)^{-x}$.

I. Wir wollen also annehmen

$$(1 - 2\alpha \operatorname{Cos} \vartheta + \alpha^2)^{-x} = \tfrac{1}{2} b_x^0 + b_x^1 \operatorname{Cos} \vartheta + b_x^2 \operatorname{Cos} 2\vartheta + b_x^3 \operatorname{Cos} 3\vartheta + \ldots$$

und zuerst die Werthe von $b_x^0, b_x^1, b_x^2 \ldots$ suchen.

Nimmt man von diesem Ausdrucke die logarithmischen Differentialien, so ist

$$\frac{-2\alpha x \operatorname{Sin}\vartheta}{1-2\alpha\operatorname{Cos}\vartheta+\alpha^2} = \frac{-b_x^1\operatorname{Sin}\vartheta - 2b_x^2\operatorname{Sin}2\vartheta - \dots}{\frac{1}{2}b_x^0 + b_x^1\operatorname{Cos}\vartheta + b_x^2\operatorname{Cos}2\vartheta + \dots}$$

Multiplicirt man kreuzweise, und betrachtet man bloſs die in Sin $(\varkappa-1)\vartheta$ multiplicirten Glieder, so wird

$$-2\alpha x\operatorname{Sin}\vartheta\left(\tfrac{1}{2}b_x^0 + b_x^1\operatorname{Cos}\vartheta + b_x^2\operatorname{Cos}2\vartheta + \dots\right) \text{ geben}$$

$$-2\alpha x\operatorname{Sin}\vartheta\operatorname{Cos}(\varkappa-2)\vartheta\,.\,b_x^{\varkappa-2} - 2\alpha x\operatorname{Sin}\vartheta\operatorname{Cos}\varkappa\vartheta\, b_x^{\varkappa}$$

$$= \left(\alpha x\, b_x^{\varkappa} - \alpha x\, b_x^{\varkappa-2}\right)\operatorname{Sin}(\varkappa-1)\vartheta,$$

und eben so wird

$$(1-2\alpha\operatorname{Cos}\vartheta+\alpha^2)\left(-b_x^1\operatorname{Sin}\vartheta - 2b_x^2\operatorname{Sin}2\vartheta - \dots\right) \text{ geben}$$

$$(1+\alpha^2)(1-\varkappa)b_x^{\varkappa-1}\operatorname{Sin}(\varkappa-1)\vartheta + 2\alpha(\varkappa-2)b_x^{\varkappa-2}\operatorname{Cos}\vartheta\operatorname{Sin}(\varkappa-2)\vartheta$$

$$+\,2\alpha\varkappa\, b_x^{\varkappa}\operatorname{Cos}\vartheta\operatorname{Sin}\varkappa\vartheta$$

$$= \left\{-(1+\alpha^2)(\varkappa-1)b_x^{\varkappa-1} + \alpha(\varkappa-2)b_x^{\varkappa-2} + \alpha\varkappa\, b_x^{\varkappa}\right\}\operatorname{Sin}(\varkappa-1)\vartheta.$$

Setzt man beyde Faktoren von Sin $(\varkappa-1)\vartheta$ gleich, so erhält man

$$b_x^{\varkappa} = \frac{(\varkappa-1)(1+\alpha^2)\,b_x^{\varkappa-1} - (\varkappa+x-2)\,\alpha\, b_x^{\varkappa-2}}{(\varkappa-x)\,\alpha} \quad \dots\dots \text{(a)}$$

und diese Gleichung gibt daher b_x^2, b_x^3, ..., wenn man b_x^0 und b_x^1 hat.

II. Verwandelt man x in x + 1, so ist

$$(1-2\alpha\operatorname{Cos}\vartheta+\alpha^2)^{-x-1} = \tfrac{1}{2}b_{x+1}^0 + b_{x+1}^1\operatorname{Cos}\vartheta + b_{x+1}^2\operatorname{Cos}2\vartheta + \dots$$

Multiplicirt man beyde Theile dieser Gleichung durch $(1-2\alpha\operatorname{Cos}\vartheta+\alpha^2)$ und substituirt für $(1-2\alpha\operatorname{Cos}\vartheta+\alpha^2)^{-x}$ die im Anfange von (I) gegebene Reihe, so ist

$$\tfrac{1}{2}b^0_x + b^1_x \operatorname{Cos}\vartheta + b^2_x \operatorname{Cos}2\vartheta + \ldots = (1 - 2\alpha\operatorname{Cos}\vartheta + \alpha^2)$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}b^0_{x+1} + b^1_{x+1}\operatorname{Cos}\vartheta + b^2_{x+1}\operatorname{Cos}2\vartheta + \ldots\right\}$$

Der Coefficient von Cos $\varkappa\vartheta$ in dem ersten Theile dieser Gleichung ist $b^\varkappa_x$, und in dem zweyten Theile ist das Glied dieses Coefficienten

$$(1+\alpha^2)\, b^\varkappa_{x+1} \operatorname{Cos}\varkappa\vartheta - 2\alpha\, b^{\varkappa+1}_{x+1} \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Cos}(\varkappa+1)\vartheta$$

$$-2\alpha\, b^{\varkappa-1}_{x+1} \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Cos}(\varkappa-1)\vartheta$$

$$= \left\{(1+\alpha^2)\, b^\varkappa_{x+1} - \alpha b^{\varkappa+1}_{x+1} - \alpha b^{\varkappa-1}_{x+1}\right\} \operatorname{Cos}\varkappa\vartheta.$$

Setzt man also beyde Coefficienten von Cos $\varkappa\vartheta$ gleich, so ist

$$b^\varkappa_x = (1+\alpha^2)\, b^\varkappa_{x+1} - \alpha b^{\varkappa+1}_{x+1} - \alpha b^{\varkappa-1}_{x+1}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke den Werth von $b^{\varkappa+1}_{x+1}$ aus (a), nähmlich

$$b^{\varkappa+1}_{x+1} = \frac{\varkappa(1+\alpha^2)\, b^\varkappa_{x+1} - (\varkappa+x)\alpha\, b^{\varkappa-1}_{x+1}}{(\varkappa-x)\,\alpha}$$

so erhält man

$$b^\varkappa_x = \frac{2\alpha x\, b^{\varkappa-1}_{x+1} - (1+\alpha^2)x\, b^\varkappa_{x+1}}{\varkappa - x} \quad \ldots\ (1)$$

oder wenn man $\varkappa$ in $\varkappa+1$ verwandelt,

$$b^{\varkappa+1}_x = \frac{2\alpha x\, b^\varkappa_{x+1} - (1+\alpha^2)x\, b^{\varkappa+1}_{x+1}}{\varkappa - x + 1}$$

oder wenn man wieder den vorigen Werth von $b^{\varkappa+1}_{x+1}$ substituirt,

$$b^{\varkappa+1}_x = \frac{\alpha x(1+\alpha^2)(\varkappa+x)\, b^{\varkappa-1}_{x+1} + x\left\{2(\varkappa-x)\alpha^2 - \varkappa(1+\alpha^2)^2\right\} b^\varkappa_{x+1}}{\alpha\,(\varkappa-x)\,(\varkappa-x+1)} \quad ..(2)$$

Eliminirt man dann $b^{\varkappa-1}_{x+1}$ aus den Gleichungen (1) und (2), so ist

$$b^{\varkappa}_{x+1} = \frac{(1+\alpha^2)(\varkappa+x)\, b^{\varkappa}_{x} - 2\,(\varkappa-x+1)\,\alpha b^{\varkappa+1}_{x}}{x(1-\alpha^2)^2} \quad \ldots (b)$$

oder wenn man hier wieder den Werth von $b^{\varkappa+1}_{x}$ aus (a) substituirt,

$$b^{\varkappa}_{x+1} = \frac{(x-\varkappa)\,(1+\alpha^2)\, b^{\varkappa}_{x} + 2\,(\varkappa+x-1)\,\alpha b^{\varkappa-1}_{x}}{x(1-\alpha^2)^2} \quad \ldots (c)$$

und diese Gleichung wird die Werthe von

$$b^{0}_{x+1},\ b^{1}_{x+1},\ b^{2}_{x+1} \ldots \text{ geben,}$$

wenn die von b^{0}_{x}, b^{1}_{x}, b^{2}_{x} . . . bekannt sind.

III. Wir wollen nun noch die Gröſsen b^{0}_{x} und b^{1}_{x} suchen, von welchen, wie wir gesehen haben, alle anderen abhängen. Sey der Kürze wegen $\lambda = 1 - 2\alpha \operatorname{Cos} \vartheta + \alpha^2$, also auch

$$\lambda^{-x} = \left(1-\alpha\varepsilon^{\vartheta\sqrt{-1}}\right)^{-x} \cdot \left(1-\alpha\varepsilon^{-\vartheta\sqrt{-1}}\right)^{-x}, \text{ wo log.nat.}\varepsilon=1 \text{ ist.}$$

Entwickelt man den zweyten Theil dieser Gleichung, so ist klar, daſs die zwey Gröſsen $\varepsilon^{\varkappa\vartheta\sqrt{-1}}$ und $\varepsilon^{-\varkappa\vartheta\sqrt{-1}}$ in der Entwicklung denselben Coefficienten haben werden, weil sie vor der Entwicklung denselben Coefficienten α haben. Nennt man also $M_{\varkappa}$ diesen Coefficienten von $\varepsilon^{\varkappa\vartheta\sqrt{-1}}$ oder $\varepsilon^{-\varkappa\vartheta\sqrt{-1}}$, so wird die Summe dieser beyden Glieder $M_{\varkappa}\,\varepsilon^{\varkappa\vartheta\sqrt{-1}}$ und $M_{\varkappa}\,\varepsilon^{-\varkappa\vartheta\sqrt{-1}}$ gleich $2\,M_{\varkappa} \operatorname{Cos} \varkappa\vartheta$ seyn, und da dieser Ausdruck auch gleich

$b^{\varkappa}_{x} \operatorname{Cos} \varkappa\vartheta$ seyn muſs, so hat man $b^{\varkappa}_{x} = 2\,M_{\varkappa}$.

Nun ist aber λ^{-x} gleich dem Produkte der beyden Reihen

$$1 + \alpha x \varepsilon^{\vartheta\sqrt{-1}} + \frac{\alpha^2 x\,(x+1)}{1.2}\,\varepsilon^{2\vartheta\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{\alpha^3 . x\,(x+1)(x+2)}{1.2.3}\,\varepsilon^{3\vartheta\sqrt{-1}} + \ldots$$

$$1 + \alpha x\varepsilon^{-\vartheta\sqrt{-1}} + \frac{\alpha^2 x(x+1)}{1.2}\varepsilon^{-2\vartheta\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{\alpha^3 x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\varepsilon^{-3\vartheta\sqrt{-1}} + \ldots$$

Wir wollen diese beyden Reihen so ausdrücken,

$$w_0 + w_1\varepsilon^{\vartheta\sqrt{-1}} + w_2\varepsilon^{2\vartheta\sqrt{-1}} \ldots$$

$$+ w_\varkappa\varepsilon^{\varkappa\vartheta\sqrt{-1}} + w_{\varkappa+1}\varepsilon^{(\varkappa+1)\vartheta\sqrt{-1}} + w_{\varkappa+2}\varepsilon^{(\varkappa+2)\vartheta\sqrt{-1}} + \ldots$$

$$w_0 + w_1\varepsilon^{-\vartheta\sqrt{-1}} + w_2\varepsilon^{-2\vartheta\sqrt{-1}} \ldots$$

$$+ w_\varkappa\varepsilon^{-\varkappa\vartheta\sqrt{-1}} + w_{\varkappa+1}\varepsilon^{-(\varkappa+1)\vartheta\sqrt{-1}} + \ldots$$

In dem Produkte derselben ist der Faktor von $\varepsilon^{\varkappa\vartheta\sqrt{-1}}$ gleich

$$w_0 w_\varkappa + w_1 w_{\varkappa+1} + w_2 w_{\varkappa+2} + w_3 w_{\varkappa+3} + \ldots$$

Für $\varkappa = 0$ ist daher dieser Factor

$$(w_0)^2 + (w_1)^2 + (w_2)^2 + \ldots = M_0$$

und für $\varkappa = 1$

$$w_0 w_1 + w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_4 + \ldots = M_1,$$

d. h. wenn man die Werthe von

$$w_0 = 1;\ w_1 = \alpha x,\ w_2 = \frac{\alpha^2 x(x+1)}{1.2} \ldots$$

wieder herstellt, so ist

$$M_0 = 1 + (\alpha x)^2 + \left(\frac{\alpha^2 x(x+1)}{1.2}\right)^2 + \ldots \text{ und}$$

$$M_1 = \alpha x + \alpha^3 x . \frac{x(x+1)}{1.2} + \alpha^5 \frac{x(x+1)}{1.2} . \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} + \ldots$$

und da $b^0_x = 2M_0$, und $b^1_x = 2M_1$ war, so ist auch

$$\left.\begin{array}{l} b^0_x = 2\left\{1 + (\alpha x)^2 + \left(\alpha^2 . \frac{x(x+1)}{1.2}\right)^2\right. \\ \qquad \left. + \left(\alpha^3 \frac{(x+1)(x+2)}{1.2.3}\right)^2 + \ldots\right\} \text{ und} \\ b^1_x = 2\left\{\alpha x + \alpha^3 x . \frac{x(x+1)}{1.2}\right. \\ \left. + \alpha^5 . \frac{x(x+1)}{1.2} . \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} + \ldots\right\} \end{array}\right\} \ldots (d)$$

Damit diese beyden letzten Reihen convergiren, mufs α kleiner als die Einheit seyn. Wir haben aber $\alpha = \frac{a}{a'}$ gesetzt, wodurch man

$(a^2 - 2aa' \operatorname{Cos} \vartheta + a'^2)^{-x} = a'^{-2x}(1 - 2\alpha \operatorname{Cos} \vartheta + \alpha^2)^{-x}$ erhielt.

Sollte $a > a'$ seyn, so wird man $\alpha = \frac{a'}{a}$ annehmen, wodurch man erhält

$$(a^2 - 2aa' \operatorname{Cos} \vartheta + a'^2)^{-x} = a^{-2x} . (1 - 2\alpha \operatorname{Cos} \vartheta + \alpha^2)^{-x},$$

so dafs also diese zwey Reihen immer convergiren, wenn man $\alpha = \frac{a}{a'}$ und $a < a'$ annimmt.

Wir werden in dem folgenden Kapitel sehen, dafs man in der Theorie der Störungen vorzüglich die Werthe von $b^0_{\frac{1}{2}}$ und $b^1_{\frac{1}{2}}$ braucht, indem man in den Reihen (d) die Gröfse $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{3}{2}$ setzt. Da aber für diese zwey besonderen Fälle die Reihen (d) nur wenig convergiren, wenn nicht α sehr klein ist, so wollen wir $x = -\frac{1}{2}$ setzen, wodurch diese Reihen in folgende übergehen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} b^0_{-\frac{1}{2}} = 1 + (\frac{1}{2}\alpha)^2 + \left(\frac{1.1}{2.4} . \alpha^2\right)^2 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\alpha^3\right)^2 \\ \qquad + \left(\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} . \alpha^4\right)^2 + \ldots \\ \frac{1}{2} b^1_{-\frac{1}{2}} = -\alpha + \frac{1.1}{2.4}\alpha^3 + \frac{1}{4} . \frac{1.1.3}{2.4.6}\alpha^5 \\ + \frac{1.3}{4.6} . \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\alpha^7 + \frac{1.3.5}{4.6.8} . \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10} . \alpha^9 \ldots \end{array}\right\} \ldots (d')$$

Hat man so $b^{0}_{-\frac{1}{2}}$ und $b^{1}_{-\frac{1}{2}}$, so findet man $b^{0}_{\frac{1}{2}}$ aus der Gleichung (b)

$$b^{0}_{\frac{1}{2}} = \frac{(1+\alpha^2)\, b^{0}_{-\frac{1}{2}} + 6\alpha .\, b^{1}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2} \quad \ldots (e)$$

Dieselbe Gleichung gibt auch

$$b^{1}_{\frac{1}{2}} = \frac{10\,\alpha\, b^{2}_{-\frac{1}{2}} - (1+\alpha^2)\, b^{1}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}$$

Die Gleichung (a) aber gibt

$$10\,\alpha\, b^{2}_{-\frac{1}{2}} = 2\alpha\, b^{0}_{-\frac{1}{2}} + 4\,(1+\alpha^2)\, b^{1}_{-\frac{1}{2}},$$ also hat man

$$b^{1}_{\frac{1}{2}} = \frac{2\,\alpha\, b^{0}_{-\frac{1}{2}} + 3\,(1+\alpha^2)\, b^{1}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2} \quad \ldots (f)$$

Kennt man so $b^{0}_{\frac{1}{2}}$ und $b^{1}_{\frac{1}{2}}$ aus (e) und (f), so gibt die Gleichung (a) die Werthe von $b^{2}_{\frac{1}{2}}$, $b^{3}_{\frac{1}{2}}$, $b^{4}_{\frac{1}{2}}$, und die Gleichung (c) die Werthe von $b^{2}_{\frac{3}{2}}$, $b^{3}_{\frac{3}{2}}$, $b^{4}_{\frac{3}{2}}$

Noch fehlt $b^{0}_{\frac{3}{2}}$ und $b^{1}_{\frac{3}{2}}$. Die Gleichung (b) gibt für $\varkappa = 0$ und $x = \frac{1}{2}$

$$b^{0}_{\frac{3}{2}} = \frac{(1+\alpha^2)\, b^{0}_{\frac{1}{2}} - 2\alpha\, b^{1}_{\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}$$

Substituirt man die Werthe von $b^{0}_{\frac{1}{2}}$ und $b^{1}_{\frac{1}{2}}$ aus (e) und (f), so ist

$$b^{0}_{\frac{3}{2}} = \frac{b^{0}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2} \quad \ldots (g)$$

Eben so gibt die Gleichung (c) für $\varkappa = 1$ und $x = \frac{1}{2}$

$$b^{1}_{\frac{3}{2}} = \frac{2\,\alpha\, b^{0}_{\frac{1}{2}} - (1+\alpha^2)\, b^{1}_{\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}$$

also wenn man wieder die Werthe von $b^{0}_{\frac{1}{2}}$ und $b^{1}_{\frac{1}{2}}$ substituirt

$$b^1_{\frac{3}{2}} = \frac{-3\,b^1_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2} \ldots \text{(h)}$$

§. 4.

Nachdem wir so die Gröſsen $b^{\varkappa}_{x}$ bestimmt haben, wollen wir nun die Werthe von $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$... suchen. Wir haben oben angenommen

$$\frac{a}{a'^2}\,\text{Cos}\,\vartheta - (a^2 - 2\,aa'\,\text{Cos}\,\vartheta + a'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,A^{(0)} + A^{(1)}\,\text{Cos}\,\vartheta + A^{(2)}\,\text{Cos}\,2\vartheta + \ldots$$

Ist aber $\frac{a}{a'} = \alpha$, so ist

$$(a^2 - 2\,aa'\,\text{Cos}\,\vartheta + a'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a'}\,(1 - 2\alpha\,\text{Cos}\,\vartheta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}},$$

und dieser letzte Ausdruck war gleich

$$\frac{1}{a'}\,(\tfrac{1}{2}\,b^0_{\frac{1}{2}} + b^1_{\frac{1}{2}}\,\text{Cos}\,\vartheta + b^2_{\frac{1}{2}}\,\text{Cos}\,2\vartheta + \ldots)$$

also ist

$$\frac{a}{a'^2}\,\text{Cos}\,\vartheta - (a^2 - 2\,aa'\,\text{Cos}\,\vartheta + a'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2\,a'}\,.\,b^0_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'}\,b^1_{\frac{1}{2}}\right)\text{Cos}\,\vartheta - \frac{1}{a'}\,b^2_{\frac{1}{2}}\,\text{Cos}\,2\,\vartheta - \ldots$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der ersten der vorhergehenden Gleichungen, so sieht man, daſs allgemein ist

$$A^{(\varkappa)} = -\frac{1}{a'}\,b^{\varkappa}_{\frac{1}{2}} \ldots \text{(i)}$$

wo $\varkappa$ alle positive und negative ganze Zahlen, auch $\varkappa = 0$ bezeichnet. Für den besondern Fall $\varkappa = 1$ aber hat man:

$$A^{(1)} = \frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'}\,.\,b^1_{\frac{1}{2}} \ldots \text{(k)}$$

I. Da wir in dem folgenden Kapitel auch die Gröſse $(a^2 - 2\,aa'\,\text{Cos}\,\vartheta + a'^2)^{-\frac{3}{2}}$ brauchen werden, die wir gleich

$$\tfrac{1}{2} B^{(0)} + B^{(1)} \operatorname{Cos} \vartheta + B^{(2)} \operatorname{Cos} 2\vartheta + B^{(3)} \operatorname{Cos} 3\vartheta + \ldots\ldots$$

setzen wollen, so können wir auch dieser Reihe, wie im Anfange des 3. §. die Form $\tfrac{1}{2} \Sigma B^{(\varkappa)} \operatorname{Cos} \varkappa\vartheta$ geben, wo $\varkappa$ wieder alle positive und negative ganze Zahlen, auch $\varkappa = 0$ mit begriffen, bezeichnet. Da aber diese Reihe die Entwicklung der Gröſse

$$(a')^{-3} \cdot (1 - 2\alpha \operatorname{Cos} \vartheta + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ ist,}$$

und diese Entwicklung nach dem Vorhergehenden gleich

$$(a')^{-3} \cdot \left(\tfrac{1}{2} b^0_{\frac{3}{2}} + b^1_{\frac{3}{2}} \operatorname{Cos} \vartheta + b^2_{\frac{3}{2}} \operatorname{Cos} 2\vartheta + \ldots\right) \text{ ist,}$$

so hat man allgemein

$$B^{(\varkappa)} = \frac{1}{a'^3} \cdot b^\varkappa_{\frac{3}{2}} \ldots (\mathrm{l})$$

für alle Werthe von $\varkappa$ ohne Ausnahme.

§. 5.

Nachdem wir so die Gröſsen $A^{(\varkappa)}$ und $B^{(\varkappa)}$ gefunden haben, sind noch die Werthe der Differentialien dieser Gröſsen in Beziehung auf a und a′ zu suchen.

Es sey (wie im §. 3. III) $\lambda = 1 - 2\alpha \operatorname{Cos} \vartheta + \alpha^2$, also (nach §. 3. I)

$$\lambda^{-x} = \tfrac{1}{2} b^0_x + b^1_x \operatorname{Cos} \vartheta + b^2_x \operatorname{Cos} 2\vartheta + \ldots$$

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf α, so ist

$$-2x(\alpha - \operatorname{Cos} \vartheta).\lambda^{-x-1} = \tfrac{1}{2} \frac{db^0_x}{d\alpha} + \frac{db^1_x}{d\alpha} \operatorname{Cos} \vartheta$$

$$+ \frac{db^2_x}{d\alpha} \operatorname{Cos} 2\vartheta + \ldots\ldots$$

oder da $\alpha - \operatorname{Cos} \vartheta = \dfrac{\alpha^2 + \lambda - 1}{2\alpha}$ ist, so ist auch

$$\frac{x}{\alpha}(1 - \alpha^2).\lambda^{-(x+1)} - \frac{x}{\alpha}\lambda^{-x} = \tfrac{1}{2} \frac{db^0_x}{d\alpha} + \frac{db^1_x}{d\alpha} \operatorname{Cos} \vartheta$$

$$+ \frac{db^2_x}{d\alpha} \operatorname{Cos} 2\vartheta + \ldots\ldots$$

Vergleicht man die Coefficienten von Cos $\varkappa\,\vartheta$, so hat man

$$\frac{db^{\varkappa}_{x}}{d\alpha} = \frac{x}{\alpha}(1-\alpha^2)\, b^{\varkappa}_{x+1} - \frac{x}{\alpha} b^{\varkappa}_{x}.$$

Aber die Gleichung (b) des §. 3. gibt

$$\frac{x}{\alpha}(1-\alpha^2)\, b^{\varkappa}_{x+1} = \frac{(x+\varkappa)(1+\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)} b^{\varkappa}_{x} - \frac{2(\varkappa-x+1)}{1-\alpha^2}.\, b^{\varkappa+1}_{x}$$

Addirt man also zu diesem Ausdrucke die Gröſse

$$-\frac{x(1-\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)} b^{\varkappa}_{x},$$

so erhält man

$$\frac{db^{\varkappa}_{x}}{d\alpha} = \frac{\varkappa+\alpha^2(\varkappa+2x)}{\alpha(1-\alpha^2)} b^{\varkappa}_{x} - \frac{2(\varkappa-x+1)}{1-\alpha^2} b^{\varkappa+1}_{x}, \;\ldots\; \text{(m)}$$

und das Differential dieser Gleichung ist

$$\frac{d^2 b^{\varkappa}_{x}}{d\alpha^2} = \frac{\varkappa+\alpha^2(\varkappa+2x)}{\alpha(1-\alpha^2)} . \frac{db^{\varkappa}_{x}}{d\alpha}$$

$$+ \frac{2\alpha^2(1+\alpha^2)(\varkappa+x)-(1-\alpha^2)^2\varkappa}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2} . b^{\varkappa}_{x}$$

$$-\frac{2(\varkappa-x+1)}{1-\alpha^2} . \frac{db^{\varkappa+1}_{x}}{d\alpha} - \frac{4(\varkappa-x+1)\alpha}{(1-\alpha^2)^2} . b^{\varkappa+1}_{x} \;\ldots\; \text{(n)}$$

I. Die Gleichung (i) gibt daher

$$\frac{dA^{(\varkappa)}}{da} = -\frac{1}{a'} . \left(\frac{d\alpha}{da}\right) . \frac{db^{\varkappa}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}, \text{ oder da } \left(\frac{d\alpha}{da}\right) = \frac{1}{a'} \text{ ist},$$

$$\frac{dA^{(\varkappa)}}{da} = -\frac{1}{a'^2} . \frac{db^{\varkappa}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} \;\ldots\; \text{(o)}$$

und für den besondern Fall $\varkappa = 1$

$$\frac{dA^{(1)}}{da} = \frac{1}{a'^2}\left(1 - \frac{db^{1}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right) \;\ldots\; \text{(o')}$$

und endlich allgemein, selbst für den Fall $\varkappa = 1$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 A^{(x)}}{da^2} &= -\frac{1}{a'^3}\cdot\frac{d^2 b^x_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\\ \frac{d^3 A^{(x)}_1}{da^3} &= -\frac{1}{a'^4}\cdot\frac{d^3 b^x_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\end{aligned}\right\}\ldots(p)$$

II. Um eben so die Differentialien von A in Beziehung auf a′ zu erhalten, wollen wir bemerken, daſs man für jede homogene Funktion von x und y z. B. für die Funktion $z = px^m + qy^m$, der Dimension m, die Gleichung hat

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = mz.$$

Da nun $A^{(x)}$ eine solche homogene Funktion von a und a′ der Dimension — 1 ist, so hat man

$$a\left(\frac{dA^{(x)}}{da}\right) + a'\left(\frac{dA^{(x)}}{da'}\right) = -A^{(x)}$$

woraus sofort folgt

$$a'\left(\frac{dA^{(x)}}{da'}\right) = -A^{(x)} - a\left(\frac{dA^{(x)}}{da}\right)$$

$$a'\left(\frac{d^2A^{(x)}}{da\,da'}\right) = -2\left(\frac{dA^{(x)}}{da}\right) - a\left(\frac{d^2 A^{(x)}}{da^2}\right)$$

$$a'^2\left(\frac{d^2A^{(x)}}{da'^2}\right) = 2A^{(x)} + 4a\left(\frac{dA^{(x)}}{da}\right) + a^2\left(\frac{d^2A^{(x)}}{da^2}\right)$$

III. Eben so gibt die Gleichung (l)

$$B^{(x)} = \frac{1}{a'^3}\, b^x_{\frac{3}{2}}$$

also auch

$$\left(\frac{dB^{(x)}}{da}\right) = \frac{1}{a'^4}\cdot\frac{db^x_{\frac{3}{2}}}{d\alpha},\ \left(\frac{d^2B^{(x)}}{da^2}\right) = \frac{1}{a'^5}\left(\frac{d^2b^x_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2}\right)$$

und da $B^{(x)}$ wieder eine homogene Funktion von a und a′ der Dimension — 3 ist, so hat man

$$a\left(\frac{dB^{(x)}}{da}\right) + a'\left(\frac{dB^{(x)}}{da'}\right) = -3\,B^{(x)}$$

also auch

$$a'\left(\frac{dB^{(x)}}{da'}\right) = -3\,B^{(x)} - a\left(\frac{dB^{(x)}}{da}\right) \text{ u. s. w.}$$

NEUNTES KAPITEL.

Problem der drey Körper.

§. 1.

Um die Bewegung eines Körpers, dessen Masse m ist, um einen Central-Körper der Masse M unter der Voraussetzung zu finden, dafs auf den bewegten Körper m noch andere Körper, deren Massen m′ m″ m‴.. sind, wirken, seyen x y z die rechtwinklichten Coordinaten, welche die Lage von m gegen M bestimmen. Die Lage von m′ m″. . . gegen denselben Central-Körper M werde durch die den vorigen parallelen Coordinaten x′ y′ z′ und x″ y″ z″. . bestimmt, wo der Anfang aller dieser Coordinatenachsen in dem Mittelpunkte von M ist, und wo daher die Entfernung der Körper m, m′, m″. . . von dem Mittelpunkte von M nach der Ordnung

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r, \quad \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = r',$$

$$\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = r'' \text{ ist, u. s. w.}$$

Dieses vorausgesetzt sey

$$R = \frac{m'}{r'^3}(xx' + yy' + zz') + \frac{m''}{r''^3}(xx'' + yy'' + zz'') + \ldots$$

$$- \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}}$$

$$- \frac{m''}{\sqrt{(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2}} - \ldots$$

so hat man für die gesuchten Gleichungen, welche die Bewegung des Körpers m um M bestimmen, nach Cap. II, §. 3. I

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \left(\frac{dR}{dx}\right) \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} + \left(\frac{dR}{dy}\right) \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right) \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

wo wieder $\mu = M + m$ ist. Diese Gleichungen, welche, wie man sieht, für $R = o$ in die (des Cap. II §. 4) übergehen, sollen nun integrirt werden.

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Ordnung durch dx, dy, dz, so gibt die Summe dieser Produkte, wenn man sie integrirt,

$$o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int dR \ldots (B)$$

wo a die Constante der Integration ist, die nach Th. II, p. 29 gleich der halben großen Achse der Bahn des Körpers m seyn soll, wenn $R = o$ ist, oder wenn die Wirkungen der anderen Körper m' m'' m'''... verschwinden.

Multiplicirt man die Gleichungen A nach der Ordnung durch x, y, z und addirt ihre Summe zu der Gleichung B, so erhält man, da $\frac{1}{2} d^2.r^2 = d.rdr = xd^2x + yd^2y + zd^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist,

$$o = \frac{1}{2}.\frac{d^2.r^2}{dt^2} - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int dR + rR' \ldots (C)$$

wo der Kürze wegen

$$r.R' = x\left(\frac{dR}{dx}\right) + y\left(\frac{dR}{dy}\right) + z\left(\frac{dR}{dz}\right) \text{ gesetzt worden ist.}$$

Es sey nun $d\nu$ der zwischen dem Radius r und $r + dr$ eingeschlossene Bogen, also $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\nu^2$, und daher die Gleichung (B)

$$o = \frac{dr^2 + r^2 d\nu^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int dR$$

Subtrahirt man diese Gleichung von (C), und bemerkt, daſs $\frac{1}{2} d^2.r^2 = dr^2 + rd^2r$ ist, so hat man

$$o = \frac{rd^2r - r^2 d\nu^2}{dt^2} + \frac{\mu}{r} + rR' \ldots (D)$$

Multiplicirt man aber die erste der Gleichungen A durch y und die zweyte durch $-x$, so ist die Summe beyder Produkte

$$o = \frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} + x\left(\frac{dR}{dy}\right) - y\left(\frac{dR}{dx}\right)$$

und deren Integral

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = c + \int dt \left\{ y\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\left(\frac{dR}{dy}\right) \right\}$$

und eben so erhält man

$$\frac{x\,dz - z\,dx}{dt} = c' + \int dt \left\{ z \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \left(\frac{dR}{dz}\right) \right\}$$

$$\frac{y\,dz - z\,dy}{dt} = c'' + \int dt \left\{ z \left(\frac{dR}{dy}\right) - y \left(\frac{dR}{dz}\right) \right\}$$

wo $c\ c'\ c''$ die Constanten der Integration sind. Wenn $R = o$ ist, wo dann nach Th. II p. 31. die Bahn des Körpers m eine ebene Curve, ein Kegelschnitt ist, und wenn man annimmt, daſs diese Curve in der Ebene der $x\,y$ liegt, so ist $z = o$, und dann ist nach Th. II p. 26. und Cap. VII, §. 4.5 die erste jener Constanten $c = \sqrt{a\mu\,(1 - e^2)}$ wo ae die Excentricität der Bahn von m ist in Theilen der halben groſsen Achse a dieser Bahn ausgedrückt. Man kann noch bemerken, daſs a. a. O. p. 28. die Gröſse μ gleich $\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a^3$ oder $\mu = n^2 a^3$ ist, wenn n die mittlere tägliche Bewegung des Körpers m um M bezeichnet.

Multiplicirt man die zweyte der drey letzten Gleichungen durch y, und die dritte durch $-$ x, so gibt ihre Summe

$$\frac{z\,(x\,dy - y\,dx)}{dt} = c'y - c''x + y \int dt \left\{ z \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \left(\frac{dR}{dz}\right) \right\}$$
$$- x \int dt \left\{ z \left(\frac{dR}{dy}\right) - y \left(\frac{dR}{dz}\right) \right\}$$

Die erste jener drey Gleichungen aber gibt, wenn man die höheren Potenzen von

$$\int dt \left\{ y \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \left(\frac{dR}{dy}\right) \right\} \text{ vernachlässiget,}$$

$$\frac{dt}{x\,dy - y\,dx} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c^2} \int dt \left\{ y \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \left(\frac{dR}{dy}\right) \right\}$$

Die Verbindung der beyden letzten Ausdrücke endlich gibt

$$z = \frac{c'y - c''x}{c} - \frac{(c'y - c''x)}{c^2} \int dt \left\{ y \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \left(\frac{dR}{dy}\right) \right\}$$
$$+ \frac{y}{c} \int dt \left\{ z \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \left(\frac{dR}{dz}\right) \right\}$$
$$- \frac{x}{c} \int dt \left\{ z \left(\frac{dR}{dy}\right) - y \left(\frac{dR}{dz}\right) \right\} \ldots\ldots (E)$$

Die Gleichung (C) gibt die Aenderung des elliptischen Werthes von r, welcher elliptische Werth von r nähmlich dann statt haben würde, wenn $R = o$, oder wenn der dritte Körper m' nicht da wäre, d. h. diese Gleichung gibt die von der Wirkung dieses

Körpers m′ entspringende Störung von r, und wenn diese bekannt ist, so gibt (D) die Störung von v, und endlich (E) die Störung von z.

§. 2.

Wir wollen nun diese drey Gleichungen zur bequemeren Anwendung weiter entwickeln. Diese Entwicklung einfacher zu machen, wollen wir voraussetzen, wie es bey den Körpern unseres Sonnensystemes in der That der Fall ist, daſs die Massen der Planeten m m′ m″ gegen die Masse M der Sonne sehr klein, daſs also die Störungen, welche m′ m″... in der Bewegung von m hervorbringt, ebenfalls sehr klein sind, und daſs endlich auch die Excentricitäten und Neigungen aller Planeten nur geringe Gröſsen sind, deren höhere Potenzen man ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Ohne diesen Voraussetzungen würde es für den gegenwärtigen Zustand unserer Analysis so gut als unmöglich seyn, die Gleichungen (A) zu integriren; mit ihnen aber wird es erlaubt seyn, die Störungen des m durch die verschiedenen anderen Planeten m′ m″ m‴... von einander abgesondert zu bestimmen, wodurch also unser Problem auf die Bestimmung der Bewegung eines Planeten m um die Sonne zurück geführt wird, auf den bloſs ein anderer Planet m′ störend einwirkt.

Nennt man also r den ungestörten elliptischen Radius von m, und δr dessen Störung durch m′, so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken $r = r + \delta r$, $r^2 = r^2 + 2r\delta r$ und $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{\delta r}{r^2}$ setzen, wodurch die Gleichung (C) in folgende übergeht,

$$o = \frac{1}{2}\frac{d^2.(r^2 + 2r\delta r)}{dt^2} + \mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} + \frac{\delta r}{r^2}\right) + 2\int dR + rR'.$$

Für die ungestörte Ellipse aber ist die Gleichung (C)

$$o = \frac{1}{2}\frac{d^2.r^2}{dt^2} + \mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right),$$

also beyder Gleichungen Differenz

$$o = \frac{d^2.(r\delta r)}{dt^2} + \mu.\frac{\delta r}{r^2} + 2\int dR + rR' \; . \; . \; . \; (1)$$

Aber für R = o werden die beyden ersten der Gleichungen (A)

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} \text{ und } o = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3}$$

Multiplicirt man daher die erste dieser beyden Gleichungen durch $r\delta r$ und die Gleichung (1) durch x, so gibt beyder Produckte Differenz

$$o = \frac{r\,\delta r\, d^2x - x d^2.(r\,\delta r)}{dt^2} - 2x \int dR - x r R'$$

und deren Integral in Beziehung auf d

$$o = \frac{r\,\delta r\, dx - x d.(r\,\delta r)}{dt} - 2\int x\, dt \int dR - \int x r R'.\, dt \;.\;.\;.\; (2)$$

Multiplicirt man eben so die letzte der zwey elliptischen Gleichungen durch $r\,\delta r$ und die Gleichung (1) durch y, so ist ihre Differenz

$$o = \frac{r\,\delta r\, dy - y d.(r\,\delta r)}{dt} - 2\int y\, dt \int dR - \int y r R'\, dt \;.\;.\; (3)$$

Multiplicirt man endlich (2) durch y und (3) durch x, so gibt beyder Produkte Differenz

$$o = r\,\delta r \frac{(x\,dy - y\,dx)}{dt} + 2y\int x\,dt \int dR - 2x \int y\, dt \int dR$$
$$+ y\int x r R' dt - x \int y r R' dt$$

Nimmt man nun für die Ebene der xy die der Bahn des Planeten für irgend eine gegebene Epoche an, so wird z nur von der Ordnung der störenden Kraft von m′, also sehr klein seyn, und da man die Quadrate dieser Kraft vernachlässiget, so wird auch die Gröſse $z\left(\frac{dR}{dz}\right)$ vernachlässiget werden können. Aus derselben Ursache wird auch der Radius r von seiner Projection in der Ebene xy nur um Gröſsen der Ordnung z^2 verschieden seyn, und der Winkel, welchen dieser Radius mit der Achse der x macht, wird von der Projection dieses Winkels in xy ebenfalls nur um Gröſsen der Ordnung z^2 verschieden seyn. Setzt man daher diesen Winkel gleich ν, so wird man annehmen können

$$x = r \,\text{Cos}\, \nu \text{ und } y = r \,\text{Sin}\, \nu$$

Nun ist der vollständige Werth von dR

$$dR = \left(\frac{dR}{dx}\right) dx + \left(\frac{dR}{dy}\right) dy + \left(\frac{dR}{dz}\right) dz = \left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{d\nu}\right) d\nu$$

oder wenn man in dieser Gleichung

$$dx = \frac{x\,dr}{r} - y\,d\nu \text{ und } dy = \frac{y\,dr}{r} + x\,d\nu \text{ substituirt,}$$

und dann die Gröſsen dr und $d\nu$ als von einander unabhängig betrachtet, und nach dem Vorhergehenden $\left(\frac{dR}{dz}\right) dz$ wegläſst,

$$x\left(\frac{dR}{dx}\right)+y\left(\frac{dR}{dy}\right)=r\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

woraus folgt, daſs $R' = \left(\frac{dR}{dr}\right)$ ist. Substituirt man daher diesen Werth von R' in der vorhergehenden Gleichung, und setzt nach dem Vorhergehenden

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \mu\sqrt{a(1-e^2)}$$

so erhält man

$$r\delta r = \frac{x\int y\,dt.\left\{2\int dR + r\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\} - y\int x dt.\left\{2\int dR + r\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\}}{\sqrt{a\mu(1-e^2)}}$$

oder wenn man für x und y ihre angezeigten Werthe substituirt, und $\mu = n.a^{\frac{3}{2}}$ setzt,

$$\begin{aligned}\delta r.\mu\sqrt{1-e^2} = {} & a\,\mathrm{Cos}\,\nu.\int n\,dt.r\,\mathrm{Sin}\,\nu\left\{2\int dR + r\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\} \\ & - a\,\mathrm{Sin}\,\nu.\int n\,dt.r\,\mathrm{Cos}\,\nu\left\{2\int dR + r\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\}\end{aligned} \quad ..(F)$$

I. Wird eben so der Winkel ν durch die Wirknng des Körpers m' um die Gröſse $\delta\nu$ verändert, oder ist $\delta\nu$ die Störung des Winkels ν, so wird man in den Gleichungen des §. 1. setzen $r = r + \delta r$ und $\nu = \nu + \delta\nu$, wodurch die Gleichung (D), wenn man die vierten und höheren Differentialien vernachlässiget, in folgende übergeht

$$o = \frac{r\,d^2r - r^2\,d\nu^2 + d^2r.\delta r}{dt^2}$$
$$+\frac{r\,d^2.\delta r - 2r\,d\nu^2.\delta r - 2r^2\,d\nu.d\delta\nu}{dt^2} + \frac{\mu}{r}\left(1 - \frac{\delta r}{r}\right) + r\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

Da aber ohne Rücksicht auf Störung

$$\frac{r d\nu^2}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{\mu}{r^2}$$ ist, so hat man

$$o = \frac{d^2r.\delta r + r d^2.\delta r - 2\,r d\nu^2.\delta r - 2\,r^2 d\nu.d\delta\nu}{dt^2} - \mu.\frac{\delta r}{r^2} + r\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

Weiter ist (Th. II p. 26.)

$$\frac{r^2\,d\nu}{dt} = \sqrt{a\mu(1-e^2)} = na^2\sqrt{1-e^2}$$

Substituirt man diese Werthe von $\frac{r\,d\nu^2}{dt^2}$ und $\frac{r^2\,d\nu}{dt}$ in der letzten Gleichung, so ist

$$o = \frac{rd^2.\delta r - d^2r.\delta r}{dt^2} - \frac{3\mu\delta r}{r^2} - \frac{2d\delta\nu}{dt}.\,na^2\sqrt{1-e^2} + r\left(\frac{dR}{dr}\right) \quad .\,.\ (4)$$

Die Gleichung (1) aber gibt

$$o = \mu\frac{\delta r}{r^2} + d^2.\frac{(r\,\delta r)}{dt^2} + 2\int dR + r\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

und es ist $d.(r\delta r) = dr\,\delta r + rd\,\delta r$, also auch

$$d^2.(r\delta r) = d^2r\,\delta r + 2\,drd\,\delta r + rd^2\,\delta r$$

also auch die letzte Gleichung

$$o = \frac{\mu\,\delta r}{r^2} + \frac{d^2r\,\delta r + 2\,drd\,\delta r + rd^2\,\delta r}{dt^2} + 2\int dR + r\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

Substituirt man den Werth von $\frac{\mu\,\delta r}{r^2}$ aus dieser Gleichung in (4), so erhält man

$$\frac{d.\delta\nu}{dt}.\,na^2\sqrt{1-e^2} = \frac{2rd^2\delta r + d^2r.\delta r + 3dr.d\delta r}{dt^2} + 3\int dR + 2r\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

und wenn man integrirt, und bemerkt, dafs $n.a^2 = \frac{\mu}{na}$ ist

$$\delta\nu = \frac{\frac{2r.\,d\delta r + dr.\,\delta r}{a^2n\,dt} + \frac{3a}{\mu}\int\!\!\int ndt.\,dR + \frac{2a}{\mu}\int ndt.r\left(\frac{dR}{dr}\right)}{\sqrt{1-e^2}} \quad .\,.\,.\ (G)$$

II. Nennt man s die Tangente der Breite von m über der Ebene der x y, so ist für die reine Ellipse

$$s = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ und für die gestörte $$s' = \frac{z+\delta z}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

also die Störung dieser Tangente der Breite

$$s' - s \text{ oder } \delta s = \frac{\delta z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

oder da man hier ohne merklichen Fehler $\sqrt{x^2+y^2} = a$ setzen kann, die gesuchte Störung von z gleich $\delta z = a\,\delta s$. Diese Störung von z ist aber auch gleich den drey letzten Gliedern der Gleichung (E), also ist

$$a\,\delta s = -\frac{(c'y - c''x)}{c^2}\int dt\left[y\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\left(\frac{dR}{dy}\right)\right]$$

$$+\frac{y}{c}\int dt\left[z\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\left(\frac{dR}{dz}\right)\right]$$

$$-\frac{x}{c}\int dt\left[z\left(\frac{dR}{dy}\right) - y\left(\frac{dR}{dz}\right)\right]$$

Da also sehr nahe $z = \frac{c'y - c''x}{c}$ ist, und da man diese kleinen Gröfsen z, wo sie schon in die Störungen R multiplicirt ist, ohne Nachtheil weglassen kann, so ist die letzte Gleichung, wenn man $z = o$ setzt,

$$a\,\delta s = \frac{x}{c}\int y\,dt\left(\frac{dR}{dz}\right) - \frac{y}{c}\int x\,dt\left(\frac{dR}{dz}\right)$$

oder wenn man wieder $x = r \operatorname{Cos} \nu$, $y = r \operatorname{Sin} \nu$

und $c = \frac{\mu\sqrt{1-e^2}}{an}$ setzt,

$$\delta s = \frac{a \operatorname{Cos}\nu . \int ndt.r \operatorname{Sin}\nu . \left(\frac{dR}{dz}\right) - a \operatorname{Sin}\nu . \int ndt.r \operatorname{Cos}\nu \left(\frac{dR}{dz}\right)}{\mu\sqrt{1-e^2}} \quad ..(H)$$

§. 3.

Die Gleichungen F, G, H geben die Störungen des Radius Vectors, der Länge und der Breite der Planeten m durch m′ in endlichen Gröfsen. Die geringe Excentricität und Neigung der Planetenbahnen aber erlaubt uns, diese Ausdrücke für δr, $\delta \nu$ und δs in convergirende Reihen zu entwickeln, wodurch die Auflösung unserer Aufgabe sehr erleichtert wird.

Wir wollen die Gleichung C wieder vornehmen, und der Kürze wegen $2\int dR + rR' = Q$ setzen, so ist diese Gleichung

$$o = \frac{d^2.r^2}{dt^2} + 2\mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + 2\,Q \ldots (5)$$

In der elliptischen Bewegung ist $Q = o$ und (nach Th. II p. 60) r^2 eine Funktion von der mittleren Anomalie des Planeten. Heifst diese m, und die Epoche der mittleren Länge des Planeten ε,

und die Länge des Periheliums w, so ist die mittlere Anomalie $m = nt + \varepsilon - w$. Es sey $u = e \operatorname{Cos} m$, also auch
$d . \operatorname{Cos} m = - n dt \operatorname{Sin} m$, $d^2 . \operatorname{Cos} m = - n^2 dt^2 \operatorname{Cos} m$
und daher

$$\frac{d^2 . e \operatorname{Cos} m}{dt^2} + n^2 e \operatorname{Cos} m = o \text{ oder}$$

$$\frac{d^2 . u}{dt^2} + n^2 u = o$$

In der von m gestörten Bahn des Körpers m aber ist nicht mehr $u = e \operatorname{Cos} m$. Da nähmlich aus der Gleichung (5) nun noch die Gröfse Q hinzukömmt, die für die elliptische Bewegung verschwindet, so wollen wir $U = u + \delta u = e \operatorname{Cos} m + \delta u$ setzen, wo also U wieder eine Funktion von r seyn wird, die wir durch $\psi(r^2)$ ausdrücken wollen Ist also $U = \psi(r^2)$, so ist auch $dU = \psi'(r^2) . dr^2$, wo $\psi'(r^2)$ das Differential von $\psi(r^2)$ durch $d . r^2$ dividirt bezeichnet. Eben so ist

$d^2 U = \psi''(r^2)(d . r^2)^2 + \psi'(r^2) . d^2 . r^2$ und $(d . r^2)^2 = 4 r^2 dr^2$,
also auch

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + n^2 U = \frac{4 r^2 dr^2}{dt^2} . \psi''(r^2)$$

$$+ \frac{d^2 . r^2}{dt^2} . \psi'(r^2) + n^2 \psi(r^2) \ . \ . \ . \ (6)$$

Multiplicirt man aber die Gleichung (5) durch $\frac{1}{2} r dr$, so ist

$$o = \frac{r dr . d^2 . r^2}{dt^2} + 2\mu . r dr \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + 2 Q r dr$$

und dessen Integral

$$o = \frac{r^2 dr^2}{dt^2} + \mu \left(\frac{r^2}{a} - 2r\right) + 2 \int Q r dr.$$

Substituirt man in der Gleichung (6) den Werth von $\frac{r^2 dr^2}{dt^2}$ aus der letzten Gleichung, und den von $\frac{d^2 . r^2}{dt^2}$ aus (5), so erhält man

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + n^2 U = \left\{ 8\mu r - 4 \frac{\mu r^2}{a} - 8 \int Q r dr \right\} \psi''(r^2)$$

$$- \left\{ 2\mu \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + 2 Q \right\} \psi'(r^2) + n^2 \psi(r^2)$$

oder da $U = u + \delta u$ ist,

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + n^2 U - \left[8\mu r - 4\frac{\mu r^2}{a}\right]\psi''(r^2)$$

$$+ 2\mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\psi'(r^2) - n^2\psi(r^2)$$

$$= - \frac{d^2\delta u}{dt^2} - n^2\delta u - 8\int Qr\,dr\,.\,\psi''(r^2) - 2Q\,.\,\psi'(r^2)$$

Von dieser Gleichung gehört der Theil vor dem Gleichheitszeichen der reinen Ellipse, der andere aber der Störung derselben. Da aber diese beyden Theile ihrer Natur nach von einander unabhängig seyn müssen, so mufs jeder von ihnen für sich gleich Null seyn, so dafs man also hat

$$\frac{d^2\delta u}{dt^2} + n^2\delta u = -8\psi''(r^2)\int Qr\,dr - 2Q\,.\,\psi'(r^2)\,.\,.\,.\,.\,(7)$$

Es sey nun $r^2 = \varphi(u)$ wo φ wieder irgend eine Funktion von u bezeichnet. Da $U = \psi(r^2)$ war, und $du = dU$ gesetzt werden kann, so ist $2r\,dr = \varphi'(u).du$ und $du = 2r\,dr.\psi'(r^2)$, also auch $\psi'(r^2) = \frac{1}{\varphi'(u)}$ und dieser Gleichung Differential ist

$$\psi''(r^2) = \frac{-\varphi''(u)\,.\,du}{d\,.\,r^2\,.\,(\varphi'(u))^2} = \frac{-\varphi''(u)}{(\varphi'(u))^3}\,.$$

Substituirt man diese Werthe von $\psi'(r^2)$ und $\psi''(r^2)$ in der Gleichung (7), so ist

$$\frac{d^2\,.\,\delta u}{dt^2} + n^2\delta u = \frac{4\varphi''(u)}{(\varphi'(u))^3}\int Q du\,.\,\varphi'(u) - \frac{2Q}{\varphi'(u)}\,.\,.\,.\,(8)$$

Es ist aber (Thl. II p. 60)

$$\frac{r}{a} = 1 - e\,\text{Cos}\,m + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\,\text{Cos}\,2m$$

wo a e die Excentricität der Bahn bezeichnet, also auch

da $e\,\text{Cos}\,m = u$ ist, $\frac{r}{a} = 1 - u - u^2$ und $\frac{r^2}{a^2} = 1 - 2u - u^2$

$$= \varphi(u) \text{ und daher } \varphi'(u) = -2a^2(1 + u)$$

$$\frac{1}{\varphi'(u)} = -\frac{1}{2a^2}(1 - u + u^2)$$

$$\frac{1}{(\varphi'(u))^3} = -\frac{1}{8a^6}(1-3u+6u^2) \text{ und } \varphi''(u) = -2a^2 \text{ also ist}$$

$$\frac{4\varphi''(u)}{(\varphi'(u))^3} = \frac{1}{a^4}(1-3u+6u^2)$$

Noch hat man $du = -en\, dt . \text{Sin } m$ also auch

$$\int Q\, du . \varphi'(u) = 2a^2 e \int n\, Q\, dt . \text{Sin } m\, (1 + e \text{ Cos } m) \text{ und}$$

$$\frac{4\varphi''(u)}{(\varphi'(u))^3} \int Q\, du . \varphi'(u) = \frac{2e}{a^2} \int n\, dt . Q \text{ Sin } m\, (1 + e \text{ Cos } m)$$

Eben so ist endlich

$$\frac{2Q}{\varphi'(u)} = -\frac{Q}{a^2}(1 - e \text{ Cos } m)$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung (8), so ist

$$o = \frac{d^2 \delta u}{dt^2} + n^2 \delta u - \frac{2e}{a^2} \int n\, dt . Q \text{ Sin } m\, (1 + e \text{ Cos } m)$$

$$- \frac{Q}{a^2}(1 - e \text{ Cos } m)$$

oder wenn man den Werth von Q wieder herstellt,

$$o = \frac{d^2 \delta u}{dt^2} + n^2 \delta u - \frac{1}{a^2}(1 - e \text{ Cos } m) \left\{ 2 \int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right) \right\}$$

$$- \frac{2e}{a^2} \int n\, dt \text{ Sin } m \left\{ 2 \int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right) \right\} \quad . . . (I)$$

Hat man aus dieser Gleichung den Werth von δu gefunden, so ist auch die Störung δr des Radius Vectors bekannt, da man hat

$$r = a\,(1 - u - u^2) \text{ also auch } \delta r = -a\, \delta u\, (1 + 2e \text{ Cos } m).$$

Ist aber δr bekannt, so findet man δv, oder die Störung der Länge durch die Gleichung (G). Um endlich noch die Störung δs der Breite zu erhalten, so sieht man aus der bloſsen einfachen Vergleichung der Gleichungen F und H, daſs δr sich in δs verwandelt, wenn man in der Gleichung für δr die Gröſse

$$2 \int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right) \text{ in } \left(\frac{dR}{dz}\right) \text{ verändert.}$$

Es ist daher

$$o = \frac{d^2 \delta u'}{dt^2} + n^2 \delta u' - \frac{1}{a^2} (1 - e \text{ Cos } m) \left(\frac{dR}{dz}\right)$$

$$- \frac{2e}{a^2} \int n\, dt \text{ Sin } m . \left(\frac{dR}{dz}\right) (K)$$

wo $\delta s = - a \delta u' (1 + 2 e \text{ Cos } m)$ ist.

Die vorhergehenden Gleichungen I, G und K geben die drey gesuchten Störungen δr, δv und δs. Allein um sie anzuwenden, müssen zuerst noch die Werthe von R und $2 \int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right)$ bestimmt werden.

§. 4.

Es war (§. 1.), wenn wir blofs auf e i n e n störenden Planeten m' sehen

$$R = \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}}$$

Setzt man, wie zuvor

$$x = r \text{ Cos } v \quad \text{und} \quad x' = r' \text{ Cos } v'$$
$$y = r \text{ Sin } v \qquad\qquad y' = r' \text{ Sin } v'$$

so ist dieser Ausdruck

$$R = \frac{m'(rr' \text{ Cos } (v' - v) + zz')}{(r'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- m' [r^2 - 2 rr' \text{ Cos } (v' - v) + r'^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

Da die Planetenbahnen alle nahe kreisförmig und sehr wenig gegen einander geneigt sind, so werden die Gröfsen r und r' sehr wenig von den halben Achsen a und a' der Bahnen verschieden seyn, und man wird die Ebene der xy so wählen können, dafs z und z' sehr klein ist. Es sey

$$\frac{r}{a} = 1 + u, \; \frac{r'}{a'} = 1 + u',$$

und eben so $v = nt + \varepsilon + v$, und $v' = n't + \varepsilon' + v'$, wo also u, u', v, v', nur kleine Gröfsen sind, deren Quadrate und Produkte wir vernachlässigen werden. Substituirt man diese Werthe von r r' v v' in dem vorhergehenden Ausdrucke von R, so wird man ihn in eine Reihe entwickeln können, die nach den Potenzen und Produkten von u, v, z u', v', z' fortgeht. Diese Entwicklung wird man bequem auf folgende Weise vornehmen.

Ist R'' der Werth von R für $u_{,} = u'_{,} = \nu_{,} = \nu'_{,} =$ Null, so hat man, wenn der Kürze wegen $n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon = \vartheta$ gesetzt wird, und wenn man den Faktor m' wegläfst,

$$R'' = \frac{a a' \operatorname{Cos} \vartheta + z z'}{a'^3} - [a^2 - 2 a a' \operatorname{Cos} \vartheta + a'^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

Wir wollen in diesem Ausdrucke zuerst die Gröfse z und z' weglassen, weil sich die davon abhängenden Glieder besonders entwickeln lassen. Es ist daher, wie wir in Cap. VIII, §. 3. angenommen haben

$$R'' = \frac{a}{a'^2} \operatorname{Cos} \vartheta - [a^2 - 2 a a' \operatorname{Cos} \vartheta + a'^2]^{-\frac{1}{2}}$$

Nehmen wir weiter, wie dort, an

$$R'' = \tfrac{1}{2} A^{(0)} + A^{(1)} \operatorname{Cos} \vartheta + A^{(2)} \operatorname{Cos} 2\vartheta + A^{(3)} \operatorname{Cos} 3\vartheta + \ldots$$

$$\text{das heifst } R'' = \tfrac{1}{2} \Sigma . A^{(\varkappa)} \operatorname{Cos} \varkappa \vartheta$$

wo $\varkappa$ nach der Reihe alle ganze Zahlen von $\varkappa = -\infty$ bis $\varkappa = +\infty$, auch $\varkappa = 0$ mit begriffen, bezeichnet, und wo man bemerken mufs, dafs $A^{(-\varkappa)} = A^{(+\varkappa)}$ ist.

Wenn nun R nur die drey veränderlichen Gröfsen r r' und $\nu' - \nu$ enthält, so ist nach den ersten Vorschriften der Differentialrechnung

$$R = R'' + a u_{,} \left(\frac{dR''}{da}\right) + a' u'_{,} \left(\frac{dR''}{da'}\right) + \frac{(\nu'_{,} - \nu_{,})}{n' - n} \left(\frac{dR''}{dt}\right)$$

Es ist aber

$$\left(\frac{dR''}{da}\right) = \tfrac{1}{2} \Sigma \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) \operatorname{Cos} \varkappa \vartheta, \quad \left(\frac{dR''}{da'}\right) = \tfrac{1}{2} \Sigma \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da'}\right) \operatorname{Cos} \varkappa \vartheta$$

$$\text{und } \left(\frac{dR''}{dt}\right) = -\tfrac{1}{2} (n' - n) . \Sigma \varkappa A^{(\varkappa)} \operatorname{Sin} \varkappa \vartheta$$

also ist auch

$$R = \frac{m'}{2} \Sigma A^{(\varkappa)} \operatorname{Cos} \varkappa \vartheta + \frac{m'}{2} u_{,} \Sigma a \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) \operatorname{Cos} \varkappa \vartheta$$

$$+ \frac{m'}{2} u'_{,} \Sigma a' \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da'}\right) \operatorname{Cos} \varkappa \vartheta - \frac{m'}{2} (\nu'_{,} - \nu_{,}) . \Sigma \varkappa A^{(\varkappa)} \operatorname{Sin} \varkappa \vartheta$$

und diesem Ausdrucke wird man noch die von z und z' abhängigen Glieder hinzufügen. Sieht man blofs auf diese Glieder, so ist

$$\frac{rr'\,\mathrm{Cos}\,(\nu'-\nu)+zz'}{(r'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}=(rr'\,\mathrm{Cos}\,(\nu'-\nu)+zz')(r'^{-3}-\tfrac{3}{2}r'^{-5}z'^2)$$

$$=-\frac{3\,az'^2}{2\,a'^4}\,\mathrm{Cos}\,(\nu'-\nu)+\frac{zz'}{a'^3}$$

und überdiefs

$$[r^2-2\,rr'\,\mathrm{Cos}\,(\nu'-\nu)+r'^2+(z'-z)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\tfrac{1}{2}(z'-z)^2.[r^2-2\,rr'\,\mathrm{Cos}\,(\nu'-\nu)+r'^2]^{-\frac{3}{2}}$$

oder da $\nu'-\nu=\vartheta$ ist, so hat man, wenn man analog mit den Vorhergehenden

$$(a^2+a'^2-2\,aa'\,\mathrm{Cos}\,\vartheta)^{-\frac{3}{2}}=\tfrac{1}{2}\Sigma\,B^{(\varkappa)}\,\mathrm{Cos}\,\varkappa\,\vartheta$$

setzt, für den gesuchten Theil von R

$$-3\frac{m'az'^2}{2\,a'^4}\mathrm{Cos}\,\vartheta+\frac{m'}{4}(z'-z)^2\,\Sigma.B^{(\varkappa)}\,\mathrm{Cos}\,\varkappa\,\vartheta+\frac{m'zz'}{a'^3}$$

so dafs also der vollständige Ausdruck von R ist, wenn man den Faktor m′ wieder aufnimmt

$$R=\frac{m'}{2}\Sigma A^{(\varkappa)}\,\mathrm{Cos}\,\varkappa\,\vartheta+\frac{m'}{2}\,u_{,}\,\Sigma\,a\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)\mathrm{Cos}\,\varkappa\,\vartheta$$

$$+\frac{m'}{2}\,u'_{,}\,\Sigma\,a'\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da'}\right)\mathrm{Cos}\,\varkappa\,\vartheta$$

$$-\frac{m'}{2}(\nu'_{,}-\nu)\,\Sigma\,\varkappa\,A^{(\varkappa)}\,\mathrm{Sin}\,\varkappa\,\vartheta+\frac{m'zz'}{a'^3}-3\frac{m'az'^2\,\mathrm{Cos}\,\vartheta}{2\,a'^4}$$

$$+\frac{m'}{4}(z'-z)^2.\,\Sigma\,B^{(\varkappa)}\,\mathrm{Cos}\,\varkappa\,\vartheta.$$

I. Wir wollen nun der Kürze wegen die mittlere Länge $nt+\varepsilon=l$ und $n't+\varepsilon'=l'$ also das vorige $\vartheta=l'-l$ und wie zuvor, die Längen der Perihelien gleich w und w′ setzen, so dafs man hat

$$u_{,}=-e\,\mathrm{Cos}\,(l-w)\qquad \nu_{,}=2\,e\,\mathrm{Sin}\,(l-w)$$
$$u'_{,}=-e'\mathrm{Cos}\,(l'-w')\qquad \nu'_{,}=2\,e'\,\mathrm{Sin}\,(l'-w')$$

Diese Ausdrücke sollen in dem vorhergehenden Werthe von R substituirt werden. Vor dieser Substitution bemerke man aber, dafs man allgemein hat

$$\Sigma\,2\,\mathrm{Cos}\,\varkappa t\,.\,\mathrm{Sin}\,l=\Sigma\,\mathrm{Sin}\,(l-\varkappa t)+\Sigma\,\mathrm{Sin}\,(l+\varkappa t)$$

und da $l - \varkappa t$ sich in $l + \varkappa t$ verwandelt, wenn $\varkappa$ negativ wird, so sieht man, daſs jedes Glied der Reihe $\Sigma \, \mathrm{Sin}\,(l - \varkappa t)$ ein gleiches Glied in der Reihe $\Sigma \, \mathrm{Sin}\,(l + \varkappa t)$ hat, und daſs also ist

$$-\mathrm{Sin}\, l \,.\, \Sigma \, \mathrm{Cos}\, \varkappa t = \Sigma \, \mathrm{Sin}\,(l + \varkappa t) \text{ also auch}$$

$$\mathrm{Sin}\, l \,.\, \Sigma A^{(\varkappa)} \mathrm{Cos}\, \varkappa t = \Sigma A^{(\varkappa)} \mathrm{Sin}\,(\varkappa t + l) = - \Sigma A^{(\varkappa)} \mathrm{Sin}\,(\varkappa t - l)$$

und eben so

$$\mathrm{Cos}\, l \,.\, \Sigma A^{(\varkappa)} \mathrm{Cos}\, \varkappa t = \Sigma A^{(\varkappa)} \mathrm{Cos}\,(\varkappa t + l) = + \Sigma A^{(\varkappa)} \mathrm{Cos}\,(\varkappa t - l)$$

Daher ist das zweyte Glied des letzten Ausdruckes von R

$$-\frac{e}{2} \mathrm{Cos}\,(l - w) \,.\, \Sigma a \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) \mathrm{Cos}\, \varkappa\,(l' - l)$$

$$= -\tfrac{1}{2} \Sigma \, ae \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) \mathrm{Cos}\,(\varkappa\,(l' - l) + l - w)$$

Verfährt man eben so mit den andern Gliedern, so ist

$$R = \frac{m'}{2} \Sigma A^{(\varkappa)} \mathrm{Cos}\, \varkappa\,(l' - l)$$

$$-\frac{m'}{2} \Sigma \left\{ a \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) + 2\varkappa \,.\, A^{(\varkappa)} \right\} e \, \mathrm{Cos}\,(\varkappa\,(l' - l) + l - w)$$

$$-\frac{m'}{2} \Sigma \left\{ a' \left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da'}\right) - 2(\varkappa - 1) A^{(\varkappa-1)} \right\} e' \mathrm{Cos}\,(\varkappa\,(l' - l) + l - w')$$

II. Um daraus den Werth von $2 \int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right)$ zu finden, so ist dR das Differential von R in Beziehung auf nt, also auch

$$d.\, \mathrm{Cos}\, \varkappa\,(l' - l) = \varkappa \, n \, dt \,.\, \mathrm{Sin}\, \varkappa\,(l' - l) \text{ und}$$

$$\int d \,.\, \mathrm{Cos}\, \varkappa\,(l' - l) = -\frac{n}{n' - n} \mathrm{Cos}\, \varkappa\,(l' - l)$$

Verfährt man eben so mit den andern Gliedern von R, so erhält man

$$2 \int dR = -\frac{m'}{2} \Sigma \frac{2n}{n' - n} A^{(\varkappa)} \mathrm{Cos}\, \varkappa\,(l' - l)$$

$$+\frac{m'}{2} \Sigma \,.\, \frac{2(\varkappa - 1)\, n}{\varkappa n' - (\varkappa - 1)\, n} \,.\, \left\{ a \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) + 2\varkappa A^{(\varkappa)} \right\}$$

$$\times \; e \, \mathrm{Cos}\,(\varkappa\,(l' - l) + l - w)$$

$$+\frac{m'}{2}\Sigma.\frac{2(\varkappa-1)n}{\varkappa n'-(\varkappa-1)n}.\left[a'\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da'}\right)-2(\varkappa-1)A^{(\varkappa-1)}\right].$$
$$\times e' \operatorname{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w')$$

Ferner ist

$$r\left(\frac{dR}{dr}\right)=a\left(\frac{dR}{da}\right)=\frac{m'}{2}\Sigma a\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)\operatorname{Cos}\varkappa(l'-l)$$
$$-\frac{m'}{2}\Sigma\left[a^2\left(\frac{d^2A^{(\varkappa)}}{da^2}\right)+(2\varkappa+1)a\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)\right]$$
$$\times e \operatorname{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w)$$
$$-\frac{m'}{2}\Sigma\left[aa'\left(\frac{d^2A^{(\varkappa-1)}}{da\,da'}\right)-2(\varkappa-1)a\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right)\right]$$
$$\times e' \operatorname{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w')$$

wo nähmlich in dem zweyten Gliede dieses Ausdruckes das Differential von a $\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)$ durch da dividirt gleich ist

$$a\left(\frac{d^2A^{(\varkappa)}}{da^2}\right)+\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)\left(\frac{da}{da}\right) \text{ u. s. w.}$$

Da aber die Gröſse A^0 in dem Werthe von R in keinen Cosinus multiplicirt ist, so muſs sie, als eine beständige Gröſse, in dR verschwinden, und kann daher auch nicht in $\int dR$ vorkommen. Dieser Umstand nöthiget uns, die Glieder, für welche $\varkappa$ Null ist, besonders zu betrachten. Diese Glieder sind für $2\int dR$

$$-\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{2n}{n'-n}.A^{(0)}-\Sigma a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)e\operatorname{Cos}(l-w)$$
$$-\Sigma\left[a'\left(\frac{dA'}{da'}\right)+2A'\right]e'\operatorname{Cos}(l-w')$$

wo man nähmlich $A^{(+1)}$ für $A^{(-1)}$ gesetzt hat, und wo man noch statt dem ersten Gliede $-\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{2n}{n'-n}.A^{(0)}$ irgend eine constante Gröſse 2g, wegen der Integration setzen kann. Eben so sind jene Glieder für $r\left(\frac{dR}{dr}\right)$

$$\tfrac{1}{2}\Sigma a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)-\tfrac{1}{2}\Sigma\left[a^2\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)+a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right]$$
$$\times e \operatorname{Cos}(l-w)$$
$$-\tfrac{1}{2}\Sigma\left[aa'\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da\,da'}\right)+2a\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)\right]e'\operatorname{Cos}(l-w')$$

Sammelt man diese Ausdrücke, so ist

$$2\int dR+r\left(\frac{dR}{dr}\right)=$$

$$2m'g+\frac{m'a}{2}\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+\frac{m'}{2}\Sigma\left[a\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)+\frac{2\varkappa}{n-n'}A^{(\varkappa)}\right]$$
$$\times \operatorname{Cos}\varkappa(l'-l)$$
$$-\frac{m'}{2}\left[a^2\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)+3a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right]e\operatorname{Cos}(l-w)$$
$$-\frac{m'}{2}\left[aa'\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da\,da'}\right)+2a\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)+2a'\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right)+4A^{(1)}\right]$$
$$\times e'\operatorname{Cos}(l-w')$$
$$-\frac{m'}{2}\Sigma\left\{\begin{array}{l}a^2\left(\dfrac{d^2A^{(\varkappa)}}{da^2}\right)+(2\varkappa+1)a\left(\dfrac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)\\ +\dfrac{2(\varkappa-1)n}{\varkappa(n-n')-n}\left[a\left(\dfrac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)+2\varkappa A^{(\varkappa)}\right]\end{array}\right\}e\operatorname{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w)$$
$$-\frac{m'}{2}\Sigma\left\{\begin{array}{l}aa'\left(\dfrac{d^2A^{(\varkappa-1)}}{da\,da'}\right)-2(\varkappa-1)a\dfrac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\\ +\dfrac{2(\varkappa-1)n}{\varkappa(n-n')-n}\left[a'\left(\dfrac{dA^{(\varkappa-1)}}{da'}\right)-2(\varkappa-1)A^{(\varkappa-1)}\right]\end{array}\right\}e'\operatorname{Cos}\left(\begin{array}{l}\varkappa(l'-l)\\+l-w'\end{array}\right)$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf alle ganze positive und negative Werthe von $\varkappa$ bezieht, den einzigen Fall $\varkappa=0$ ausgenommen, welchen letzten wir besonders betrachtet haben. Nachdem wir so die Gröſse $2\int dR+r\left(\frac{dR}{dr}\right)$ bestimmt haben, gehen wir wieder zu unserer Gleichung (J) des §. 3 zurück.

§. 5.

Wenn man den gefundenen Werth von $2\int dR+r\left(\frac{dR}{dr}\right)$

in der Gleichung (J) substituirt, und nur die ersten Potenzen der Gröſsen e und e′ betrachtet, so erhält man

$$o = \frac{d^2\delta u}{dt^2} + n^2\delta u - 2\,m'n^2\,ag - \frac{m'n^2}{2}\,.\,a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$$

$$-\frac{m'n^2}{2}\,\Sigma\left\{a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) + \frac{2\,na}{n-n'}\,A^{(\varkappa)}\right\}\,\mathrm{Cos}\,\varkappa\,(l'-l)$$

$$+ m'n^2\,.\,Ce\,\mathrm{Cos}\,(l-w) + m'n^2\,.\,De'\,\mathrm{Cos}\,(l-w')$$

$$+ m'n^2\,\Sigma\,C^{(\varkappa)}\,e\,\mathrm{Cos}\,(\varkappa\,(l'-l) + l - w)$$

$$+ m'n^2\,\Sigma\,D^{(\varkappa)}\,e'\,\mathrm{Cos}\,(\varkappa\,(l'-l) + l - w')$$

wo man der Kürze wegen gesetzt hat

$$C = \frac{a^3}{2}\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right) + 3a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + 6\,ag$$

$$D = \frac{a^2\,.\,a'}{2}\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da\,da'}\right) + a^2\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) + aa'\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right) + 2a\,A^{(1)}$$

$$C^{(\varkappa)} = \frac{a^3}{2}\left(\frac{d^2A^{(\varkappa)}}{da^2}\right) + \frac{(2\varkappa+1)}{2}\,a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)$$

$$+ \frac{\varkappa(n-n') - 3n}{2(\varkappa(n-n')-n)}\left\{a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'}\,.\,aA^{(\varkappa)}\right\}$$

$$+ \frac{(\varkappa-1)\,n}{\varkappa\,(n-n')-n}\left\{a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) + 2\varkappa\,.\,aA^{(\varkappa)}\right\}$$

$$D^{(\varkappa)} = \frac{a^2\,.\,a'}{2}\left(\frac{d^2A^{(\varkappa-1)}}{da\,da'}\right) - (\varkappa-1)\,a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right)$$

$$+ \frac{(\varkappa-1)\,n}{\varkappa\,(n-n')-n}\left\{aa'\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da'}\right) - 2\,(\varkappa-1)\,a\,A^{(\varkappa-1)}\right\}$$

und wo man die Summe der Massen M + m oder μ^2 gleich der Einheit, also auch (§. 1) $\frac{1}{a^3} = n^2$ oder $\frac{1}{a^2} = n^2 a$ gesetzt hat.

Die vorhergehende Gleichung soll nun integrirt werden. Wenden wir hier das an, was wir Cap. VIII, §. 2. 1 gesagt haben, so sey für die mit Σ bezeichneten Glieder

$o = \delta u - A\,\mathrm{Cos}\,pt$, so ist $o = \frac{d^2\delta u}{dt^2} + n^2\delta u + A\,(p^2 - n^2)\,\mathrm{Cos}\,pt$

Man erhält also den Cosinus von pt im Integrale, wenn man den Coefficienten desselben Cosinus im Differentiale durch $-(p^2-n^2)$ dividirt. In unserem Falle ist aber $p = \varkappa(n'-n)$ und $p = \varkappa(n'-n)+n$, also sind die drey Glieder des Integrals

$$-\frac{m'n^2}{2}\Sigma\left\{\frac{a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)+\frac{2naA^{(\varkappa)}}{n-n'}}{\varkappa^2(n'-n)^2-n^2}\right\}\text{Cos }\varkappa(l'-l)$$

$$+\frac{m'n^2\,\Sigma.C^{(\varkappa)}\,e\,\text{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w)}{[\varkappa(n-n')-n]^2-n^2}$$

$$+\frac{m'n^2\,\Sigma.D^{(\varkappa)}\,e'\,\text{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w')}{[\varkappa(n-n')-n]^2-n^2}$$

Für die in C und D multiplicirten Glieder sey eben so

$$\delta u = At\,\text{Sin}(l-w) \text{ so ist } o = \frac{d^2\delta u}{dt^2}+n^2\delta u-2An\,\text{Cos}(l-w),$$

so daſs also die Integration dieser Glieder bloſs in der Multiplication durch $-\frac{t}{2n}$ besteht, wodurch in unserem Falle erhalten wird

$$-m'\frac{nt}{2}\,Ce\,\text{Cos}(l-w)-\frac{m'nt}{2}\,De'\,\text{Cos}(l-w')$$

Statt den beyden beständigen Gliedern, welche die Integration erfodert, kann man auch zwey willkührliche periodische Glieder $m'f,\,e\,\text{Cos}(l-w)$ und $m'f',\,e'\,\text{Cos}(l-w')$ einführen, und es wird sich im Verfolge der Rechnung zeigen, daſs diese periodischen Glieder der Gleichung ebenfalls genug thun.

Nimmt man die vorhergehenden Glieder zusammen, so erhält man für das gesuchte Integral

$$\delta u = 2m'ag+\frac{m'a^2}{2}\left(\frac{dA^{(o)}}{da}\right)-\frac{m'n^2}{2}\Sigma.H^{(\varkappa)}\,\text{Cos }\varkappa(l'-l)$$

$$+m'f,\,e\,\text{Cos}(l-w)+m'f',\,e'\,\text{Cos}(l-w')$$

$$-\frac{m'nt}{2}.Ce\,\text{Sin}(l-w)-\frac{m'nt}{2}.De'\text{Sin}(l-w')$$

$$+m'\Sigma\frac{C^{(\varkappa)}\,n^2}{[\varkappa(n-n')-n]^2-n^2}.e\,\text{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w).$$

$$+ m' \Sigma \frac{D^{(\varkappa)} n^2}{[\varkappa(n-n')-n]^2-n^2} . e' \operatorname{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w')$$

$$\text{wo } H^{(\varkappa)} = \frac{a^2 \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'} . a A^{(\varkappa)}}{\varkappa^2 (n-n')^2 - n^2}$$

Substituirt man diesen Ausdruck von δu in der Gleichung (§. 3.)

$$\frac{\delta r}{a} = -\delta u (1 + 2 e \operatorname{Cos}(l-w))$$

so erhält man, wenn man wieder die höheren Potenzen von e vernachlässiget

$$\frac{\delta r}{a} = -2m' a g - \frac{m' a^2}{2} \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \frac{m' n^2}{2} \Sigma H^{(\varkappa)} \operatorname{Cos} \varkappa(l'-l)$$

$$- m' f e \operatorname{Cos}(l-w) - m' f' e' \operatorname{Cos}(l-w')$$

$$+ \frac{m' n t}{2} C e \operatorname{Sin}(l-w) + \frac{m' n t}{2} D e' \operatorname{Sin}(l-w')$$

$$+ m' n^2 \Sigma \left\{ H^{(\varkappa)} - \frac{C^{(\varkappa)}}{[\varkappa(n-n')-n]^2-n^2} \right\} e \operatorname{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w)$$

$$- m' n^2 \Sigma \left\{ \frac{D^{(\varkappa)}}{[\varkappa(n-n')-n]^2-n^2} \right\} e' \operatorname{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w')$$

wo f und f′ zwey willkührliche Gröſsen sind, die von $f_{,}$ und $f'_{,}$ abhängen.

I. Dieser Ausdruck von $\frac{\delta r}{a}$ soll nun in der Gleichung (G) des §. 2. substituirt werden. Setzt man wieder, wie in §. 5., die Gröſse $\mu = 1$ also auch $a^3 n^2 = 1$, so ist diese Gleichung (G), wenn man die Quadrate von e wegläſst.

$$\delta v = \frac{\frac{2r}{a} . d\frac{\delta r}{a} + d\frac{r}{a} . \frac{\delta r}{a}}{n\,dt} + 3a \iint n\,dt . dR + 2a \int n\,dt . r \left(\frac{dR}{dr}\right)$$

Vor dieser Substitution wollen wir bemerken, daſs man, wie wir Cap. VIII §. 5. II gesehen haben, hat

$$a' \left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da'}\right) = - A^{(\varkappa-1)} - a \left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right) \text{ und}$$

$$a'\left(\frac{d^2A^{(\varkappa-1)}}{da\,da'}\right)=-a\left(\frac{d^2A^{(\varkappa-1)}}{da^2}\right)-2\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right)$$

Differentiirt man den vorhergehenden Ausdruck von $\frac{\delta r}{a}$ in Beziehung auf t, und bemerkt, dafs $\frac{r}{a}=1-e\,\mathrm{Cos}\,(l-w)$ ist, so erhält man

$$\frac{\frac{2r}{a}.\,d\frac{\delta r}{a}}{n\,dt}=-m'n\,\Sigma\,\varkappa\,(n'-n)\,H^{(\varkappa)}\,\mathrm{Sin}\,\varkappa\,(l'-l)$$

$$+2m'fe\,\mathrm{Sin}\,(l-w)+2m'f'e'\,\mathrm{Sin}\,(l-w')$$

$$+m'e\,C\,\mathrm{Sin}\,(l-w)+m'e'D\,\mathrm{Sin}\,(l-w')$$

$$+m'e.\,C\,nt\,\mathrm{Cos}\,(l-w)+m'e'.\,D\,nt\,\mathrm{Cos}\,(l-w')$$

$$-2m'n\,\Sigma\left\{H^{(\varkappa)}-\frac{C^{(\varkappa)}}{[\varkappa\,(n-n')-n]^2-n^2}\right\}.$$

$$\times[\varkappa\,(n'-n)+n]\,e\,\mathrm{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w)$$

$$+2m'n\,\Sigma.\,\frac{D^{(\varkappa)}}{[\varkappa\,(n-n')-n]^2-n^2}.$$

$$[\varkappa\,(n'-n)+n]\,e'\,\mathrm{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w')\;...\;(9)$$

Ferner ist $\frac{d.\frac{r}{a}}{n\,dt}=e\,\mathrm{Sin}\,(l-w)$ also auch

$$\frac{d.\frac{r}{a}.\frac{\delta r}{a}}{n\,dt}=-m'\left\{2ag+\frac{a^2}{2}\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right\}e\,\mathrm{Sin}\,(l-w)$$

$$+\frac{m'n^2}{2}\,\Sigma\,H^{(\varkappa)}\,e\,\mathrm{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w)\;...\;(10)$$

Weiter ist

$$\iint n\,dt.\,d.\,\mathrm{Cos}\,\varkappa\,(l'-l)=\frac{-n^2}{\varkappa\,(n-n')}\,\mathrm{Sin}\,\varkappa\,(l'-l)$$

$$\iint n\,dt\,d.\,\mathrm{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w)=\frac{-(\varkappa-1)\,n^2}{[\varkappa(n-n')-n]^2}\,\mathrm{Sin}(\varkappa(l'-l)+l-w)$$

daher ist

$$\iint n\,dt\,.\,dR = -\frac{m'}{2}\,\Sigma\,\frac{n^2}{\varkappa\,(n-n')^2}\,A^{(\varkappa)}\,\mathrm{Sin}\,\varkappa\,(l'-l)$$

$$+\frac{m'}{2}\,\Sigma\left\{a\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)+2\,\varkappa\,A^{(\varkappa)}\right\}\frac{(\varkappa-1)\,n^2}{[\varkappa\,(n-n')^2-n]^2}$$

$$\times\ e\ \mathrm{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w)$$

$$+\frac{m'}{2}\,\Sigma\left\{a'\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da'}\right)-2\,(\varkappa-1)\,A^{(\varkappa-1)}\right\}.\,\frac{(\varkappa-1)\,n^2}{[\varkappa\,(n-n')-n]^2}$$

$$\times\ e'\ \mathrm{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w')$$

Da man aber vorher dem Integrale $\int dR$ die Constante $m'ag$ hinzugefügt hat, so muſs man auch dem Integrale $\int n\,dt\,.\,dR$ die Gröſse $m'g\,n\,dt$, also dem doppelten Integral! $\iint n\,dt\,.\,dR$ die Gröſse $m'gnt$ hinzufügen. Setzt man endlich die Glieder, welche aus der Voraussetzung $\varkappa = o$ entspringen, wieder besonders an, und multiplicirt das Ganze durch $\frac{3a}{\mu} = 3a$, und setzt statt $a'\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da'}\right)$ den oben angezeigten Werth, so ist

$$3\,a\iint n\,dt\,.\,dR = 3m'ag\,.\,nt - m'\,.\,\tfrac{3}{2}\,a^2\left(\frac{dA^{(o)}}{da}\right)e\ \mathrm{Sin}\,(l-w)$$

$$+\left[\tfrac{3}{2}\,a^2\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)-\tfrac{3}{2}\,a\,A^{(1)}\right]m'\,e'\ \mathrm{Sin}\,(l-w')$$

$$-\,m'\,\Sigma\,\frac{3n^2\,a\,A^{(\varkappa)}}{2\,\varkappa\,(n-n')^2}\ \mathrm{Sin}\,\varkappa\,(l'-l)$$

$$+\,m'\,\Sigma\,\frac{(\varkappa-1)\,n^2}{[\varkappa(n-n')-n]^2}\,.\left\{\tfrac{3}{2}\,a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)+3\,\varkappa a\,A^{(\varkappa)}\right\}$$

$$\times\ e\ \mathrm{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w)$$

$$-\,m'\,\Sigma\,\frac{(\varkappa-1)\,n^2}{[\varkappa\,(n-n')-n]^2}\,.\left\{\tfrac{3}{2}\,a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right)+\left(\frac{6\varkappa-3}{2}\right)a\,A^{(\varkappa-1)}\right\}$$

$$\times\ e'\ \mathrm{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w')\ \ldots\ (11)$$

Multiplicirt man endlich den in §. 4. gegebenen Ausdruck von $r\left(\frac{dR}{dr}\right)$ durch $n\,dt$, und integrirt, so ist

$$\int n\,dt\,.\,r\left(\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{m'}{2}\,\Sigma\,a\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right).\frac{n}{\varkappa(n-n')}\,\text{Sin}\,\varkappa\,(l'-l)$$

$$+\frac{m'}{2}\,\Sigma\left[a^2\left(\frac{d^2A^{(\varkappa)}}{da^2}\right)+(2\varkappa+1)a\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)\right].\frac{n}{\varkappa(n-n')-n}$$

$$\times\,e\,\text{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w)$$

$$+\frac{m'}{2}\,\Sigma\left[aa'\left(\frac{d^2A^{(\varkappa-1)}}{da\,da'}\right)-2(\varkappa-1)a\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right)\right].\frac{n}{\varkappa(n-n')-n}$$

$$\times\,e'\,\text{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w')$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks kann auch auf den Fall $\varkappa = 0$ nicht angewendet werden. Integrirt man daher dieses Glied besonders, so ist $\int n\,dt\,.\,a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) = nt\,.\,a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$.

Nimmt man dann die übrigen Glieder für $\varkappa = 0$ ebenfalls besonders, multiplicirt alle durch 2a und setzt für $aa'\left(\frac{d^2A^{(\varkappa-1)}}{da\,da'}\right)$ seinen oben angezeigten Werth, so hat man

$$2a\int n\,dt\,.\,r\left(\frac{dR}{dr}\right) = m'a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)nt$$

$$-\,m'\left[a^3\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)+a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right]e\,\text{Sin}\,(l-w)$$

$$+\,m'a^3\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right)e'\,\text{Sin}\,(l-w')-m'\Sigma\,a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right).\frac{n}{\varkappa(n-n')}$$

$$\times\,\text{Sin}\,\varkappa\,(l'-l)$$

$$+\,m'\,\Sigma\left[a^3\left(\frac{d^2A^{(\varkappa)}}{da^2}\right)+(2\varkappa+1)a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)\right].\frac{n}{\varkappa(n-n')-n}$$

$$\times\,e\,\text{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w)$$

$$-\,m'\,\Sigma\left[a^3\left(\frac{d^2A^{(\varkappa-1)}}{da^2}\right)+2\varkappa a\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right)\right].\frac{n}{\varkappa(n-n')-n}$$

$$\times\,e'\,\text{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w')\ldots(12)$$

II. Die Summe der Gleichungen 9, 10, 11 und 12 gibt den gesuchten Werth von δv. Man muſs aber bemerken, daſs das der Zeit t proportionale Glied aus dem Ausdrucke von δv verschwinden soll, weil nt die mittlere Bewegung des gestörten Planeten m ausdrückt. Nimmt man also die Summe der in nt multiplicirten Glieder dieser vier Gleichungen gleich Null, so erhält man

$$g = -\frac{a}{3}\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$$

wodurch also die Constante g bestimmt wird. Die zwey anderen Constanten f und f′ lassen sich ebenfalls aus dem Ausdrucke von δv entfernen, wenn man in der Summe dieser vier Gleichungen die Faktoren von e Sin (l — w) und e′ Sin (l — w′) jeden für sich gleich Null setzt, wodurch man erhält

$$f = \frac{2a^2}{3}\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \frac{a^3}{4}\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right) \text{ und}$$

$$f' = \frac{aA^{(1)}}{4} - \frac{a^2}{4}\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) + \frac{a^3}{4}\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right)$$

Sammelt man also die vorhergehenden Gleichungen 9 . . 12, substituirt den gefundenen Werth von g, und setzt die Faktoren von e Sin (l — w) und e′ Sin (l — w′) gleich Null, so erhält man

$$\delta v = m'\,nt.\,C\,e\,\text{Cos}\,(l-w) + m'\,nt.\,D\,e'\,\text{Cos}\,(l-w')$$

$$-m'\left\{n\Sigma\varkappa(n'-n)H^{(\varkappa)} + \Sigma\frac{3n^2aA^{(\varkappa)}}{2\varkappa(n-n')} + \Sigma a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)\frac{n}{\varkappa(n-n')}\right\}$$
$$\times\ \text{Sin}\,\varkappa\,(l'-l)$$

$$-m'ne\left\{\begin{array}{l}2\Sigma\left[H^{(\varkappa)} - \dfrac{C^{(\varkappa)}}{[\varkappa(n-n')-n]^2-n^2}\right](\varkappa(n'-n)+n)\\ -\Sigma\dfrac{(\varkappa-1)n}{[\varkappa(n-n')-n]^2}\left[\frac{3}{2}a^2\left(\dfrac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) + 3\,\varkappa\,a\,A^{(\varkappa)}\right]\\ -\Sigma\left[a^3\left(\dfrac{d^2A^{(\varkappa)}}{da^2}\right) + (2\varkappa+1)a^2\left(\dfrac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)\right]\dfrac{1}{\varkappa(n-n')-n}\end{array}\right\}$$
$$\times\ [\text{Sin}\,(\varkappa\,(l'-l)+l-w)]$$

$$+m'ne'\left\{\begin{array}{l} 2\Sigma\,.\,\dfrac{D^{(\varkappa)}}{[\varkappa(n-n')-n]^2-n^2}(\varkappa(n'-n)+n) \\ -\Sigma\,\dfrac{(\varkappa-1)n}{(\varkappa(n-n')-n)^2}\left\{\frac{3}{2}a^2\left(\dfrac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right)+\dfrac{6\varkappa-3}{2}aA^{(\varkappa-1)}\right\} \\ -\Sigma\left\{a^3\left(\dfrac{d^2A^{(\varkappa-1)}}{da^2}\right)+2\varkappa a\left(\dfrac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right)\right\}\dfrac{1}{\varkappa(n-n')-n} \end{array}\right\}$$

$$\times[\mathrm{Sin}\,(\varkappa(l'-l)+l-w')]$$

III. Um diese Ausdrücke abzukürzen, wollen wir den Coefficienten von $m'n^2 e\,\mathrm{Cos}\,(\varkappa(l'-l)+l-w)$ in $\frac{\delta r}{a}$ durch $E^{(\varkappa)}$, den von $m'ne\,\mathrm{Sin}\,(\varkappa(l'-l)+l-w)$ in $\delta\nu$ durch $\frac{F^{(\varkappa)}}{n-\varkappa(n-n')}$, und den von $m'ne'\,\mathrm{Sin}\,(\varkappa(l'-l)+l-w')$ in $\delta\nu$ durch $\frac{G^{(\varkappa)}}{n-\varkappa(n-n')}$ bezeichnen, so daſs man hat

$$\frac{\delta r}{a}=\frac{m'a^2}{6}\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+\frac{m'n^2}{2}\Sigma H^{(\varkappa)}\,\mathrm{Cos}\,\varkappa(l'-l)$$

$$-m'fe\,\mathrm{Cos}\,(l-w)-m'f'e'\,\mathrm{Cos}\,(l-w')$$

$$+\frac{m'nt}{2}.Ce\,\mathrm{Sin}\,(l-w)+\frac{m'nt}{2}.De'\,\mathrm{Sin}\,(l-w')$$

$$+m'n^2.\Sigma\left\{\begin{array}{l}\dfrac{E^{(\varkappa)}}{n^2-[n-\varkappa(n-n')]^2}.e\,\mathrm{Cos}\,(\varkappa(l'-l)+l-w)\\ +\dfrac{D^{(\varkappa)}}{n^2-[n-\varkappa(n-n')]^2}.e'\mathrm{Cos}(\varkappa(l'-l)+l-w')\end{array}\right\}\ldots(L)$$

$$\delta\nu=\frac{m'}{2}\Sigma\left\{\frac{n^2aA^{(\varkappa)}}{\varkappa(n-n')^2}+\frac{2n^3H^{(\varkappa)}}{\varkappa(n-n')}\right\}\mathrm{Sin}\,\varkappa(l'-l)$$

$$+m'nt.Ce\,\mathrm{Cos}\,(l-w)+m'nt.De'\,\mathrm{Cos}\,(l-w')$$

$$+m'n.\Sigma\left\{\begin{array}{l}\dfrac{F^{(\varkappa)}}{n-\varkappa(n-n')}.e\,\mathrm{Sin}\,(\varkappa(l'-l)+l-w)\\ \dfrac{+G^{(\varkappa)}}{n-\varkappa(n-n')}.e'\,\mathrm{Sin}\,(\varkappa(l'-l)+l-w')\end{array}\right\}\ldots(M)$$

und in diesen beyden Gleichungen ist

$$f = \frac{2a^2}{3}\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \frac{a^3}{4}\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right);$$

$$f' = \frac{aA^{(1)}}{4} - \frac{a^2}{4}\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) + \frac{a^3}{4}\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right)$$

$$C = a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \frac{a^3}{2}\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right);$$

$$D = a\,A^{(1)} - a^2\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - \frac{a^3}{2}\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right)$$

$$D^{(\varkappa)} = \frac{(\varkappa-1)(2\varkappa-1)}{n-\varkappa(n-n')}\,n\,a\,A^{(\varkappa-1)}$$

$$+\frac{[\varkappa^2(n-n')-n]}{n-\varkappa(n-n')}\,a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right) - \frac{a^3}{2}\left(\frac{d^2A^{(\varkappa-1)}}{da^2}\right)$$

$$E^{(\varkappa)} = -\frac{3n\,aA^{(\varkappa)}}{n-n'} + [\varkappa^2(n-n')[n+\varkappa(n-n')]-3n^2]\,H^{(\varkappa)}$$

$$+\frac{a^3}{2}\left(\frac{d^2A^{(\varkappa)}}{da^2}\right)$$

$$F^{(\varkappa)} = \frac{n\,a\,(\varkappa-1)}{n-n'}A^{(\varkappa)} + \left\{\frac{\varkappa n}{2}(n+\varkappa(n-n'))-3n^2\right\}H^{(\varkappa)}$$

$$-\frac{2n^2\,E^{(\varkappa)}}{n^2-[n-\varkappa(n-n')]^2}$$

$$G^{(\varkappa)} = \frac{(\varkappa-1)(2\varkappa-1)\,n\,a\,A^{(\varkappa-1)} + (\varkappa-1)\,n\,a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa-1)}}{da}\right)}{2[n-\varkappa(n-n')]}$$

$$-\frac{2n^2\,D^{(\varkappa)}}{n^2-[n-\varkappa(n-n')]^2}$$

$$\text{und } H^{(\varkappa)} = \frac{a^2\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'}\cdot aA^{(\varkappa)}}{\varkappa^2(n-n')^2-n^2}.$$

Setzt man, um noch mehr abzukürzen

$$R^{(\varkappa)} = \frac{n^2 a\, A^{(\varkappa)}}{\varkappa\,(n-n')^2} + \frac{2\,n^3\, H^{(\varkappa)}}{\varkappa\,(n-n')}$$

$$P^{(\varkappa)} = -\frac{n^2\, E^{(\varkappa)}}{n^2 - [n - \varkappa\,(n-n')]^2}$$

$$Q^{(\varkappa)} = +\frac{n^2\, D^{(\varkappa)}}{n^2 - [n - \varkappa\,(n-n')]^2}$$

$$S^{(\varkappa)} = \frac{-n\, F^{(\varkappa)}}{n - \varkappa\,(n-n')}$$

$$T^{(\varkappa)} = \frac{+n\, G^{(\varkappa)}}{n - \varkappa\,(n-n')}$$

so sind die Gleichungen (L) und (M), wenn man die in t multiplicirten Glieder wegläſst,

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m' a^2}{6}\left(\frac{dA^{(o)}}{da}\right) + \frac{m' n^2}{2}\,\Sigma\, H^{(\varkappa)} \operatorname{Cos} \varkappa\,(l'-l)$$

$$- m' f e \operatorname{Cos}(l-w) - m' f' e' \operatorname{Cos}(l-w')$$

$$- m'.\,\Sigma\, P^{(\varkappa)}\, e \operatorname{Cos}(\varkappa\,(l'-l) + l - w)$$

$$+ m'.\,\Sigma\, Q^{(\varkappa)}\, e' \operatorname{Cos}(\varkappa\,(l'-l) + l - w') \;.\;.\;.\; (L')$$

$$\delta v = \frac{m'}{2}.\,\Sigma\, R^{(\varkappa)} \operatorname{Sin} \varkappa\,(l'-l)$$

$$- m'.\,\Sigma\, S^{(\varkappa)}\, e \operatorname{Sin}(\varkappa\,(l'-l) + l - w)$$

$$+ m'.\,\Sigma\, T^{(\varkappa)}\, e' \operatorname{Sin}(\varkappa\,(l'-l) + l - w') \;.\;.\;.\; (M')$$

§. 6.

Noch ist die ähnliche Reduktion der Gleichung (K) des §. 3. für die Breite übrig. Vernachlässiget man das Produkt der Excentricität in die Neigung der Bahn, so ist diese Gleichung

$$o = \frac{d^2 \delta u'}{dt^2} + n^2 \delta u' - \frac{1}{a^2}\left(\frac{dR}{dz}\right) \text{ wo } \delta s = -a\,\delta u' \text{ ist.}$$

Der Ausdruck von R in §. 4. vor Nr. I gibt, wenn man bloſs

auf die drey letzten Glieder desselben Rücksicht nimmt, da das vorletzte von z unabhängig ist,

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = \frac{m'z'}{a'^3} - \frac{m'z'}{2} . \Sigma B^{(\varkappa)} \operatorname{Cos} \varkappa (l'-l)$$

wo $\varkappa$ alle ganze positive und negative Zahlen, auch $\varkappa = o$, bezeichnet. Es ist aber $\frac{z'}{a'}$ der Sinus der Breite des störenden Planeten, und wenn γ die Tangente der Neigung der Bahn des störenden Planeten m′ über der ursprünglichen Ebene des gestörten m, und Π die Länge des aufsteigenden Knotens der ersten dieser Ebenen auf der zweyten bezeichnet, so ist (Th. II p. 69.) die Tangente der Breite von m′ gleich $\gamma \operatorname{Sin} (l'-\Pi)$, also ist auch, wenn man, was hier erlaubt ist, die Tangente der Breite mit dem Sinus derselben verwechselt,

$$z' = a' \gamma \operatorname{Sin} (l'-\Pi)$$

und daher, wenn man die Glieder für $\varkappa = o$ besonders nimmt, und die Bemerkung des §. 4. Nr. 1 berücksichtiget,

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = \frac{m'\gamma}{a'^2} \operatorname{Sin} (l'-\Pi) - \frac{m'a'B^{(1)}\gamma}{2} \operatorname{Sin} (l-\Pi)$$

$$- \frac{m'a'}{2} \Sigma B^{(\varkappa-1)} \gamma \operatorname{Sin} (\varkappa (l'-l) + l - \Pi)$$

wo $\varkappa$ alle ganze positive und negative Zahlen, blofs $\varkappa = o$ ausgenommen, bezeichnet. Multiplicirt man diesen Werth von $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ durch $n^2 a^3 = 1$, so erhält man für die vorhergehende Gleichung

$$o = \frac{d^2.\delta u'}{dt^2} + n^2 \delta u' - \frac{m'n^2 a\gamma}{a'^2} \operatorname{Sin} (l'-\Pi)$$

$$+ \frac{m'n^2 aa'}{2} . B^{(1)} \gamma \operatorname{Sin} (l-\Pi)$$

$$+ \frac{m'n^2 aa'}{2} . \Sigma B^{(\varkappa-1)} \gamma \operatorname{Sin} (\varkappa (l'-l) + l - \Pi)$$

Integrirt man diese Gleichung nach der Vorschrift des §. 2, Cap. VIII. so wie wir §. 5 die Gleichung für δu integrirt haben, und setzt man $\delta s = - a \delta u'$, so ist

$$\delta s = -\frac{m' n^2 a^2}{(n^2 - n'^2) a'^2} . \gamma \operatorname{Sin}(l' - \Pi) - \frac{m' a^2 a'}{4} . B^{(1)} nt . \gamma \operatorname{Cos}(l - \Pi)$$

$$+ \frac{m' n^2 a^2 a'}{2} . \Sigma \frac{B^{(\varkappa-1)}}{n^2 - [n - \varkappa(n - n')]^2} . \gamma \operatorname{Sin}(\varkappa(l' - l) + l - \Pi)$$

I. Es sey nun φ die Neigung der Bahn von m über einer fixen Ebene, welche gegen die ursprüngliche Ebene von m nur wenig geneigt ist, und ϑ die Länge des aufsteigenden Knotens dieser Bahn auf derselben Ebene; für m′ seyen dieselben Gröſsen φ' und ϑ', so ist $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{Sin}(l - \vartheta)$ die Breite von m über der fixen Ebene, wenn sich m in seiner ursprünglichen Ebene bewegt, und $\operatorname{tg}\varphi' \operatorname{Sin}(l - \vartheta')$ würde die Breite von m über der fixen Ebene seyn, wenn sich m in der ursprünglichen Ebene von m′ bewegte. Die Differenz dieser beyden Breiten wird sehr nahe die Breite von m über seiner ursprünglichen Ebene seyn, und da die letzte Breite gleich $\gamma \operatorname{Sin}(l - \Pi)$ ist, so hat man (Vergl. Cap. 13, §. 5.)

$$\operatorname{tg}\varphi' \operatorname{Sin}(l - \vartheta') - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{Sin}(l - \vartheta) = \gamma \operatorname{Sin}(l - \Pi)$$

$$\text{Es sey} \quad p = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{Sin}\vartheta \quad \text{und} \quad p' = \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{Sin}\vartheta'$$
$$q = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{Cos}\vartheta \qquad q' = \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{Cos}\vartheta'$$

Löſst man die letzte Gleichung auf, und setzt die Coefficienten von Sin l und Cos l, jeden für sich gleich Null, so erhält man

$$p' - p = \gamma \operatorname{Sin}\Pi \quad \text{und} \quad q' - q = \gamma \operatorname{Cos}\Pi$$

also auch $\quad \gamma \operatorname{Sin}(l' - \Pi) = (q' - q) \operatorname{Sin} l' - (p' - p) \operatorname{Cos} l'$

Löſst man eben so $\gamma \operatorname{Cos}(l - \Pi)$ und $\gamma \operatorname{Sin}(\varkappa(l' - l) + l - \Pi)$ auf, und substituirt diese Werthe in dem letzten Ausdrucke von δs, so erhält man

$$\delta s = -\frac{m' n^2 a^2}{a'^2 (n^2 - n'^2)} [(q' - q) \operatorname{Sin} l' - (p' - p) \operatorname{Cos} l']$$
$$- \frac{m' a^2 a' B^{(1)} nt}{4} [(p' - p) \operatorname{Sin} l + (q' - q) \operatorname{Cos} l]$$
$$+ \frac{m' n^2 a^2 a'}{2} \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(q' - q) B^{(\varkappa-1)}}{n^2 - [n - \varkappa(n - n')]^2} . \operatorname{Sin}(\varkappa(l' - l) + l) \\ \dfrac{-(p' - p) B^{(\varkappa-1)}}{n^2 - [n - \varkappa(n - n')]^2} . \operatorname{Cos}(\varkappa(l' - l) + l) \end{array} \right\}$$

und dieser Ausdruck von δs gibt die Breite von m über der Ebene seiner ursprünglichen Bahn. Will man die Breite von m über jene feste Ebene, die sehr wenig gegen die ursprüngliche Bahn ge-

neigt ist, so hat man, wenn diese Breite über der festen Ebene durch s bezeichnet wird,

$$s = \operatorname{tg}\varphi\, \operatorname{Sin}(l-\vartheta) + \delta s \text{ oder}$$

$$s = q \operatorname{Sin} l - p \operatorname{Cos} l + \delta s, \text{ also auch}$$

$$s = q \operatorname{Sin} l - p \operatorname{Cos} l - \frac{m' n^2 a^2}{a'^2 (n^2 - n'^2)} [(q'-q) \operatorname{Sin} l' - (p'-p) \operatorname{Cos} l']$$

$$- \frac{m' a^2 a' . B^{(1)} nt}{4} [(p'-p) \operatorname{Sin} l + (q'-q) \operatorname{Cos} l]$$

$$+ \frac{m' n^2 a^2 a'}{2} . \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(q'-q) B^{(\varkappa-1)}}{n^2 - [n - \varkappa (n-n')]^2} \operatorname{Sin} (\varkappa (l'-l) + l) \\ - \dfrac{(p'-p) B^{(\varkappa+1)}}{n^2 - [n - \varkappa (n-n')]^2} \operatorname{Cos} (\varkappa (l'-l) + l) \end{array} \right\} \ldots (N)$$

und die Gleichungen L M N sind die gesuchten, von denen also L die Störung δr des elliptischen Radius Vectors. M die Störungen δv der elliptischen Länge, und endlich N die gestörte Breite s des Planeten m über einer festen Ebene gibt, die nur wenig gegen die ursprüngliche Ebene von m geneigt ist.

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Werthe von $A^{(\varkappa)}$, $\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right)$, $\left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da'}\right)$. : . . und von $B^{(\varkappa)}$ haben wir bereits im Cap. VIII §. 4. gefunden, wo die dort gebrauchten Bezeichnungen a a'.. dieselbe Bedeutung mit den gegenwärtigen haben. Uebrigens gelten die dort gegebenen Werthe von $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ u. f. für die Störungen, welche der Körper m von m' leidet. Sucht man aber die Störungen, welche m' von m leidet, so sind offenbar die Werthe von $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$. . . dieselben mit den vorhergehenden, den einzigen Fall $A^{(1)}$ ausgenommen, dessen Werth dann

$$\left(\frac{a'}{a^2} - \frac{1}{a'} \cdot b_{\frac{1}{2}}^{1}\right) \text{ wird.}$$

Die Berechnung der Werthe von $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$. . . und ihrer verschiedenen Differentialien dient also für die Entwicklung der Störungen beyder Körper m und m', welche sie gegenseitig von einander leiden. Hat man die Störung des m durch m' berechnet, und sucht man dann die Störung des m' durch m, so wird man a in a', und a' in a verwandeln, und jeden Coefficienten $b_{\frac{1}{2}}^{\varkappa}$ der

vorigen Rechnung durch $\alpha = \frac{a}{a'}$, so wie jeden Coefficienten $b^{x}_{\frac{s}{2}}$ durch $\alpha^3 = \frac{a^3}{a'^3}$ multipliciren, um seinen Werth für die zweyte Berechnung zu erhalten.

Uebrigens enthalten die vorhergehenden Ausdrücke nur diejenigen Störungen, welche von der Excentricität und der Neigung der Planetenbahnen unabhängig sind, und welche nur von der ersten Potenz der Excentricität und Neigung abhängen. Allein unter den Gliedern jener Reihen, deren erste Theile wir entwickelt haben, gibt es noch mehrere nicht unbeträchtliche, die von dem Quadrate und von den höheren Potenzen jener beyden Gröfsen abhängen, und selbst diejenigen werden noch zuweilen merklich, die von dem Quadrate der störenden Kraft kommen. Da die Bestimmung aller dieser Gröfsen blofs in einer weiteren Entwicklung der bisher betrachteten Ausdrücke besteht, und es hier zu unserer Absicht hinreicht, den Weg, welchen man gehen mufs, gezeigt, und die vorzüglichsten Störungen gegeben zu haben, so kann man diese Erweiterungen der vorhergehenden Untersuchung in Laplace, Mec. cel. III Vol. oder in Schuberts Traité d'Astron. III Vol. Petersb. 1822 nachsehen.

§. 7.

Da die Satelliten mit ihren Hauptplaneten sich nicht um einen beyden gemeinschaftlichen Central-Punkt bewegen, so läfst sich auch die bisher vorgetragene Methode nicht unmittelbar auf die Störungen anwenden, welche die Hauptplaneten von ihren Monden leiden. Da aber diejenigen Theile dieser Störungeu, welche von der Excentricität und der Neigung der Satellitenbahnen abhängen, sehr gering sind, so lassen sich die übrigen beträchtlicheren Wirkungen der Sattelliten auf ihre Hauptplaneten auf folgende einfache Weise bestimmen.

Ist r die Entfernung der Sonne von dem Hauptplaneten und ϱ die des Planeten von seinen Satelliten; ist ferner μ die Masse des Satelliten, jene der Sonne als Einheit angenommen, so wirkt auf den Hauptplaneten die Kraft

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\mu}{\varrho^2}.$$

Sey l die mittlere heliocentrische Länge des Planeten, und λ die mittlere Länge des Satelliten, so ist diese Kraft parallel mit der Achse der x zerlegt, $X = \frac{\text{Cos}\, l}{r^2} - \frac{\mu}{\varrho^2} \text{Cos}\, \lambda$ und parallel mit der Achse der y zerlegt, $Y = \frac{\text{Sin}\, l}{r^2} - \frac{\mu}{\varrho^2} \text{Sin}\, \lambda$. Ist aber L die Länge der Sonne, aus dem Hauptplaneten gesehen,

und der Kürze wegen $w = \lambda - L$, so ist, da $l = L + 180^\circ$ ist, $X = -\frac{1}{r^2}\text{Cos}\,L - \frac{\mu}{\varrho^2}\text{Cos}\,(w + L)$ und $Y = -\frac{1}{r^2}\text{Sin}\,L - \frac{\mu}{\varrho^2}\text{Sin}\,(w + L)$. Substituirt man diese Werthe von X und Y in den bekannten Gleichungen der Bewegung $o = \frac{d^2x}{dt^2} + X$, $o = \frac{d^2y}{dt^2} + Y$, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu}{\varrho^2}\text{Cos}\,(w + L) + \frac{1}{r^2}\text{Cos}\,L$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\mu}{\varrho^2}\text{Sin}\,(w + L) + \frac{1}{r^2}\text{Sin}\,L$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch Sin L, und die zweyte durch Cos L, so gibt die Differenz beyder Produkte

$$o = \frac{d^2x\,\text{Sin}\,L - d^2y\,\text{Cos}\,L}{dt^2} + \frac{\mu}{\varrho^2}\text{Sin}\,w.$$

Multiplicirt man aber die erste durch Cos L, und die zweyte durch Sin L, so hat man eben so

$$o = \frac{d^2x\,\text{Cos}\,L + d^2y\,\text{Sin}\,L}{dt^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{\varrho^2}\text{Cos}\,w.$$

Es ist aber $x = -r\,\text{Cos}\,L$, $y = -r\,\text{Sin}\,L$, also sind auch die beyden letzten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} o &= r d^2L + 2\,dr\,dL + \frac{\mu\,dt^2}{\varrho^2}\text{Sin}\,w \\ o &= r\,dL^2 - d^2r - \frac{dt^2}{r^2} - \frac{\mu\,dt^2}{\varrho^2}\text{Cos}\,w \end{aligned}\right\}$$

Es sey $r = 1 + p$ und $dL = dt + q\,dt$, wo also p und $\int q\,dt$ die Störungen der Entfernung r und der Länge L bezeichnen, so werden die beyden letzten Gleichungen in folgende übergehen.

$$\left.\begin{aligned} o &= (1 + p)\,dq + 2\,(1 + q)\,dp + \frac{\mu\,dt^2}{\varrho^2}\text{Sin}\,w \\ o &= d^2p - (1 + p)\,(1 + q)^2\,dt^2 + \frac{dt^2}{(1 + p)^2} + \frac{\mu\,dt^2}{\varrho^2}\text{Cos}\,w \end{aligned}\right\}$$

oder abkürzend, wenn man $dw = b\,dt$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} dq + 2\,dp &= -\frac{\mu\, dw}{b\varrho^2}\,\text{Sin}\; w \\ \frac{b^2 d^2 p}{dw^2} &= 3p + 2q - \frac{\mu}{\varrho^2}\,\text{Cos}\, w \end{aligned}\right\}$$

Das Integral des ersten dieser Ausdrücke ist

$$q + 2p = \frac{\mu\,\text{Cos}\; w}{b\varrho^2},$$ also ist auch der zweyte

$$\frac{b^2 d^2 p}{dw^2} + p = -\frac{\mu\,\text{Cos}\; w}{\varrho^2}\left(1 - \frac{2}{b}\right)$$

Integrirt man die letzte Gleichung nach Cap. VIII. §. 2., so hat man

$$u = p,\; t = w,\; a = \frac{1}{b},\; m = 1,$$

$$B = \frac{\mu\,(b-2)}{b^3\varrho^2} \text{ und } A = C = \beta = \gamma = 0,$$

also auch

$$p = \left(bc' - \frac{\mu\,(b-2)}{b\varrho^2\,(b^2-1)}\right)\text{Cos}\,\frac{w}{b} + \frac{c}{a}\,\text{Sin}\,\frac{w}{b} + \frac{\mu\,(b-2)}{b\varrho^2\,(b^2-1)}\,\text{Cos}\,w.$$

Ist also $bc' = \dfrac{\mu\,(b-2)}{b\varrho^2\,(b^2-1)}$ und $c = 0$, so ist

$$p = \frac{\mu\,(b-2)}{b\varrho^2\,(b^2-1)}\,\text{Cos}\; w \;\ldots\; (1)$$

und diese Gleichung gibt sofort die Störung p des Radius Vectors des Hauptplaneten.

Substituirt man den gefundenen Werth von p in der Gleichung

$$q + 2p = \frac{\mu\,\text{Cos}\; w}{b\varrho^2},$$ so hat man

$$q\,dt = \frac{\mu\,(b^2 - 2b + 3)}{b^2\varrho^2\,(b^2-1)}\,\text{Cos}\; w.dw$$

also auch die gesuchte Störung der Länge des Planeten

$$\int q\,dt = \frac{\mu\,(b^2 - 2b + 3)\,\text{Sin}\; w}{b^2\varrho^2\,(b^2-1)} \;\ldots\; (2)$$

Um das Vorhergehende auf die Erde und ihren Mond anzuwen-

den, hat man für die tägliche Bewegung der Erde $dt = 59' 8'' 3$, und des Mondes $dT = 13^0\ 10'\ 35''$, also $b = \frac{dw}{dt} = \frac{dT - dt}{dt}$ $= 12.36825$.

Weiter ist $\varrho = \frac{8''.8}{3454''2} = 0.002547624$ und

$\mu = \frac{1}{(58.6)(329630)}$, also geben die Gleichungen (1) und (2)

$$p = 0.000044 \text{ Cos } (☾ - ⊙) \text{ und}$$
$$\int q\, dt = 9''29 \text{ Sin } (☾ - ⊙)$$

wo ☾ und ⊙ die geocentrische Länge des Mondes und der Sonne bezeichnet. Für die anderen mit Satelliten umgebenen Planeten sind die Werthe von p und $\int q\,dt$ völlig unbeträchtlich, da die Masse μ der Satelliten gegen die ihrer Hauptplaneten zu klein ist, um in der Bewegung der letzten noch irgend eine merkliche Störung hervorzubringen.

ZEHNTES KAPITEL.

Säculäre Störungen.

§. 1.

Die Ausdrücke von δr, δv und s, welche wir in dem vorhergehenden Capitel durch die Gleichungen L M N gegeben haben, enthalten also die Störungen, welche der Körper m in seiner elliptischen Bewegung durch die Wirkung des Körpers m' leidet, und man sieht, dafs alle Glieder dieser Gleichungen, da sie in die Sinus und Cosinus von Winkeln, die mit der Zeit gleichförmig wachsen, multiplicirt sind, nur periodische, in kleineren oder gröfseren Zeiträumen wiederkommende Werthe haben, diejenigen Glieder allein ausgenommen, deren Faktor die Zeit t selbst ist, und die daher ohne Ende und über alle Gränzen hinaus wachsen können.

Diese letzten Glieder sind alle in die Gröfse m' multiplicirt, sind daher alle blofse Folgen des störenden Körpers m'. Allein die Störungen sind sämmtlich so gering, dafs sie während einer bestimmten, nicht gar zu langen Zeit vorzüglich nur auf den Ort des gestörten Planeten in seiner Ellipse Einflufs haben, ohne diese Ellipse selbst merklich zu verändern. Nach einer längeren Zeit aber wird die blofse Aenderung des Ortes in der ursprünglichen Ellipse nicht mehr hinreichen, um die Rechnung mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung zu bringen. Am Ende dieser Zeit wird nähmlich der Planet, wenn jetzt die störende Kraft plötzlich zu wirken aufhörte, zwar noch eine Ellipse um die Sonne beschreiben, aber diese wird durch die bisherige Wirkung der störenden Kraft von der vorhergehenden ursprünglichen Ellipse in ihrer Gestalt und Lage verschieden seyn. Die Wirkung des Planeten m' wird also nicht blofs den Ort des gestörten Planeten in seiner ursprünglichen Ellipse, sondern sie wird auch die Elemente dieser Ellipse allmählig ändern, und da diese letzten Aenderungen ihrer Natur nach viel langsamer vor sich gehen, als die ersten; da sie, wenn sie überhaupt

noch in bestimmte Gränzen eingeschlossen sind, zwischen diesen Gränzen erst in sehr langen Perioden von mehreren Jahrhunderten, ja Jahrtausenden auf- und abgehen, während die Störungen des Ortes in der unveränderlichen Ellipse in viel kürzere Perioden eingeschlossen sind, so hat man jene, zum Unterschiede von diesen, säculäre Störungen genannt, während man die in dem vorhergehenden Capitel bestimmten Störungen des Ortes der Planeten in ihren ursprünglichen Ellipsen unter dem Nahmen der periodischen Störungen begreift.

Nehmen wir an, dafs eine dieser säculären Störungen die Form A Sin $(at + b)$ habe, wo also a eine sehr kleine Gröfse ist, weil die Periode $\frac{360}{a}$ (Cap. VIII §. 2. Nr. I) der säculären Gleichung sehr grofs seyn soll. Setzt man, wie es in der That der Fall ist, voraus, dafs man blofs durch eine allmählige Entwicklung aller Störungen, in welcher man, wie wir in dem Vorhergehenden gesehen haben, blofs auf die ersten Glieder der unendlichen Reihen Rücksicht nimmt, dafs man nicht auf die eigentliche Gestalt A Sin $(at + b)$ dieser Gleichung, sondern durch die Entwicklung derselben in eine nach den Potenzen von t fortgehende Reihe auf die Form $\alpha + \beta t + \gamma t^2 +$ gekommen sey, von welcher man etwa nur die zwey ersten Glieder betrachtet hat, so wird dieser Ausdruck in seiner neuen Gestalt nicht mehr periodisch seyn, oder diese Störung wird als eine ohne Ende, progressiv fortgehende erscheinen, aber dieser Schein wird blofs eine Folge der Unvollkommenheit unserer Analysis seyn, da, wie die ursprüngliche Form der Gleichung zeigt, diese Störung doch in eine bestimmte, wenn gleich vielleicht sehr grofse Periode eingeschlossen ist. Die lange Dauer dieser Periode aber, und die äufserst langsame und beynahe gleichförmige Aenderung des veränderlichen Elementes der Ellipse wird uns erlauben, diese Aenderung, während einem nicht zu grofsen Zeitraume, der Zeit t selbst proportional zu setzen, und daher jene Störung selbst gleich $\alpha + \beta t$ anzunehmen. Setzt man dann diese Störung dem in Beziehung auf jenes Element genommenen Differentiale der elliptischen Bewegung gleich, so erhält man dadurch eine Gleichung, aus welcher man die gesuchte säculäre Aenderung dieses Elementes ableiten wird.

§. 2.

Um dieses auf die letzten Gleichungen des vorhergehenden Capitels anzuwenden, so gibt die Gleichung (M), wenn man blofs auf die in t multiplicirten Glieder sieht,

wahre Länge

$$= nt + m'nt . C e . \text{Cos}(nt + \varepsilon - w) + m'nt . D e' . \text{Cos}(nt + \varepsilon - w')$$

Es sey $h = e \sin w$ und eben so $h' = e' \sin w'$
$l = e \cos w$ $\quad$ $l' = e' \cos w'$

so ist die vorhergehende Gleichung

wahre Länge
$= nt + m'nt (hC + h'D) \sin(nt+\varepsilon) + m'nt (lC + l'D) \cos(nt+\varepsilon)$

Die wahre elliptische Länge aber ist

$nt + 2e \sin(nt + \varepsilon - w) = nt + 2l \sin(nt+\varepsilon) - 2h \cos(nt+\varepsilon)$

Leiden also die Gröſsen n, h und l durch die Störung des Planeten m′ in der Zeit t die Störungen

$$t.\left(\frac{dn}{dt}\right),\ t.\left(\frac{dh}{dt}\right) \text{ und } t.\left(\frac{dl}{dt}\right),$$

so ist die wahre gestörte Länge

$$nt + t.\left(\frac{dn}{dt}\right) + 2\left(l + t.\left(\frac{dl}{dt}\right)\right) \sin(nt+\varepsilon)$$
$$- 2\left(h + t.\left(\frac{dh}{dt}\right)\right) \cos(nt+\varepsilon)$$

also die Störung selbst

$$t.\left(\frac{dn}{dt}\right) + 2t.\left(\frac{dl}{dt}\right) \sin(nt+\varepsilon) - 2t.\left(\frac{dh}{dt}\right) \cos(nt+\varepsilon)$$

und wenn man diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden

$m'nt (hC + h'D) \sin(nt+\varepsilon) + m'nt (lC + l'D) \cos(nt+\varepsilon)$

vergleicht, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dn}{dt}\right) &= 0 \\ \left(\frac{dh}{dt}\right) &= -\frac{m'n}{2}(lC + l'D) \\ \left(\frac{dl}{dt}\right) &= +\frac{m'n}{2}(hC + h'D) \end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

I. Bezeichnet ω und ϑ, wie im Cap. IX §. 6. die Neigung und die Länge des Knotens, und s die Tangente der Breite, so folgt aus der sphärischen Trigonometrie

$s = \operatorname{tg} \omega \sin(nt + \varepsilon - \vartheta)$ oder
$s = \operatorname{tg} \omega \cos \vartheta \sin(nt+\varepsilon) - \operatorname{tg} \omega \sin \vartheta \cos(nt+\varepsilon)$

Wenn man aber wieder die in Cap. IX §. 6. I gebrauchten Bezeichnungen von p, q einführt, wo $p = \operatorname{tg} \omega \sin \vartheta$, und $q = \operatorname{tg} \omega \cos \vartheta$ war, so wird der letzte Ausdruck

$$s = q \,\mathrm{Sin}\,(nt + \varepsilon) - p \,\mathrm{Cos}\,(nt + \varepsilon)$$

Leiden also die Gröfsen p und q durch die Störungen des m′ in der Zeit t die Störungen $t \cdot \left(\frac{dp}{dt}\right)$ und $t \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right)$, so wird die dadurch entstehende Störung der Breite seyn

$$t \left(\frac{dq}{dt}\right) \mathrm{Sin}\,(nt + \varepsilon) - t \cdot \left(\frac{dp}{dt}\right) \mathrm{Cos}\,(nt + \varepsilon)$$

Die Gleichung (N) des vorhergehenden Capitels gibt aber für dieselbe Störung der Breite

$$-\frac{m' a^2 a' . B^{(1)} . nt}{4} [(p'-p) \,\mathrm{Sin}\,(nt+\varepsilon) + (q'-q) \,\mathrm{Cos}\,(nt+\varepsilon)]$$

Setzt man also die beyden letzten Ausdrücke einander gleich, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dp}{dt}\right) = -\frac{m'n}{4} . a^2 a' . B^{(1)} . (q - q') \\ \left(\frac{dq}{dt}\right) = +\frac{m'n}{4} . a^2 a' . B^{(1)} . (p - p') \end{array}\right\} \ldots (b)$$

§. 3.

Die Gleichungen (a) und (b), welche die gesuchten säculären Störungen bestimmen, müssen nun näher betrachtet werden.

Die erste der Gleichungen (a) oder die Gleichung $\left(\frac{dn}{dt}\right) = 0$ zeigt uns, dafs die Gröfse n, d. h., dafs die mittlere tägliche Bewegung, also auch die Umlaufszeit eines jeden Planeten constant ist, und daher durch die Störungen aller übrigen keine Aenderungen leidet. Da ferner, vermöge der Gleichung $n^2 a^3 = 1$ (Cap. IX §. 1.) die Gröfse a blofs von der Gröfse n abhängt, so ist also auch, aller Störungen ungeachtet, die halbe grofse Achse a der Bahn eines jeden Planeten ebenfalls constant.

Die beyden anderen Gleichungen (a) geben die Störungen von h und l.

Es ist aber $h = e \,\mathrm{Sin}\, w$ und $l = e \,\mathrm{Cos}\, w$, also auch

$$\frac{de}{dt} = \frac{dh}{dt} \mathrm{Sin}\, w + \frac{dl}{dt} \mathrm{Cos}\, w \text{ und } \frac{dw}{dt} = \frac{1}{e} \left\{ \frac{dh}{dt} \mathrm{Cos}\, w - \frac{dl}{dt} \mathrm{Sin}\, w \right\}$$

Substituirt man hier die Ausdrücke von $\frac{dh}{dt}$ und $\frac{dl}{dt}$ aus den Gleichungen (a), so erhält man

$$\frac{de}{dt} = \frac{m'n}{2} D e' \operatorname{Sin} (w' - w)$$

$$\frac{dw}{dt} = - \frac{m'n}{2} \left(C + \frac{De'}{e} \operatorname{Cos} (w' - w) \right)$$

Sey $\varphi^{1}_{0} = - \frac{m'nC}{2}$ und $\psi^{1}_{0} = + \frac{m'nD}{2}$,

$$\text{also auch } \varphi^{1}_{0} = - \frac{m'n}{2} \left\{ a^2 . \frac{dA^{(0)}}{da} + \frac{a^3}{2} . \frac{d^2A^{(0)}}{da^2} \right\}$$

$$\text{und } \psi^{1}_{0} = + \frac{m'n}{2} \left\{ a A^{(1)} - a^2 \frac{dA^{(1)}}{da} - \frac{a^3}{2} \frac{d^2A^{(1)}}{da^2} \right\}$$

so ist
$$\frac{de}{dt} = e' \psi^{1}_{0} \operatorname{Sin} (w' - w)$$

$$\frac{dw}{dt} = \varphi^{1}_{0} - \frac{e'}{e} \psi^{1}_{0} \operatorname{Cos} (w' - w)$$

Nehmen wir der Kürze wegen an, daſs die Gröſsen $\varphi^{1}_{0}\ \varphi^{2}_{0}\ \varphi^{3}_{0}$.. respective in $\varphi^{0}_{1}\ \varphi^{2}_{1}\ \varphi^{3}_{1}$.. übergehen, wenn man in jenen alles, was sich auf m bezieht, in das verwandelt, was sich auf m′ bezieht, und umgekehrt; und daſs eben so die Gröſsen $\varphi^{1}_{0}\ \varphi^{2}_{0}\ \varphi^{3}_{0}$.. respect. in $\varphi^{1}_{2}\ \varphi^{0}_{2}\ \varphi^{3}_{2}$.. übergehen, wenn man in jenen alles, was sich auf m bezieht, in das verwandelt, was sich auf m″ bezieht u. s. f., so hat man für die säculäre Aenderung der Excentricität der Planeten m m′ m″ . . nach der Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \psi^{1}_{0} e' \operatorname{Sin} (w' - w) + \psi^{2}_{0} e'' \operatorname{Sin} (w'' - w) \\ &\quad + \psi^{3}_{0} e''' \operatorname{Sin} (w''' - w) + \\ \frac{de'}{dt} &= \psi^{0}_{1} e \operatorname{Sin} (w - w') + \psi^{2}_{1} e'' \operatorname{Sin} (w'' - w) + \\ \frac{de''}{dt} &= \psi^{0}_{2} e \operatorname{Sin} (w - w'') + \psi^{1}_{2} e' \operatorname{Sin} (w' - w'') + \end{aligned}\right\} \ldots (c)$$

und für die säculären Aenderungen der Länge der groſsen Achse oder der Perihelien

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dw}{dt} = (\varphi^1_0 + \varphi^2_0 + \varphi^3_0 + \ldots) \\
-(\psi^1_0 \frac{e'}{e} \operatorname{Cos}(w'-w) + \psi^2_0 \frac{e''}{e} \operatorname{Cos}(w''-w) + \ldots) \\
\frac{dw'}{dt} = (\varphi^0_1 + \varphi^2_1 + \varphi^3_1 + \ldots) \\
-(\psi^0_1 \frac{e}{e'} \operatorname{Cos}(w-w') + \psi^2_1 \frac{e''}{e'} \operatorname{Cos}(w''-w') + \ldots) \\
\frac{dw''}{dt} = (\varphi^0_2 + \varphi^1_2 + \varphi^3_2 + \ldots) \\
-(\psi^0_2 \frac{e}{e''} \operatorname{Cos}(w-w'') + \psi^1_2 \frac{e'}{e''} \operatorname{Cos}(w'-w'') + \ldots)
\end{array}\right\} \ldots (d)$$

wo immer φ^b_a oder ψ^b_a die Störung des Körpers a durch die Wirkung des störenden Körpers b bezeichnet.

§. 3.

Auf eine ähnliche Art lassen sich nun auch die Gleichungen (b) behandeln. Ehe wir aber diese Entwicklung vornehmen, wollen wir zuerst die so eben eingeführten Gröfsen φ^1_0 und ψ^1_0 näher betrachten.

Es war $\varphi^1_0 = -\frac{m'nC}{2}$ und daher, wenn man den Werth von C aus Cap. IX. §. 5. III substituirt

$$\varphi^1_0 = -\frac{m'n}{2}\left[a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \frac{a^3}{2}\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)\right]$$

und wenn man hier wieder die Werthe von $\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$ und $\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)$ aus Cap. VIII, §. 4. I substituirt

$$\varphi^1_0 = +\frac{m'n}{2}\left\{\alpha^2 \cdot \frac{db^0_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \frac{\alpha^3}{2} \cdot \frac{d^2b^0_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right\}$$

Die Gleichung (m) des angeführten Ortes gibt aber

$$\frac{db^0_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = \frac{\alpha b^0_{\frac{1}{2}} - b^1_{\frac{1}{2}}}{1-\alpha^2}$$

oder wenn man hier den Werth von $b^{0}_{\frac{1}{2}}$ aus der Gleichung (e), und die von $b^{1}_{\frac{1}{2}}$ aus der Gleichung (f) substituirt,

$$\frac{db^{0}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = \frac{-\alpha b^{0}_{-\frac{1}{2}} - 3b^{1}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2} = +\alpha b^{0}_{\frac{3}{2}} + b^{1}_{\frac{3}{2}}$$

Das Differential dieses Ausdruckes in Beziehung auf α ist

$$\frac{d^2 b^{0}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = -b^{0}_{\frac{3}{2}} - \alpha . \frac{db^{0}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} + 3 . \frac{db^{1}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}$$

Aber die Gleichung (m) gibt

$$\frac{db^{0}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} = \frac{3\alpha}{1-\alpha^2} . b^{0}_{\frac{3}{2}} + \frac{b^{1}_{\frac{3}{2}}}{1-\alpha^2} \text{ und}$$

$$\frac{db^{1}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} = \frac{-\frac{1}{3}(1-2\alpha^2)\, b^{1}_{\frac{3}{2}} + \alpha b^{0}_{\frac{3}{2}}}{\alpha(1-\alpha^2)}$$

so dafs man hat

$$\frac{d^2 b^{0}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 2b^{0}_{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\alpha} . b^{1}_{\frac{3}{2}}$$

Substituirt man also diese Werthe von $\frac{db^{0}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$ und $\frac{d^2 b^{0}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}$ in dem vorhergehenden Ausdrucke von φ^{1}_{0}, so erhält man

$$\varphi^{1}_{0} = + \frac{m'n}{4} . \alpha^2 b^{1}_{\frac{3}{2}}$$

Ganz eben so findet man, dafs die Gleichung $\psi^{1}_{0} = \frac{m'n}{2} D$, wenn man den Werth von D aus Cap. IX. §. 5. substituirt, in folgende übergeht

$$\psi^{1}_{0} = - \frac{3mn\alpha}{2(1-\alpha^2)^2} \left\{ (1+\alpha^2)\, b^{1}_{-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2} . b^{0}_{-\frac{1}{2}} \right\}$$

oder wenn man die Werthe von $b^{0}_{-\frac{1}{2}}$ und $b^{1}_{-\frac{1}{2}}$ aus den Gleichungen (g) und (h) des Cap. VIII substituirt, in folgende

$$\psi^{1}_{0} = + \frac{m'n}{4}\left[2\alpha(1+\alpha^2)\, b^{1}_{\frac{3}{2}} - 3\alpha^2 . b^{0}_{\frac{3}{2}}\right]$$

Endlich ist noch nach der Gleichung (l) des angeführten Ortes

$$B^{(1)} = \frac{1}{a'^3} . b^{1}_{\frac{3}{2}} \text{ also auch}$$

$$\frac{m'na^2a'}{4} B^{(1)} = \frac{m'n}{4} . \alpha^2 b^{1}_{\frac{3}{2}} \text{ oder}$$

$$\frac{m'na^2a'}{4} B^{(1)} = \varphi^{1}_{0}$$

I. Man kann hier noch bemerken, daſs die Gröſsen $\varphi^{1}_{0}\ \varphi^{0}_{1}$ ein merkwürdiges Verhältniſs zu einander haben. Es ist nähmlich, wie wir so eben gesehen haben, $\varphi^{1}_{0} = \frac{m'n}{4} \alpha^2 b^{1}_{\frac{3}{2}}$ also auch nach dem, was wir unmittelbar von den Gleichungen (c) des §. 2. gesagt haben, verglichen mit der Anmerkung am Ende des Cap. (IX),

$$\varphi^{0}_{1} = \frac{mn'}{4} . \frac{1}{\alpha^2} . \left(b^{1}_{\frac{3}{2}} . \alpha^3\right).$$

Ueberdieſs hat man

$$n^2 = \frac{1}{a^3} \text{ und } n'^2 = \frac{1}{a'^3} \text{ also } \frac{n}{n'} = \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \text{ und daher}$$

$$m a^{\frac{1}{2}} \varphi^{1}_{0} = m' a'^{\frac{1}{2}} \varphi^{0}_{1} \text{ und eben so}$$

$$m a^{\frac{1}{2}} \varphi^{2}_{0} = m'' a''^{\frac{1}{2}} \varphi^{0}_{2}$$

$$m' a'^{\frac{1}{2}} \varphi^{2}_{1} = m'' a''^{\frac{1}{2}} \varphi^{1}_{2} \text{ u. s. w.}$$

und ganz eben so hat man auch

$$m a^{\frac{1}{2}} \psi^{1}_{0} = m' a'^{\frac{1}{2}} \psi^{0}_{1}$$

$$m a^{\frac{1}{2}} \psi_0^2 = m'' a''^{\frac{1}{2}} \psi_2^0$$

$$m' a'^{\frac{1}{2}} \psi_1^2 = m'' a'^{\frac{1}{2}} \psi_2^1 \text{ u. s. w.}$$

§. 4.

Nach dieser Vorbereitung wollen wir nun die Gleichungen (b) wieder vornehmen. Da, wie wir gesehen haben

$\varphi_0^1 = \frac{m' n\, a^2 a'}{4} B^{(1)}$ ist, so sind diese Gleichungen

$$\frac{dp}{dt} = (q' - q) . \varphi_0^1$$

$$\frac{dq}{dt} = (p - p') . \varphi_0^1$$

Es sey nun, wie Cap. IX §. 6, ω die Neigung der Bahn von m gegen eine feste Ebene, und ϑ die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn auf dieser Ebene, so ist

$$p = \operatorname{tg} \omega \operatorname{Sin} \vartheta \quad \text{und} \quad q = \operatorname{tg} \omega \operatorname{Cos} \vartheta, \quad \text{also auch}$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{p}{q} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \omega = \sqrt{p^2 + q^2}$$

woraus folgt

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dp \operatorname{Cos} \vartheta - dq \operatorname{Sin} \vartheta}{dt . \operatorname{tang} \omega} \quad \text{und}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{dp \operatorname{Sin} \vartheta + dq \operatorname{Cos} \vartheta}{dt}$$

Substituirt man in diesen beyden Gleichungen die vorhergehenden Werthe von $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dq}{dt}$, so erhält man

$$\frac{d\omega}{dt} = \varphi_0^1 \operatorname{tg} \omega' \operatorname{Sin} (\vartheta - \vartheta') \quad \text{und}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\varphi_0^1 + \varphi_0^1 . \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} \operatorname{Cos} (\vartheta - \vartheta')$$

das heiſst, wenn man, wie in §. 2, die Wirkung aller störenden Planeten berücksichtiget,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= \varphi^{1}_{0}\,\mathrm{tg}\,\omega'\,\mathrm{Sin}\,(\vartheta-\vartheta') + \varphi^{2}_{0}\,\mathrm{tg}\,\omega''\,\mathrm{Sin}\,(\vartheta-\vartheta'') + \\ \frac{d\omega'}{dt} &= \varphi^{0}_{1}\,\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{Sin}\,(\vartheta'-\vartheta) + \varphi^{2}_{1}\,\mathrm{tg}\,\omega''\,\mathrm{Sin}\,(\vartheta''-\vartheta') +\end{aligned}\right\}\ldots (e)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dt} &= -(\varphi^{1}_{0} + \varphi^{2}_{0} + \ldots) \\ &+ \left(\varphi^{1}_{0}\,\frac{\mathrm{tg}\,\omega'}{\mathrm{tg}\,\omega}\,\mathrm{Cos}(\vartheta-\vartheta') + \varphi^{2}_{0}\,\frac{\mathrm{tg}\,\omega''}{\mathrm{tg}\,\omega}\,\mathrm{Cos}\,(\vartheta-\vartheta'') + \ldots\right) \\ \frac{d\vartheta'}{dt} &= -(\varphi^{0}_{1} + \varphi^{2}_{1} + \ldots) \\ &+ \left(\varphi^{0}_{1}\,\frac{\mathrm{tg}\,\omega}{\mathrm{tg}\,\omega'}\,\mathrm{Cos}(\vartheta'-\vartheta) + \varphi^{2}_{1}\,\frac{\mathrm{tg}\,\omega''}{\mathrm{tg}\,\omega'}\,\mathrm{Cos}\,(\vartheta'-\vartheta'') + \ldots\right)\end{aligned}\right\}\ldots (f)$$

und diese Gleichungen (e), (f) geben die säculäre Aenderung der Neigung und der Länge des Knotens jeder Planetenbahn gegen irgend eine feste Ebene.

§. 5.

Da aber die Astronomen die himmlischen Bewegungen nicht sowohl auf irgend eine feste Ebene, sondern auf die bewegliche Bahn der Erde zu beziehen pflegen, so wollen wir noch die Aenderungen der Gröfsen ω und ϑ in Beziehung auf irgend eine der beweglichen Bahnen der Körper, z. B. auf die Bahn von m suchen.

Die Breite von m' über der oben angenommenen festen Ebene ist

$$a = \mathrm{tg}\,\omega'\,\mathrm{Sin}\,(n't + \varepsilon' - \vartheta') = q'\,\mathrm{Sin}\,(n't + \varepsilon') - p'\,\mathrm{Cos}\,(n't + \varepsilon')$$

Wenn sich aber m' auf der Bahn des m bewegte, so würde die Breite des m' über der festen Ebene seyn

$$b = q\,\mathrm{Sin}\,(n't + \varepsilon') - p\,\mathrm{Cos}\,(n't + \varepsilon')$$

und die Differenz a — b ist sehr nahe die Breite des m' über der beweglichen Ebene von m. Diese Breite ist daher

$$(q' - q)\,\mathrm{Sin}\,(n't + \varepsilon') - (p' - p)\,\mathrm{Cos}\,(n't + \varepsilon')$$

Sind also Ω' und Θ' die Neigung und die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn des m' über der beweglichen Bahn von m, so ist, wie oben,

$$\frac{d\Omega'}{dt} = \frac{(dp'-dp)\,\text{Sin}\,\vartheta' + (dq'-dq)\,\text{Cos}\,\vartheta'}{dt} \quad \text{und}$$

$$\frac{d\Theta'}{dt} = \frac{(dp'-dp)\,\text{Cos}\,\vartheta' - (dq'-dq)\,\text{Sin}\,\vartheta'}{dt\,.\,\text{tg}\,\omega'}$$

Nimmt man also die Ebene des m zu irgend einer gegebenen Epoche als fest an, so ist $p = q = o$, also erhält man, da

$$\frac{dp}{dt} = -\overset{1}{\varphi}_o\,.\,(q-q') \quad \text{und} \quad \frac{dq}{dt} = \overset{1}{\varphi}_o\,.\,(p-p') \quad \text{war,}$$

wenn man diese Ausdrücke auf alle anderen Planeten fortsetzt

$$\frac{dp}{dt} = -(\overset{1}{\varphi}_o + \overset{2}{\varphi}_o + \overset{3}{\varphi}_o + \ldots)\,q + \overset{1}{\varphi}_o\,q' + \overset{2}{\varphi}_o\,q'' +$$

$$\frac{dp'}{dt} = -(\overset{0}{\varphi}_1 + \overset{2}{\varphi}_1 +)\,q' + \overset{0}{\varphi}_1\,q + \overset{2}{\varphi}_1\,q'' + \text{u. s. w.}$$

$$\frac{dq}{dt} = (\overset{1}{\varphi}_o + \overset{2}{\varphi}_o +)\,p - \overset{1}{\varphi}_o\,p' - \overset{2}{\varphi}_o\,p'' - \ldots\ldots$$

$$\frac{dq'}{dt} = (\overset{0}{\varphi}_1 + \overset{2}{\varphi}_1 +)\,p' - \overset{0}{\varphi}_1\,p - \overset{2}{\varphi}_1\,p'' - \text{u. s. w.}$$

Substituirt man diese Werthe in den vorhergehenden Ausdrücken von $\frac{d\Omega'}{dt}$ und $\frac{d\Theta'}{dt}$, so erhält man, da $p = q = o$ ist,

$$\frac{d\Omega'}{dt} = \left\{-(\overset{0}{\varphi}_1 + \overset{2}{\varphi}_1 + \overset{1}{\varphi}_o)\,q' + (\overset{2}{\varphi}_1 - \overset{2}{\varphi}_o)\,q''\right\}\text{Sin}\,\vartheta'$$

$$+ \left\{(\overset{0}{\varphi}_1 + \overset{2}{\varphi}_1 + \overset{1}{\varphi}_o)\,p' - (\overset{2}{\varphi}_1 - \overset{2}{\varphi}_o)\,p''\right\}\text{Cos}\,\vartheta'$$

oder da $p' = \text{tg}\,\omega'\,\text{Sin}\,\vartheta'$, $q' = \text{tg}\,\omega'\,\text{Cos}\,\vartheta'$ ist,

$$\frac{d\Omega'}{dt} = (\overset{2}{\varphi}_1 - \overset{2}{\varphi}_o)\,\text{tg}\,\omega''\,\text{Sin}\,(\vartheta' - \vartheta'')$$

das heifst, vollständig

$$\frac{d\Omega'}{dt} = (\overset{2}{\varphi}_1 - \overset{2}{\varphi}_o)\,\text{tg}\,\omega''\,\text{Sin}\,(\vartheta' - \vartheta'')$$

$$+ (\overset{3}{\varphi}_1 - \overset{3}{\varphi}_o)\,\text{tg}\,\omega'''\,\text{Sin}\,(\vartheta' - \vartheta''') + \ldots \quad (g)$$

und eben so findet man

$$\frac{d\Theta'}{dt} = -\left(\overset{0}{\varphi}_1 + \overset{2}{\varphi}_1 + \overset{3}{\varphi}_1 + \ldots\right) - \overset{1}{\varphi}_0$$

$$+ \left(\overset{2}{\varphi}_1 - \overset{2}{\varphi}_0\right) \frac{\operatorname{tg} \omega''}{\operatorname{tg} \omega'} \operatorname{Cos} (\vartheta' - \vartheta'')$$

$$+ \left(\overset{3}{\varphi}_1 - \overset{3}{\varphi}_0\right) \frac{\operatorname{tg} \omega'''}{\operatorname{tg} \omega'} \operatorname{Cos} (\vartheta' - \vartheta''') + \ldots (h)$$

und diese beyden Gleichungen geben die Aenderungen der Neigung und der Knotenlinie der Bahn des m′ in Beziehung auf die Bahn von m. Durch eine einfache Veränderung der Accente der Grössen $\varphi\,\omega\,\vartheta\ldots$ wird man daraus auch die Aenderungen der Neigungen und der Knoten der Bahnen von m″, m‴... gegen die Bahn von m erhalten.

§. 6.

Es gibt aber noch eine andere sehr merkwürdige Art, diese Gleichungen der säculären Störungen zu finden. Zu diesem Zwecke wollen wir die Ellipse betrachten, welche durch den Planeten und durch das Element der Curve geht, die er in einem gegebenen Augenblicke beschreibt. Diese Curve wird also die Ellipse seyn, welche der Planet immer beschreiben würde, wenn keine äusseren störenden Kräfte auf ihn wirkten. Die Elemente dieser Ellipse sind daher während einem Augenblicke dt als constant zu betrachten, aber durch die störenden Kräfte werden sie von einem Augenblicke zu dem anderen geändert. Sey also V = o eine endliche Gleichung für die unveränderliche Ellipse, wo V eine Funktion der rechtwinklichten Coordinaten x y z und der constanten Parametern c, c′... ist, welche Parameter selbst wieder Funktionen der elliptischen Elemente sind. Diese Gleichung V = o wird offenbar auch für die veränderliche Ellipse gelten, aber dann werden die Parameter c c′.. nicht mehr constant seyn. Da indessen diese Ellipse für das Element der Curve, die der Planet während dem Augenblicke dt beschreibt, gehört, so wird die Gleichung V = o auch noch für den ersten und letzten Punkt dieses Elements gehören, wenn man c c′... als constant betrachtet. Man kann daher diese Gleichung einmahl so differentiiren, indem man bloſs die Gröſsen x y z als veränderlich annimmt, wodurch man erhält

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz = o \ldots (I)$$

Daraus folgt also, daſs jede endliche Gleichung der unveränderlichen Ellipse, wenn man sie einmahl und so differentiirt, daſs

die Parameter derselben als constant vorausgesetzt werden, dann auch für die veränderliche Ellipse gehört. Ueberhaupt hat jede Differentialgleichung der ersten Ordnung für die unveränderliche Ellipse auch zugleich für die veränderliche Ellipse statt, denn ist U = o eine solche erste Differentialgleichung der unveränderlichen Ellipse, wo also U eine Funktion von x y z, von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ und von c c'... ist, so sind offenbar alle diese Größen x, $\frac{dx}{dt}$, c... dieselben für die unveränderliche und für die veränderliche Ellipse, da beyder Elemente, und nur von denen ist bey den ersten Differentialgleichungen die Rede, während dem Augenblicke dt zusammen fallen.

Betrachten wir jetzt den Planeten am Ende des ersten Augenblickes dt, oder am Anfange des nächstfolgenden Augenblickes, so ändert sich die Funktion V von der unveränderlichen zur veränderlichen Ellipse während der Zeit dt bloſs in Beziehung auf die Parameter, weil die Coordinaten x y z am Ende des ersten Augenblickes dieselben für beyde Ellipsen sind, daher die Gleichung V = o in folgende übergeht

$$\left(\frac{dV}{dc}\right) dc + \left(\frac{dV}{dc'}\right) dc' + \ldots = o \;\ldots\; \text{(II)}$$

und man sieht, daſs man diese Gleichung (II) auch unmittelbar aus der Gleichung V = o ableiten kann, wenn man in der letzten alle Gröſsen x y z und c c'... zugleich ändert, denn wenn man von dem so erhaltenen Differential die Gleichung (I) abzieht, so hat man wieder die Gleichung (II)

Betrachten wir überhaupt irgend eine erste Differentialgleichung U = o, die nach dem Vorhergehenden, für beyde Ellipsen gehört, da sie in ihren Elementen während dem Augenblicke dt zusammen fallen. In dem nächstfolgenden Augenblicke gehört diese Gleichung zwar auch noch beyden Ellipsen, aber mit dem Unterschiede, daſs die Gröſsen c c'... für die unveränderliche Ellipse dieselben bleiben, während sie für die veränderliche Ellipse wachsen oder abnehmen. Es gehe die Gröſse U über in U' für die unveränderliche, und in U'' für die veränderliche Ellipse, so ist klar, daſs man, um U' zu erhalten, die Coordinaten x y z, die für den Anfang des ersten Augenblickes dt gehören, in diejenigen verwandeln muſs, die für den Anfang des nächstfolgenden Augenblickes gehören, und daſs man dann noch die ersten Differentialien dx, dy, dz um die Gröſsen d^2x, d^2y, d^2z vermehren muſs, welche letzten ebenfalls zur unveränderlichen Ellipse gehören. Eben so wird man, um U'' zu erhalten, in der Gröſse U erstens die Coordinaten x y z in diejenigen verwandeln, welche für den Anfang des zweyten Augenblickes gehören, und

die in beyden Ellipsen dieselben sind; zweytens wird man die Gröſsen dx, dy, dz respektive um die Gröſse d^2x, d^2y, d^2z vermehren, wie zuvor, und endlich drittens die Parameter c, c'... in c + dc, c' + dc'... verwandeln. Aber diese letzten Werthe von d^2x, d^2y, d^2z sind nicht dieselben für beyde Ellipsen, sondern sie sind, für die veränderliche Ellipse, noch um die Gröſsen vermehrt, welche den äuſseren, störenden Kräften angehören. Man sieht so, daſs die zwey Funktionen U' und U'' nur darin verschieden sind, daſs in der zweyten die Parameter c, c'... um dc, dc' wachsen, und daſs die Werthe von d^2x, d^2y, d^2z, welche für die unveränderliche Ellipse gehören, hier um die Gröſsen vermehrt sind, die von den störenden Kräften kommen. Man wird daher die Gröſse U'' — U' erhalten, wenn man die Gröſse U so differentiirt, daſs x y z constant und dx dy dz so wie c c'... veränderlich vorausgesetzt werden, und wenn man überdieſs in dem so erhaltenen Differentiale statt d^2x, d^2y, d^2z diejenigen Theile ihrer Werthe substituirt, welche allein den störenden Kräften angehören.

§. 7.

Nehmen wir, um das Vorhergehende anzuwenden, die Gleichungen (A) des §. 1. Cap. IX wieder vor,

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \left(\frac{dR}{dx}\right) \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} + \left(\frac{dR}{dy}\right) \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right) \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

Setzt man in ihnen die von der Störung des Körpers m' abhängende Gröſse R gleich Null, so erhält man die drey Gleichungen des Cap. VII §. 4. I, also auch alle die an jenem Orte aus diesen drey Gleichungen hergeleiteten Ausdrücke (a), (b), (c)...

Dieses vorausgesetzt, geben die drey ersten der dort gefundenen Gleichungen (a), wenn man sie in Beziehung auf die Constanten c c' c'' und auf dx dy dz differentiirt,

$$dc = \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt}, \quad dc' = \frac{x\,d^2z - z\,d^2x}{dt}, \quad dc'' = \frac{y\,d^2z - z\,d^2y}{dt}$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken für d^2x, d^2y, d^2z, nach dem oben Gesagten, bloſs diejenigen Theile ihrer Werthe, die den störenden Kräften angehören, das heiſst, die Gröſsen

$$-\left(\frac{dR}{dx}\right)dt^2, \; -\left(\frac{dR}{dy}\right)dt^2, \; -\left(\frac{dR}{dz}\right)dt^2,$$

so erhält man

$$\frac{dc}{dt} = y\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\left(\frac{dR}{dy}\right),\ \frac{dc'}{dt} = z\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\left(\frac{dR}{dz}\right),$$

$$\frac{dc''}{dt} = z\left(\frac{dR}{dy}\right) - y\left(\frac{dR}{dz}\right)$$

und diese Gleichungen werden also, nach §. 6. für die veränderliche Ellipse gehören.

§. 8.

Ganz eben so wollen wir nun auch die drey folgenden der Gleichungen (a) in Beziehung auf die Constanten $f\ f'\ f''$ und auf $dx\ dy\ dz$ differentiiren, und dann wieder $d^2x = -\left(\frac{dR}{dx}\right) dt$ u. s. w. setzen. Bemerken wir aber zuvor, daſs die Gröſsen c' und c'' nach den Gleichungen (c) die Neigung von m über der fixen Ebene bestimmen, und daſs also jene Gröſsen Null sind, wenn diese Neigung Null ist, und daſs überdieſs die Gröſse $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ von der Ordnung dieser Neigung, also, für unsere Veraussetzung ebenfalls gleich Null ist. Da endlich nach der Gleichung (b) der Werth von $f'' = \frac{f'c' - fc''}{c}$ also für $c' = c'' = 0$, auch $f'' = 0$ ist, so haben wir nur die Werthe von df und df' zu suchen. Differentiirt man also den oben gegebenen Werth von

$$f = -\frac{\mu x}{r} + \frac{x\,dy^2}{dt^2} - \frac{y\,dy\,dx}{dt^2}$$

bloſs in Beziehung auf f und dx, dy, so ist

$$df = \frac{2x\,dy\,d^2y - y\,dx\,d^2y - y\,dy\,d^2x}{dt^2}$$

oder wenn man die vorhergehenden Werthe von d^2x, d^2y substituirt

$$df = dy\left\{y\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\left(\frac{dR}{dy}\right)\right\} + (y\,dx - x\,dy)\left(\frac{dR}{dy}\right)$$

und eben so

$$df' = dx\left\{x\left(\frac{dR}{dy}\right) - y\left(\frac{dR}{dx}\right)\right\} + (x\,dy - y\,dx)\left(\frac{dR}{dx}\right)$$

Es sey wieder $x = r \operatorname{Cos} v$ und $y = r \operatorname{Sin} v$, also auch

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ und } \operatorname{tg} v = \frac{y}{x}, \text{ so ist}$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right) = \text{Cos}\,\nu \text{ und } \left(\frac{d\nu}{dx}\right) = -\frac{1}{r}\,\text{Sin}\,\nu$$

$$\left(\frac{dr}{dy}\right) = \text{Sin}\,\nu, \quad \left(\frac{d\nu}{dy}\right) = \frac{1}{r}\,\text{Cos}\,\nu$$

also auch

$$\left(\frac{dR}{dx}\right) = \left(\frac{dR}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right) + \left(\frac{dR}{d\nu}\right)\left(\frac{d\nu}{dx}\right)$$

$$= \left(\frac{dR}{dr}\right)\text{Cos}\,\nu - \left(\frac{dR}{d\nu}\right)\frac{\text{Sin}\,\nu}{r} \text{ und}$$

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left(\frac{dR}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right) + \left(\frac{dR}{d\nu}\right)\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$

$$= \left(\frac{dR}{dr}\right)\text{Sin}\,\nu + \left(\frac{dR}{d\nu}\right)\frac{\text{Cos}\,\nu}{r} \text{ und endlich}$$

$$x\left(\frac{dR}{dy}\right) - y\left(\frac{dR}{dx}\right) = \left(\frac{dR}{d\nu}\right)$$

Substituirt man diese Werthe in den vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$df = -\left(\frac{dR}{d\nu}\right)dy - c\,dt\left[\left(\frac{dR}{dr}\right)\text{Sin}\,\nu + \left(\frac{dR}{d\nu}\right)\frac{\text{Cos}\,\nu}{r}\right]$$

$$df' = \left(\frac{dR}{d\nu}\right)dx + c\,dt\left[\left(\frac{dR}{dr}\right)\text{Cos}\,\nu - \left(\frac{dR}{d\nu}\right)\frac{\text{Sin}\,\nu}{r}\right]$$

Es ist aber $dx = dr\,\text{Cos}\,\nu - r\,d\nu\,\text{Sin}\,\nu$ und $dy = dr\,\text{Sin}\,\nu + r\,d\nu\,\text{Cos}\,\nu$, und die von dem Radius Vector r in der Zeit t beschriebene Fläche doppelt genommen ist gleich $x\,dy - y\,dx$ oder gleich $c\,dt$, oder endlich gleich $r^2\,d\nu$, so dafs man also hat

$$df = -(dr\,\text{Sin}\,\nu + 2r\,d\nu\,\text{Cos}\,\nu)\,.\left(\frac{dR}{d\nu}\right) - r^2\,d\nu\,\text{Sin}\,\nu\,.\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

$$df' = (dr\,\text{Cos}\,\nu - 2r\,d\nu\,\text{Sin}\,\nu)\,.\left(\frac{dR}{d\nu}\right) + r^2\,d\nu\,\text{Cos}\,\nu\,.\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

Es ist aber, wenn w die Länge des Periheliums bezeichnet, die Gleichung der Ellipse

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1 + e\,\text{Cos}\,(\nu - w)}$$

oder wenn man blofs auf die erste Potenz von e Rücksicht nimmt $r = a\,(1 - e\,\text{Cos}\,(\nu - w))$, und nach den Gleichungen II. Th. p. 42,

wenn $dm = ndt$ ist, $r^2 d\nu = a^2 ndt$ und $dr = andt . e \sin (\nu - w)$, so dafs die vorhergehenden Werthe von df und df′ in folgende übergehen

$$df = -andt \left\{ 2 \cos \nu + \frac{3e}{2} \cos w + \frac{e}{2} \cos (2\nu - w) \right\} \left(\frac{dR}{d\nu}\right)$$

$$- a^2 n\, dt \sin \nu . \left(\frac{dR}{dr}\right)$$

$$df' = -andt \left\{ 2 \sin \nu + \frac{3e}{2} \sin w + \frac{e}{2} \sin (2\nu - w) \right\} \left(\frac{dR}{d\nu}\right)$$

$$+ a^2 ndt \cos \nu . \left(\frac{dR}{dr}\right)$$

und man sieht, dafs man den Werth von df′ erhält, wenn man in df die Winkel ν und w in $\nu - 90$ und $w - 90$ verwandelt.

I. Um aber die Werthe von $\left(\frac{dR}{d\nu}\right)$ und $\left(\frac{dR}{dr}\right)$ zu erhalten, wollen wir den Werth von R wieder vornehmen, welchen wir Cap. IX §. 4. Nr. 1 gefunden haben. Aus ihm folgt so fort

$$\left(\frac{dR}{d\nu}\right) \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dR}{d\,.\,nt}\right) = \frac{m'}{2} \Sigma \varkappa A^{(\varkappa)} \sin \varkappa (l' - l)$$

$$- \frac{m'}{2} \Sigma \left\{ a \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) + 2 \varkappa A^{(\varkappa)} \right\} e (\varkappa - 1) \sin (\varkappa (l' - l) + l - w)$$

$$- \frac{m'}{2} \Sigma \left\{ a' \left(\frac{dA^{(\varkappa - 1)}}{da'}\right) - 2 (\varkappa - 1) A^{(\varkappa - 1)} \right\} . e' (\varkappa - 1) \sin (\varkappa (l' - l) + l - w')$$

Es ist aber, wenn man nur auf die ersten Potenzen von e Rücksicht nimmt,

$\cos \nu = \cos (l + \nu_{\prime}) = \cos l - \nu_{\prime} \sin l = \cos l + e \cos (2l - w) - e \cos w$ und $e \cos (2\nu - w) = e \cos (2l - w)$, also der Coefficient von $\left(\frac{dR}{d\nu}\right)$ für df gleich $2 \cos l - \frac{e}{2} \cos w + \frac{5e}{2} \cos (2l - w)$. Da dieser Coefficient den Winkel l′ nicht enthält, so werden die Glieder $\left(\frac{dR}{d\nu}\right)$, welche diesen Winkel enthalten, ihn auch nach der Multiplication durch diesen Coefficienten enthalten, und also nicht constant seyn können. Wir wollen aber hier nur die

constanten Glieder von df suchen, und werden daher von $\left(\frac{dR}{d\nu}\right)$ nur diejenigen behalten, in welchen sich l′ nicht findet, das heifst diejenigen, die aus der Voraussetzung $\varkappa = o$ entspringen, so dafs man hat

$$\left(\frac{dR}{d\nu}\right) = \frac{m'}{2} \Sigma \varkappa A^{(\varkappa)} \operatorname{Sin} \varkappa (l'-l) + \frac{m'}{2} a . \frac{dA^{(o)}}{da} . e \operatorname{Sin} (l-w)$$

$$+ \frac{m'}{2} \left[a' \frac{dA^{(1)}}{da'} + 2A^{(1)}\right] . e' \operatorname{Sin} (l-w')$$

oder wenn man, uach Cap. IX. §. 5. I,

$$\frac{dA^{(1)}}{da'} = - A^{(1)} - a \left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) \text{ setzt,}$$

$$\left(\frac{dR}{d\nu}\right) = \frac{m'}{2} \Sigma \varkappa A^{(\varkappa)} \operatorname{Sin} \varkappa (l'-l) + \frac{m'}{2} a . \frac{dA^{(o)}}{da} . e \operatorname{Sin} (l-w)$$

$$+ \frac{m'}{2} \left[A^{(1)} - a \left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)\right] e' \operatorname{Sin} (l-w')$$

Multiplicirt man nun $\left(\frac{dR}{d\nu}\right)$ mit seinem oben gegebenen Coefficienten, wobey man nur auf die constanten Glieder des Produktes Rücksicht nimmt, so sieht man, dafs die Glieder $\frac{5e}{2} \operatorname{Cos} (2l-w)$ und $-\frac{e}{2} \operatorname{Cos} w$ jenes Coefficienten kein constantes Glied des Produktes geben, so dafs man hat

$$2 \left(\frac{dR}{d\nu}\right) \operatorname{Cos} l = m' \Sigma \varkappa A^{(\varkappa)} \operatorname{Sin} (\varkappa (l'-l) + l) - \frac{m'}{2} a \frac{dA^{(o)}}{da} . e \operatorname{Sin} w$$

$$- \frac{m'}{2} \left[A^{(1)} - a \frac{dA^{(1)}}{da}\right] . e' \operatorname{Sin} w'$$

welcher Ausdruck noch durch $-$ an dt multiplicirt werden mufs, um den ersten Theil von df zu erhalten. Um auch den zweyten Theil von df zu finden, wollen wir denselben Werth von R in Beziehung auf a differentiiren, und auch hier bey den letzten Gliedern $\varkappa = o$ setzen, weil nur diese Voraussetzung beständige Glieder des Produktes geben kann. Man erhält so

$$\left(\frac{dR}{da}\right) = \frac{m'}{2} \Sigma \frac{dA^{(\varkappa)}}{da} . \operatorname{Cos} \varkappa (l'-l)$$

$$-\frac{m'}{2}\left\{a \frac{d^2A^{(o)}}{da^2} + \frac{dA^{(o)}}{da}\right\} e \operatorname{Cos} (l-w)$$

$$-\frac{m'}{2}\left\{a' \frac{d^2A^{(1)}}{da\, da'} + 2 \frac{dA^{(1)}}{da}\right\} e' \operatorname{Cos} (l-w')$$

oder da, nach Cap. IX. §. 5. I,

$$a' \left(\frac{d^2A'}{da\, da'}\right) = -2 \frac{dA^{(1)}}{da} - a \frac{d^2A^{(1)}}{da^2} \text{ ist,}$$

$$\left(\frac{dR}{da}\right) = \frac{m'}{2} \Sigma \frac{dA^{(\varkappa)}}{da} \operatorname{Cos} \varkappa (l'-l)$$

$$-\frac{m'}{2}\left\{a \frac{d^2A^{(o)}}{da} + \left(\frac{dA^{(o)}}{da}\right)\right\} e \operatorname{Cos} (l-w)$$

$$+\frac{m'}{2} . a \left(\frac{d\ A^{(1)}}{da^2}\right) . e' \operatorname{Cos} (l-w')$$

Es ist aber $\operatorname{Sin} v = \operatorname{Sin}(l + v_{\prime}) = \operatorname{Sin} l + v_{\prime} . \operatorname{Cos} l$ oder

$$\operatorname{Sin} v = \operatorname{Sin} l + e \operatorname{Sin} (2\,l - w) - e \operatorname{Sin} w,$$

und überdieſs nach Cap. IX. §. 4. II.

$$\left(\frac{dR}{dr}\right) = \frac{a}{r}\left(\frac{dR}{da}\right) = [1 + e \operatorname{Cos} (l-w)] \left(\frac{dR}{da}\right)$$

also auch das gesuchte Produkt

$$\operatorname{Sin} v . \left(\frac{dR}{dr}\right) = \frac{m'}{2} \Sigma \frac{dA^{(\varkappa)}}{da} \operatorname{Sin} (\varkappa (l'-l) + l)$$

$$-\frac{m'}{4}\left\{a \frac{d^2A^{(o)}}{da} + \frac{dA^{(o)}}{da}\right\} e \operatorname{Sin} w + \frac{m'}{4} . a . \frac{d^2A^{(1)}}{da^2} . e' \operatorname{Sin} w'$$

welcher Ausdruck noch durch $-a^2 n\, dt$ multiplicirt werden muſs, um den gesuchten zweyten Theil von df zu haben. Sammelt man also beyde Theile, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$df = \frac{a m' n dt}{2} . e \operatorname{Sin} w . \left\{ a \frac{dA^{(o)}}{da} + \frac{a^2}{2} \frac{d^2 A^{(o)}}{da^2} \right\}$$

$$+ a m' n dt . e' \operatorname{Sin} w' . \left\{ \tfrac{1}{2} A^{(1)} - \frac{a}{2} \frac{dA^{(1)}}{da} - \frac{a^2}{4} \frac{d^2 A^{(1)}}{da^2} \right\}$$

$$- a m' n dt . \Sigma \left\{ \varkappa A^{(\varkappa)} + \frac{a}{2} \frac{dA^{(\varkappa)}}{da} \right\} . \operatorname{Sin} (\varkappa (l' - l) + l)$$

und wenn man nach der oben gegebenen Bemerkung die Winkel von l und w in diesem Ausdrucke von df vermindert, so ist auch

$$df' = - \frac{a m' n dt}{2} . e \operatorname{Cos} w \left\{ a \frac{dA^{(o)}}{da} + \frac{a^2}{2} \frac{d^2 A^{(o)}}{da^2} \right\}$$

$$- a m' n dt . e' \operatorname{Cos} w' \left\{ \tfrac{1}{2} A^{(1)} - \frac{a}{2} \frac{dA^{(1)}}{da} - \frac{a^2}{4} \frac{d^2 A^{(1)}}{da^2} \right\}$$

$$+ a m' n dt . \Sigma \left\{ \varkappa A^{(\varkappa)} + \frac{a}{2} \frac{dA^{(\varkappa)}}{da} \right\} \operatorname{Cos} (\varkappa (l' - l) + l)$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den in §. 2. eingeführten Werthen von φ^1_o und ψ^1_o und setzt man der Kürze wegen das letzte Glied von df gleich X, und das letzte Glied von df' gleich Y, so ist

$$df = - e dt \operatorname{Sin} w . \varphi^1_o + e' dt \operatorname{Sin} w' . \psi^1_o - X$$

$$dt' = + e dt \operatorname{Cos} w . \varphi^1_o - e' dt \operatorname{Cos} w' . \psi^1_o + Y$$

II. Es war aber Cap. VII. §. 4., $\operatorname{tg} w = \frac{f'}{f}$ also auch

$\operatorname{Sin} w = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}}$ und $\operatorname{Cos} w = \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}}$. Weiter war eben dort das Verhältniſs der Excentricität zur halben groſsen Achse

$$e = \frac{1}{\mu} . \sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2} \text{ oder da hier } f'' = o \text{ ist,}$$

$e = \frac{1}{\mu} . \sqrt{f^2 + f'^2}$, also auch $\mu \, e \operatorname{Sin} w = f'$ und $\mu \, e \operatorname{Cos} w = f$.

Differentiirt man die beyden letzten Gleichungen, so ist

$\mu^2 . e\,de = fdf + f'df'$ und $\mu^2 . e^2\,dw = fdf' - f'df$ oder auch wenn man $\mu = 1$ setzt,

$de = df . \text{Cos}\,w + df' . \text{Sin}\,w$ und $e\,dw = df' . \text{Cos}\,w - df . \text{Sin}\,w$

Substituirt man in den beyden letzten Gleichungen die in I gefundenen Werthe von df und d'f', so erhält man, wenn man blofs auf die constanten Theile dieser Werthe sieht, oder X und Y gleich Null setzt,

$$\frac{de}{dt} = e' . \psi^1_0 \; \text{Sin}\,(w' - w) \text{ und}$$

$$\frac{dw}{dt} = \varphi^1_0 - \frac{e'}{e} . \psi^1_0 \; \text{Cos}\,(w' - w)$$

welche Gleichungen die säkulären Veränderungen von e und w geben, und mit den schon im §. 3. erhaltenen identisch sind.

§. 9.

Um eben so die säkulären Veränderungen der Neigung und der Länge der Knoten zu finden, wollen wir wieder die drey letzten Gleichungen des §. 7. vornehmen. Substituirt man in ihnen den Werth von R aus Cap. IX §. 1., und setzt der Kürze wegen

$$M = \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

so erhält man

$$\frac{dc}{dt} = m' M . (x'y - xy'), \quad \frac{dc'}{dt} = m' M . (x'z - xz'),$$

$$\frac{dc''}{dt} = m' M . (y'z - z'y)$$

Bezeichnet aber, wie in §. 2. I, φ und ϑ die Neigung und die Länge des Knotens, und setzt man, wie dort, $\text{tg}\,\varphi = \sqrt{p^2 + q^2}$ und $\text{tg}\,\vartheta = \frac{p}{q}$ und überdiefs $\frac{c''}{c} = p$ und $\frac{c'}{c} = q$, so hat man (Cap. VII. §. 4. Gleichung (d))

$z = qy - px$, und wenn für den störenden Planeten m' die Gröfsen pq in p'q' übergehen, eben so $z' = q'y' - p'x'$.

Diese Werthe von p und q geben aber

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dc'' - p\,dc}{c\,dt} \text{ und } \frac{dq}{dt} = \frac{dc' - q\,dc}{c\,dt}$$

oder wenn man die vorhergehenden Ausdrücke von $\frac{dc}{dt}$, $\frac{dc'}{dt}$, $\frac{dc''}{dt}$ substituirt

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m'}{c} M. [(q - q') yy' + (p' - p) x'y]$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m'}{c} M. [(p' - p) xx' + (q - q') xy']$$

Setzt man aber, wie zuvor,

$$x = r \operatorname{Cos} \nu, \; y = r \operatorname{Sin} \nu, \; x' = r' \operatorname{Cos} \nu \; . \; . \; . \text{ so ist}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m'M}{2c} \begin{Bmatrix} (q' - q) \, rr' \, [\operatorname{Cos} (\nu' + \nu) - \operatorname{Cos} (\nu' - \nu)] \\ + (p' - p) \, rr' \, [\operatorname{Sin} (\nu' + \nu) - \operatorname{Sin} (\nu' - \nu)] \end{Bmatrix}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m'M}{2c} \begin{Bmatrix} (p' - p) \, rr' \, [\operatorname{Cos} (\nu' + \nu) + \operatorname{Cos} (\nu' - \nu)] \\ + (q - q') \, rr' \, [\operatorname{Sin} (\nu' + \nu) + \operatorname{Sin} (\nu' - \nu)] \end{Bmatrix}$$

Um in diesen beyden Ausdrücken den Werth von M zu erhalten, hat man, wenn man die Excentricitäten und Neigungen vernachlässiget

$$r = a \qquad \text{und} \qquad r' = a'$$

$$\nu = nt + \varepsilon \qquad\qquad \nu' = n't + \varepsilon'$$

also wenn wieder $\vartheta = (n't + \varepsilon') - (nt + \varepsilon)$ ist,

$$M = \frac{1}{a'^3} - \frac{1}{[a^2 - 2aa' \operatorname{Cos} \vartheta + a'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

das heifst, nach Cap. VIII. §. 4. I.

$$M = \frac{1}{a'^3} - \tfrac{1}{2} \Sigma . B^{(\varkappa)} \operatorname{Cos} \varkappa \vartheta$$

Substituirt man diesen Werth von M in den vorhergehenden Ausdrücken von dp und dq, so sieht man, dafs alle Glieder dieser Ausdrücke periodisch werden, bis auf diejenigen, welche für $\varkappa = -1$ gehören, und die allein constant sind. Nennt man also, wie in §. 8., P und Q die periodischen Theile von $\frac{dp}{dt}$ und von $\frac{dq}{dt}$, so erhält man, da $B^{(-1)} = B^{(1)}$ ist,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(q' - q)}{4c'} . m' aa' B^{(1)} + P$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{(p - p')}{4c} . m' aa' B^{(1)} + Q$$

Vernachlässiget man aber die Quadrate der Excentricitäten und der Neigungen, so ist (Cap. VII §. 4.) $c = \sqrt{\mu a}$ und $\mu = n^2 a^3$, also auch, wenn $\mu = 1$ gesetzt wird, $c = \frac{1}{an}$, und daher, wenn wieder, wie in §. 4., $\varphi_0^1 = \frac{m' n a^2 a'}{4} B^{(1)}$ gesetzt wird, und wenn die periodischen Gröſsen P Q weggelassen werden,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= (q'-q) \cdot \varphi_0^1 \\ \frac{dq}{dt} &= (p-p') \cdot \varphi_0^1 \end{aligned}\right\}$$

welche Ausdrücke mit denen des §. 4. identisch sind.

§. 10.

Wir haben bisher die säkulären Aenderungen der Excentricität, der Neigung, und der Länge des Periheliums und der Knoten bestimmt. Um nun auch die Aenderungen der groſsen Achse zu betrachten, so hat man durch die erste der Gleichungen (a) des §. 2.,

$$\frac{dn}{dt} = 0$$

woraus folgt, daſs die mittlere Bewegung n, und also auch die halbe groſse Achse der Bahn oder die Gröſse a, die mit der mittleren Bewegung durch die Gleichung $\mu = n^2 a^3$ verbunden ist, keiner säculären Aenderung durch die Störungen aller anderen Planeten unterworfen ist. Dieses Resultat ist von der gröſsten Wichtigkeit für die Erhaltung des Ganzen, da, wie man leicht sieht, jede immer fortgehende Aenderung dieses Elementes auf die Dauer des Systemes einen wesentlichen Einfluſs hat, und nothwendig einmahl entweder eine gänzliche Zerstörung, oder doch eine völlige Umänderung des Systemes zur Folge haben würde.

I. Man kann dasselbe merkwürdige Resultat noch auf folgende einfache Weise erhalten. Die Gleichung (B) des Cap. IX. war

$$0 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int dR$$

Allein die Gleichung (a) des Cap. VII. §. 4. gibt für die ungestörte Ellipse

$$0 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a}$$

Differentiirt man diese Gleichung blofs in Beziehung auf a und dx, dy, dz, so erhält man, wenn man, wie zu Ende des §. 7. die Werthe von d^2x, d^2y, d^2z substituirt, $o = \frac{\mu\, da}{a^2} + 2\, dR$, also ist auch, wenn man von dieser Gleichung das Integral nimmt,

$$\frac{\mu}{a} = 2 \int dR$$

Da aber der Cap. IX §. 4. II gegebene Ausdruck von $2 \int dR$ offenbar keine constanten, sondern blofs periodische Glieder enthält, so kann dieser Ausdruck von $2 \int dR$, und daher auch der von a keine in t multiplicirten Glieder enthalten, oder die Störungen von a sind nur periodisch, aber nicht mit der Zeit fortgehend.

§. 11.

Wir wollen die säkulären Störungen der Elemente der Bahnen noch auf eine andere merkwürdige Art bestimmen.

Es war §. 7. $\frac{dc}{dt} = y \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \left(\frac{dR}{dy}\right)$

also auch nach §. 8., $\frac{dc}{dt} = - \left(\frac{dR}{d\nu}\right)$.

In diesen Ausdrücken ist $c = \frac{x\, dy - y\, dx}{dt}$.

Aber nach Cap. VII, §. 4. ist $\frac{x\, dy - y\, dx}{dt} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$,

also ist auch $c = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$ und dessen Differential

$$dc = \frac{da \sqrt{\mu a (1 - e^2)}}{2a} - \frac{e\, de \,.\, \sqrt{\mu a}}{\sqrt{1 - e^2}},$$

also auch, wenn man diesen Werth von dc in der vorigen Gleichung substituirt

$$e\, de = \frac{an\, dt \sqrt{1 - e^2}}{\mu} \,.\, \left(\frac{dR}{d\nu}\right) + a (1 - e^2) .\, \frac{da}{2 a^2}$$

oder, da nach §. 10. $da = - \frac{2 a^2\, dR}{\mu}$ ist,

$$e\, de = \frac{an\, dt \,.\, \sqrt{1 - e^2}}{\mu} \,.\, \left(\frac{dR}{d\nu}\right) - \frac{a (1 - e^2)\, dR}{\mu}$$

Da die Gröfse R in dem Vorhergehenden als eine Funktion von $v = \varepsilon + nt - w$ entwickelt worden ist, so wird man

$$\left(\frac{dR}{dv}\right) = \frac{dR}{n\,dt} + \left(\frac{dR}{dw}\right) \text{ haben,}$$

also ist auch die letzte Gleichung, wenn man gröfserer Einfachheit wegen $\mu = 1$ setzt,

$$de = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).dR + \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}.n\,dt.\left(\frac{dR}{dw}\right)$$

Weiter ist Th. II p. 42 . . $dv = \frac{a^2}{r^2}.dm\sqrt{1-e^2}$

wo m die mittlere Länge des Planeten bezeichnet.

Es ist aber $v = \varepsilon + nt - w$ also $dv = d\varepsilon + n\,dt - dw$. Betrachtet man aber in dm blofs die Aenderung des Periheliums, so ist $dm = n\,dt - dw = -dw$, also die vorhergehende Gleichung, wenn man der Kürze wegen $r = a$ setzt,

$$d\varepsilon + n\,dt - dw = -dw.\sqrt{1-e^2} \text{ oder}$$

$$d\varepsilon = dw\,(1-\sqrt{1-e^2}) - n\,dt$$

oder endlich, da (Cap. X §. 10) $\frac{da}{a^2} = -2\,dR$ ist,

$$d\varepsilon = dw\,(1-\sqrt{1-e^2}) + 2a^2\left(\frac{dB}{da}\right)n\,dt.$$

Ist dann ϖ die Neigung und ϑ die Länge des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn, so sey, wie in §. 2, $p = \text{tg}\,\varpi\,\text{Sin}\,\vartheta$, $q = \text{tg}\,\varpi\,\text{Cos}\,\vartheta$, also auch, wie in §. 10, $p = \frac{c''}{c}$, $q = \frac{c'}{c}$ und daher

$$d.\text{tg}\,\varpi = \frac{dc'\,\text{Cos}\,\vartheta + dc''\,\text{Sin}\,\vartheta - dc\,\text{tg}\,\varpi}{c}$$

$$\text{und} \quad d\vartheta.\text{tg}\,\varpi = \frac{dc''\,\text{Cos}\,\vartheta - dc'\,\text{Sin}\,\vartheta}{c}.$$

Ist s die Tangente der Breite des Planeten, so ist wie im §. 8, $x = r\,\text{Cos}\,v$, $y = r\,\text{Sin}\,v$ und $z = rs$, also auch

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dz}\right) + \left(\frac{dR}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dz}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{dR}{ds}\right)$$

Nach §. 7. ist aber

$$\frac{dc}{dt} = y\frac{dR}{dx} - x\frac{dR}{dy}, \frac{dc'}{dt} = z\frac{dR}{dx} - x\frac{dR}{dz}, \frac{dc''}{dt} = z\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dz}$$

also auch, wenn man alle die Glieder wegläſst, die schon in die sehr kleine Gröſse s multiplicirt sind, nach §. 8,

$$\frac{dc}{dt} = -\left(\frac{dR}{d\nu}\right), \frac{dc'}{dt} = -\text{Cos}\,\nu.\left(\frac{dR}{ds}\right), \frac{dc''}{dt} = -\text{Sin}\,\nu.\left(\frac{dR}{ds}\right)$$

und daher, wenn man diese Ausdrücke in dem vorhergehenden Werthen von $d.\text{tg}\,\omega$ und $d\vartheta.\text{tg}\,\omega$ substituirt,

$$d.\text{tg}\,\omega = -\left(\frac{dR}{ds}\right).\frac{dt}{c}.\text{Cos}\,(\nu - \vartheta),$$

$$d\vartheta.\text{tg}\,\omega = -\left(\frac{dR}{ds}\right).\frac{dt}{c}.\text{Sin}\,(\nu - \vartheta)$$

Es ist aber

$$dp = \text{Sin}\,\vartheta.d.\text{tg}\,\omega + d\vartheta.\text{tg}\,\omega\,\text{Cos}\,\vartheta$$

$$\text{und } dq = \text{Cos}\,\vartheta.d.\text{tg}\,\omega - d\vartheta.\text{tg}\,\omega\,\text{Sin}\,\vartheta$$

also auch

$$dp = -\left(\frac{dR}{ds}\right).\frac{dt}{c}.\text{Sin}\,\nu \text{ und } dq = -\left(\frac{dR}{ds}\right).\frac{dt}{c}.\text{Cos}\,\nu$$

Nach §. 9. ist aber $z = qy - px$ also auch $s = q\,\text{Sin}\,\nu - p\,\text{Cos}\,\nu$ und daher

$$\left(\frac{dR}{ds}\right)\text{Sin}\,\nu = \left(\frac{dR}{dq}\right) \text{ und } \left(\frac{dR}{ds}\right)\text{Cos}\,\nu = -\left(\frac{dR}{dp}\right)$$

$$\text{oder } dp = -\frac{dt}{c}.\left(\frac{dR}{dq}\right) \text{ und } dq = +\frac{dt}{c}.\left(\frac{dR}{dp}\right)$$

wo nach dem Vorhergehenden $c = \sqrt{a\,(1 - e^2)}$ ist.
Es ist aber, wie man leicht sieht, wenn man auf alle sechs Elemente Rücksicht nimmt

$$\left(\frac{dR}{da}\right)da + \left(\frac{dR}{de}\right)de + \left(\frac{dR}{dw}\right)dw + \left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)d\varepsilon$$

$$+ \left(\frac{dR}{dp}\right)dp + \left(\frac{dR}{dq}\right)dq = 0$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $da = -2a^2\,dR$ und, da in dem Werthe von R der Winkel nt immer von der Gröſse $+\varepsilon$ begleitet ist, auch $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right) = \left(\frac{dR}{n\,dt}\right)$, und substituirt man in ihr über-

dieſs die vorhin gefundenen Werthe von de, $d\varepsilon$, dp und dq, so erhält man

$$o = \left(\frac{dR}{dw}\right)dw + \left(\frac{dR}{de}\right)\left\{\frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}(1-\sqrt{1-e^2})dR + \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}.ndt.\left(\frac{dR}{dw}\right)\right\}$$

$$+ \left(\frac{dR}{ndt}\right).dw.(1-\sqrt{1-e^2}) \quad \text{oder}$$

$$o = \left[dw + andt.\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}.\left(\frac{dR}{de}\right)\right].\left\{\left(\frac{dR}{dw}\right) + \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{ndt}.dR\right\}$$

$$\text{also auch} \quad o = dw + \frac{andt.\sqrt{1-e^2}}{e}.\left(\frac{dR}{de}\right)$$

wodurch der Werth von dw bestimmt wird, und wenn man diesen in dem vorhergehenden Ausdruck von $d\varepsilon$ substituirt, so ist

$$d\varepsilon = -\frac{andt.\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\left(\frac{dR}{de}\right) + 2a^2\left(\frac{dR}{da}\right).ndt$$

Sammelt man alle vorhergehenden Gleichungen, so erhält man, da $n = a^{-\frac{3}{2}}$ ist,

$$\left.\begin{aligned}
da &= -2a^2.dR \\
d\varepsilon &= -\frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\left(\frac{dR}{de}\right) \\
&\quad + 2a^2\left(\frac{dR}{da}\right)ndt \\
de &= \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2})\,dR \\
&\quad + \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}.ndt.\left(\frac{dR}{dw}\right) \\
dw &= -\frac{andt.\sqrt{1-e^2}}{e}.\left(\frac{dR}{de}\right) \\
dp &= -\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}.\left(\frac{dR}{dq}\right) \\
dq &= +\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}.\left(\frac{dR}{dp}\right)
\end{aligned}\right\}\ldots (i)$$

Betrachtet man von der Gröfse R nur ihren nicht periodischen Theil, und nennt man diesen letzten $m'F$, so ist, da nach dem Vorhergehenden §. 10. die Gröfse a invariabel ist, $da = 0$, also auch $dR = 0$ und die Gleichungen (i) gehen in folgende über

$$\left.\begin{aligned}
d\varepsilon &= -\frac{am'n\,dt.\sqrt{1-e^2}}{e}.\left(1-\sqrt{1-e^2}\right).\left(\frac{dF}{de}\right) \\
&\quad + 2a^2\left(\frac{dF}{da}\right).m'n\,dt \\
de &= \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}.m'n\,dt.\left(\frac{dF}{dw}\right) \\
dw &= -\frac{am'n\,dt.\sqrt{1-e^2}}{e}.\left(\frac{dF}{de}\right) \\
dp &= -\frac{am'n\,dt}{\sqrt{1-e^2}}.\left(\frac{dF}{dq}\right) \\
dq &= +\frac{am'n\,dt}{\sqrt{1-e^2}}.\left(\frac{dF}{dp}\right)
\end{aligned}\right\}\ldots (k)$$

Auf diese Art sind also die sämmtlichen säkulären Störungen der Elemente der Planetenbahnen auf sehr einfache Ausdrücke zurückgebracht, die alle nur von den partiellen Differentialien derselben Gröfse R oder F in Beziehung auf diese Elemente genommen, abhängen.

§. 12.

Setzt man in den Gleichungen (b) des §. 2. statt n^2 die Gröfse $\frac{1}{a^3}$, so hat man

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m'}{4}(q'-q)\,B^{(1)}.a'\sqrt{a} \text{ und } -\frac{dq}{dt} = \frac{m'}{4}(p'-p)\,B^{(1)}.a'\sqrt{a}$$

Setzt man daher der Kürze wegen $N = \frac{B^{(1)}}{4}.aa' = \varphi^1_0.\frac{\sqrt{a}}{m'}$, so ist

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m'}{\sqrt{a}}.N(q'-q) \text{ und } -\frac{dq}{dt} = \frac{m'}{\sqrt{a}}.N(p'-p)$$

und eben so für den anderen Planeten

$$\frac{dp'}{dt} = \frac{m}{\sqrt{a'}}.N(q-q'), \quad -\frac{dq'}{dt} = \frac{m}{\sqrt{a'}}.N(p-p')$$

Die Integralien dieser vier letzten Gleichungen sind

$$\begin{cases} p = A \operatorname{Sin}(gt + k) + B \operatorname{Sin} k' \\ q = A \operatorname{Cos}(gt + k) + B \operatorname{Cos} k' \end{cases}$$

$$\begin{cases} p' = A' \operatorname{Sin}(gt + k) + B \operatorname{Sin} k' \\ q' = A' \operatorname{Cos}(gt + k) + B \operatorname{Cos} k' \end{cases}$$

wo $A B k k'$ vier willkührliche constante Gröſsen sind. Sucht man aus diesen vier Integralien die Werthe von dp, dp' . . und substituirt sie in den vier vorhergehenden Differential-Gleichungen, so erhält man folgende zwey Bedingungsgleichungen zwischen jenen constanten Gröſsen

$$Ag = \frac{m'}{\sqrt{a}} N(A' - A) \text{ und } A'g = \frac{m}{\sqrt{a'}} N(A - A')$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen den Werth von A, wodurch auch A' wegfällt, so erhält man

$$g^2 + g \left(\frac{m}{\sqrt{a'}} + \frac{m'}{\sqrt{a}}\right) N = 0$$

also ist entweder

$$g = 0 \text{ oder } g = -\frac{N(m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'})}{\sqrt{aa'}}$$

und wenn man den letzten Werth von g in einer der beyden vorhergehenden Gleichungen substituirt,

$$\frac{A'}{A} = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}$$

I. Um aus den erhaltenen vier Integralien die Gröſse $\operatorname{Sin}(gt + k)$ und $\operatorname{Cos}(gt + k)$ zu eliminiren, multiplicire man die erste dieser Gleichungen durch $m\sqrt{a}$, und die dritte durch $m'\sqrt{a'}$, so gibt die Summe beyder Produkte, wenn man bemerkt, daſs nach der letzten Bedingungsgleichung

$Am\sqrt{a} + A'm'\sqrt{a'} = 0$ ist, folgenden Ausdruck

$$\left.\begin{array}{l} mp\sqrt{a} + m'p'\sqrt{a'} = (m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}).B \operatorname{Sin} k' = \text{Const} \\ \text{und eben so} \\ mq\sqrt{a} + m'q'\sqrt{a'} = (m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}).B \operatorname{Cos} k' = \text{Const} \end{array}\right\} \ldots (B)$$

Setzt man nun wieder wie in §. 2.

$p = tg\,\omega \operatorname{Sin}\vartheta$, $q = tg\,\omega \operatorname{Cos}\vartheta$ und $p' = tg\,\omega' \operatorname{Sin}\vartheta'$, $q' = tg\,\omega' \operatorname{Cos}\vartheta'$,

so hat man

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha = p^2 + q^2 = (A^2 + B^2) + 2\,A\,B\,\mathrm{Cos}\,(gt + k - k') \text{ und}$$

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha' = p'^2 + q'^2 = (A'^2 + B^2) + 2\,A'B\,\mathrm{Cos}\,(gt + k - k')$$

und daher auch

$$m\sqrt{a}\,.\,\mathrm{tg}^2\,\omega + m'\sqrt{a'}\,.\,\mathrm{tg}^2\,\omega' = m\sqrt{a}\,.(A^2 + B^2)$$
$$+ m'\sqrt{a'}\,.(A'^2 + B^2) = \mathrm{Const}\ \ldots\ldots\ldots\ (C)$$

II. Um die Werthe der constanten Gröſsen A B k und k′ zu bestimmen, so geben die vorhergehenden vier Integralien

$$p' - p = (A' - A)\,\mathrm{Sin}\,(gt + k) \quad \text{und} \quad q' - q = (A' - A)\,\mathrm{Cos}\,(gt + k)$$

Nimmt man $t = o$, das heiſst, setzt man die Werthe der Elemente $\vartheta\ \omega$ und $\vartheta'\ \omega'$ für diese Epoche $t = o$ aus den Beobachtungen als bekannt voraus, so geben die beyden letzten Gleichungen

$$\mathrm{tg}\,k = \frac{p' - p}{q' - q} = \frac{\mathrm{tg}\,\omega'\,\mathrm{Sin}\,\vartheta' - \mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}{\mathrm{tg}\,\omega'\,\mathrm{Cos}\,\vartheta' - \mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{Cos}\,\vartheta}$$

Kennt man so den Werth von k, so findet man A und A′ aus den beyden Gleichungen

$$\frac{A'}{A} = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \text{ oder } A' - A = -\frac{A(m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}}\text{. oder}$$

$$A = -\frac{m'\sqrt{a'}\,.(p' - p)}{(m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'})\,\mathrm{Sin}\,k}$$

Die Division der beyden ersten Gleichungen in I gibt dann

$$\mathrm{tg}\,k' = \frac{m\sqrt{a}\,.\,\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{Sin}\,\vartheta + m'\sqrt{a'}\,.\,\mathrm{tg}\,\omega'\,\mathrm{Sin}\,\vartheta'}{m\sqrt{a}\,.\,\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + m'\sqrt{a'}\,.\,\mathrm{tg}\,\omega'\,\mathrm{Cos}\,\vartheta'} \quad \text{und}$$

$$B = \frac{m\sqrt{a}\,.\,\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{Sin}\,\vartheta + m'\sqrt{a'}\,.\,\mathrm{tg}\,\omega'\,\mathrm{Sin}\,\vartheta'}{(m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'})\,\mathrm{Sin}\,k'}$$

wodurch also auch k′ und B bekannt ist.

Wenn aber diese Constanten bekannt sind, so lassen sich daraus die Gesetze und die Gränzen der Bewegungen beyder Planetenbahnen leicht ableiten. Der Werth von g wird nun die Periode geben, in welcher diese Bewegungen enthalten sind. Wird t in Julianischen Jahren ausgedrückt, so bezeichnen auch die Gröſsen n und n′ die mittleren Bewegungen der Planeten m und m′ in Julianischen Jahren, und in Theilen der ganzen Peripherie,

$$\text{so daſs } n^2 a^3 = 1 \text{ also } \sqrt{a} = \frac{1}{n\,a} \text{ und } \sqrt{a'} = \frac{1}{n'\,a'}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\sqrt{a}$ und $\sqrt{a'}$ in dem obigen Ausdrucke von

$$g = -N\left(\frac{m}{\sqrt{a'}} + \frac{m'}{\sqrt{a}}\right), \text{ so erhält man } g = -N(m n' a' + m' n a).$$

Die Periode, in welcher die Neigungen sowohl als die Knotenlängen von ihrem gröſsten bis zu ihrem kleinsten Werthe übergehen, ist daher

$$T = \frac{360°}{g} = \frac{360}{N(m n a' + m' n a)}$$

wenn n und n' in Graden und Theilen von Graden ausgedrückt werden.

III. Um die Gränzen der Neigungen zu finden, so sieht man aus der vorletzten und vorvorletzten Gleichung in I, daſs die Werthe der Neigungen ω und ω' am gröſsten und kleinsten sind, wenn $gt + k - k' = 0$ oder $= 180$ ist, und daſs daher diese gröſsten und kleinsten Werthe selbst sind

$$\left.\begin{matrix} A + B \\ A' + B \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} A - B \\ A' - B \end{matrix}\right\}$$

Da aber aus den vier Integralien für p q p'q' des §. 11 erhellt, daſs A und B nur kleine Gröſsen von der Ordnung der Gröſsen p und q selbst sind, so folgt, daſs die Neigungen der Planetenbahnen immer in bestimmte und enge Gränzen eingeschlossen sind, welche sie nie übersteigen können, wie auch durch die Gleichung (C) bestätiget wird. Denn in dem gegenwärtigen Zustande unseres Sonnensystemes sind, wie die Beobachtungen zeigen, die Gröſsen tg ω und tg ω' nur klein, also ist auch die Gröſse $m\sqrt{a}\,.\,tg^2\,\omega + m'\sqrt{a'}\,.\,tg^2\,\omega'$ nur klein, und da von $\sqrt{a}$ und $\sqrt{a'}$ offenbar nur die positiven Werthe genommen werden müssen, weil $\sqrt{a} = \frac{1}{n\,a}$ und $\sqrt{a'} = \frac{1}{n'\,a'}$ und n n' für alle Planeten positiv ist, indem sie sich alle in derselben Richtung von West nach Ost bewegen, so kann keines der Glieder $m\sqrt{a}\,.\,tg^2\,\omega$, $m'\sqrt{a'}\,.\,tg^2\,\omega'$... gröſser seyn, als die Constante der letzten Gleichung in I. Da aber diese Constante jetzt nur eine kleine Gröſse ist, so müssen also auch die Werthe von φ und φ' für immer nur klein und nur wenig von denjenigen Werthen verschieden seyn, welche sie jetzt haben, oder die Neigungen der Planetenbahnen können nur in sehr engen Gränzen über und unter ihrer mittleren Lage auf und ab oscilliren.

IV. Anders verhält es sich in Beziehung auf die Knoten, deren Länge sehr groſse Aenderungen leiden und selbst, ohne periodisch wieder zukehren, die ganze Peripherie des Kreises in der-

selben Richtung durchlaufen können. Denn um die gröfsten und kleinsten Werthe der Knotenlängen zu finden, darf man nur $d\vartheta = 0$ und $d\vartheta' = 0$ setzen, und die Wurzeln dieser beyden Gleichungen werden den Gränzen angehören, welche die Knoten nicht übersteigen können, vorausgesetzt, dafs diese Wurzeln möglich sind. Sind sie aber imaginär, so werden die Knotenlängen keine solche Gränzen haben, oder immer in derselben Richtung fortgehen. Nun ist

$$d\vartheta = \frac{d \,.\, tg\, \vartheta}{1 + tg^2\, \vartheta} = 0 \text{ oder } d \,.\, tg\, \vartheta = 0 \text{ und da } tg\, \vartheta = \frac{p}{q} \text{ ist,}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \text{ oder } q\,\frac{dp}{dt} = p\,\frac{dq}{dt}$$

also auch, wenn man die Werthe von $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dq}{dt}$ aus §. 11 substituirt,

$$pp' + qq' = p^2 + q^2$$

und endlich, wenn man in diesem Ausdrucke die Werthe von pp' qq' aus den vier Integralien in §. 11 substituirt,

$$A + B \operatorname{Cos}(gt + k - k') = 0, \text{ woraus folgt}$$

$$\operatorname{Cos}(gt + k - k') = -\frac{A}{B}$$

Wenn man daher, ohne Rücksicht auf das Zeichen, $B > A$ hat, so wird auch t einen reellen Werth haben, und die Knoten werden blofs zwischen bestimmten Gränzen auf und ab oscilliren, wenn aber $B < A$ ist, so werden sie über alle Gränzen hinaus immer in derselben Richtung fortgehen. Substituirt man dann, für den ersten Fall, den gefundenen Werth von $\operatorname{Cos}(gt + k - k')$ in der vorvorletzten der Gleichungen I, so erhält man

$$tg\, \omega = \sqrt{B^2 - A^2}$$

welcher Ausdruck diejenige Neigung gibt, die der Gränze des Knotens entspricht. Diese Gränzpunkte der Knoten werden erreicht, wenn $\operatorname{Cos}(gt + k - k') = -\frac{A}{B}$ ist, während die Gränzen der Neigungen erreicht werden, wenn $\operatorname{Cos}(gt + k - k') = \pm 1$ ist, so dafs also die Gränzen der Knoten mit den Gränzen der Neigungen n i c h t zusammen fallen.

§. 13.

Wir wollen nun eben so die Aenderungen der Längen der Perihelien und der Excentricitäten suchen, und zu diesem Zwecke

die Grösen f' und f des §. 8. unserer früherer Annahme gemäss, durch h und l bezeichnen, so dass man hat

$$h = e \text{ Sin } w, \; l = e \text{ Cos } w, \; h' = e' \text{ Sin } w', \; l' = e' \text{ Cos } w'.$$

Setzt man dann, wie in §. 12. $N = \varphi_o^1 \cdot \frac{\sqrt{a}}{m'}$ und $M = \psi_o^1 \cdot \frac{\sqrt{a'}}{m'}$,

so sind die zwey letzten Gleichungen des §. 8. Nr. I

$$\frac{dh}{dt} = \frac{m'}{\sqrt{a'}} (N l - M l')$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{m'}{\sqrt{a'}} (N h - M h')$$

und eben so vermöge der letzten Gleichungen des §. 3

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{m}{\sqrt{a'}} (N l' - M l)$$

$$\frac{dl'}{dt} = -\frac{m}{\sqrt{a'}} (N h' - M h)$$

Die Integralien dieser vier Gleichungen sind aber

$$h = A \text{ Sin } (gt + k) + B \text{ Sin } (\gamma t + \varkappa)$$
$$l = A \text{ Cos } (gt + k) + B \text{ Cos } (\gamma t + \varkappa)$$
$$h' = A' \text{ Sin } (gt + k) + B' \text{ Sin } (\gamma t + \varkappa)$$
$$l' = A' \text{ Cos } (gt + k) + B' \text{ Cos } (\gamma t + \varkappa)$$

wo zwischen den Constanten A B g.. der Integration offenbar die folgenden vier Bedingungsgleichungen statt haben,

$$gA = \frac{m'}{\sqrt{a'}} (NA - MA') \text{ und } \gamma B = \frac{m'}{\sqrt{a'}} (NB - MB')$$

$$gA' = \frac{m}{\sqrt{a'}} (NA' - MA) \qquad \gamma B' = \frac{m}{\sqrt{a'}} . (NB' - MB)$$

Eliminirt man aus den beyden ersten die Grösse A', und aus den beyden letzten die Grösse B', so erhält man

$$g^2 - Ng . \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{\sqrt{aa'}} + \frac{mm'}{\sqrt{aa'}} (N^2 - M^2) = o \text{ und}$$

$$\gamma^2 - N\gamma . \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{\sqrt{aa'}} + \frac{mm'}{\sqrt{aa'}} (N^2 - M^2) = o$$

Kennt man so die Grösen g γ A B.. so ist die Excentricität

$$e = \sqrt{h^2 + l^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \,\mathrm{Cos}\,[(g-\gamma)t + k - \varkappa]}$$

und die Tangente der Länge w des Periheliums $\mathrm{tg}\, w = \frac{h}{l}$ oder

$$\mathrm{tg}\, w = \frac{A \,\mathrm{Sin}\,(gt + k) + B \,\mathrm{Sin}\,(\gamma t + \varkappa)}{A \,\mathrm{Cos}\,(gt + k) + B \,\mathrm{Cos}\,(\gamma t + \varkappa)}$$ und eben so

$$\mathrm{tg}\, w' = \frac{A' \,\mathrm{Sin}\,(gt + k) + B' \,\mathrm{Sin}\,(\gamma t + \varkappa)}{A' \,\mathrm{Cos}\,(gt + k) + B' \,\mathrm{Cos}\,(\gamma t + \varkappa)}$$

Für die Gränzen der Perihelien ist wieder $d.\mathrm{tg}\, w = 0$, das heifst, $l\,dh - h\,dl = 0$, woraus man, wie im §. 12. findet,

$$g A^2 + \gamma B^2 + AB(g+\gamma) \,\mathrm{Cos}\,[(g-\gamma)t + k - \varkappa] = 0$$

oder $$\mathrm{Cos}\,[(g-\gamma)t + k - \varkappa] = -\frac{(gA^2 + \gamma B^2)}{AB(g+\gamma)}$$

Ist also $gA^2 + \gamma B^2 < AB(g+\gamma)$, so oscilliren die Perihelien in bestimmten Gränzen auf und nieder; im entgegengesetzten Falle aber gehen sie ohne Ende in derselben Richtung fort.

Die Periode endlich, in welcher die Excentricität alle ihre Werthe durchläuft, bis sie wieder zu ihrer ersten Gröfse zurückkehrt, wird seyn

$$T = \frac{360}{g-\gamma}$$

und die gröfsten und kleinsten Werthe der Excentricität selbst sind für den einen Planeten $A \pm B$ und für den anderen $A' \pm B'$.

I. Aus den vorhergehenden Ausdrücken von $h\,l\,h'\,l'$.. lassen sich nun auch ähnliche Gleichungen zwischen $m a e$ und $m' a' e'$.. für die Excentricitäten ableiten, wie wir oben für die Neigungen gefunden haben. Denn da $e^2 = h^2 + l^2$ und $e'^2 = h'^2 + l'^2$, so hat man, wenn man die erste dieser beyden Gleichungen durch $m\sqrt{a}$, und die zweyte durch $m'\sqrt{a'}$ multiplicirt, und für $h\,l\,h'\,l'$ die oben gefundenen Werthe setzt, für die Summe dieser Produkte

$$m e^2 \sqrt{a} + m' e'^2 \sqrt{a'} = m(A^2 + B^2)\sqrt{a} + m'(A'^2 + B'^2)\sqrt{a'}$$
$$+ 2(m A B \sqrt{a} + m' A' B' \sqrt{a'}) \,\mathrm{Cos}\,[(g-\gamma)t + k - \varkappa]$$

Die vorhergehenden Bedingungsgleichungen geben aber

$$A\left(g - \frac{m'N}{\sqrt{a}}\right) = -A'.\frac{m'M}{\sqrt{a}}$$

$$B\left(\gamma - \frac{m'N}{\sqrt{a}}\right) = -B'.\frac{m'M}{\sqrt{a}}$$

$$\text{also auch } AB\left(g-\frac{m'N}{\sqrt{a}}\right)\left(\gamma-\frac{m'N}{\sqrt{a}}\right)=A'B'.\frac{m'^2M^2}{a}$$

und da g und γ die zwey Wurzeln der vorhergehenden beyden quadratischen Gleichungen für g und γ sind, so ist

$$g\gamma=\frac{mm'}{\sqrt{aa'}}(N^2-M^2) \text{ und } g+\gamma=N.\frac{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}{\sqrt{aa'}}$$

so daſs die gefundene Gleichung in folgende übergeht,

$$me^2\sqrt{a}+m'e'^2\sqrt{a'}=m(A^2+B^2)\sqrt{a}+m'(A'^2+B'^2)\sqrt{a'}$$

$$\text{oder } me^2\sqrt{a}+m'e'^2\sqrt{a'}=\text{Const.}$$

II. Zu derselben Gleichung kann man auch auf folgende einfache Art gelangen.

Stellt man die Werthe von N und M wieder her, so sind die vier ersten Gleichungen dieses §.

$$\frac{dh}{dt}=l\,\overset{1}{\underset{0}{\varphi}}-l'\overset{1}{\underset{0}{\psi}} \text{ und } \frac{dh'}{dt}=l'\,\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}-l\,\overset{0}{\underset{1}{\psi}}$$

$$\frac{dl}{dt}=-h\,\overset{1}{\underset{0}{\varphi}}+h'\overset{1}{\underset{0}{\psi}} \qquad \frac{dl'}{dt}=-h'\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}+h\,\overset{0}{\underset{1}{\psi}}$$

Multiplicirt man die erste durch $mh\sqrt{a}$, die zweyte durch $ml\sqrt{a}$, die dritte durch $m'h'\sqrt{a'}$, und die vierte durch $m'l'\sqrt{a'}$, und addirt diese Produkte, so sind die Coefficienten von h l und h′ l′ in dieser Summe gleich Null, und der Coefficient von $h'l-hl'$ ist $m\sqrt{a}.\overset{1}{\underset{0}{\psi}}-m'\sqrt{a'}.\overset{0}{\underset{1}{\psi}}$ also auch gleich Null, vermöge den letzten Gleichungen des §. 3, und die gesuchte Summe ist daher

$$\frac{h\,dh+l\,dl}{dt}.m\sqrt{a}+\frac{h'dh'+l'dl'}{dt}.m'\sqrt{a'}=0$$

oder da $e^2=h^2+l^2$ und $e'^2=h'^2+l'^2$ ist

$$e\,de.m\sqrt{a}+e'de'.m'\sqrt{a'}=0$$

Integrirt man diese Gleichung, und bemerkt, daſs nach dem Vorhergehenden die halben groſsen Achsen a a′ constant sind, so hat man

$$me^2\sqrt{a}+m'e'^2\sqrt{a'}=\text{Const, wie zuvor.}$$

Setzt man die vier Gleichungen, von welchen wir hier ausgegangen sind, auch auf die folgenden Planeten m″ m‴.. fort, so gehen sie, wie jene des §. 2. in folgende über

$$\frac{dh}{dt}=l(\overset{1}{\underset{0}{\varphi}}+\overset{2}{\underset{0}{\varphi}}+\overset{3}{\underset{0}{\varphi}}+)-l'\overset{1}{\underset{0}{\psi}}-l''\overset{2}{\underset{0}{\psi}}-l'''\overset{3}{\underset{0}{\psi}}-$$

$$\frac{dh'}{dt} = l'(\overset{0}{\underset{1}{\varphi}} + \overset{2}{\underset{1}{\varphi}} + \overset{3}{\underset{1}{\varphi}} +) - l\,\overset{0}{\underset{1}{\psi}} - l''\,\overset{2}{\underset{1}{\psi}} - l'''\,\overset{3}{\underset{1}{\psi}} - \text{u. s. w.}$$

und wenn man mit diesen Ausdrücken, wie zuvor verfährt, so erhält man

$$m e^2 \sqrt{a} + m' e'^2 \sqrt{a'} + m'' e''^2 \sqrt{a''} + = \text{Const} \;\ldots\ldots\; (D)$$

eine Bemerkung, die auch von der Gleichung (C) des §. 12. Nr. I gilt. Da nun alle Planeten um die Sonne, so wie alle Satelliten um ihre Hauptplaneten den Beobachtungen gemäfs, in derselben Richtung sich bewegen, so müssen in der Gleichung (D) die Grössen $\sqrt{a} = \frac{1}{n\,a}$, $\sqrt{a'} = \frac{1}{n'\,a'}$.. alle positiv genommen werden, also sind auch alle Glieder dieser Gleichung positiv, und daher jedes derselben kleiner, als die Constante zur rechten Seite des Gleichheitszeichens. Da aber nach den Beobachtungen unserer Zeiten alle Excentricitäten der Planeten- und Satellitenbahnen nur sehr kleine Gröfsen sind, so ist jene Constante selbst auch nur eine kleine Gröfse, woraus folgt, dafs jedes Glied der Gleichung (D) immer sehr klein bleiben d. h. dafs die Excentricitäten der Bahnen nie beträchtlich und daher diese Bahnen selbst immer sehr nahe kreisförmig seyn werden, wie sie es jetzt sind. Das System dieser Bahnen ist daher, in Beziehung auf ihre Excentricitäten, stabil, indem diese Bahnen blofs um einen mittleren Werth der Excentricität in sehr kleinen Gränzen auf und nieder schwanken, während die grofsen Achsen derselben vollkommen beständig sind. Diese Beschränkung der Excentricitäten sowohl, als auch die ähnliche der Neigungen nach der Gleichung B und C würde nicht mehr statt haben, wenn sich die Planeten und Satelliten nach verschiedenen Richtungen bewegten.

§. 14.

Zum Schlusse dieses Gegenstandes wollen wir die Perioden und die Gränzen der Neigungen, der Excentricitäten .. der zwey gröfsten Planeten unsers Sonnensystemes suchen. Nennt man ω ϑ a die Neigung und die Knotenlänge und die halbe Achse der Bahn des Saturns, und bezeichnet durch ω' φ' ϑ' dieselben Gröfsen für Jupiter, so ist für die Epoche von 1700

$$\omega = 2^\circ\, 30'\, 10'' \qquad \vartheta = 101^\circ\, 5'\, 6'' \qquad a = 9.54007$$

$$\omega' = 1 \quad 19 \quad 10 \qquad \vartheta' = 97 \quad 34 \quad 9 \qquad a' = 5.20098$$

Dieses vorausgesetzt, geben die Gleichungen

$$p = \text{tg}\,\omega\ \text{Sin}\,\vartheta \qquad q = \text{tg}\,\omega\ \text{Cos}\,\vartheta$$

$$p = 0.04078 \qquad q = -0.01573$$

und eben so

$$p' = 0.02283 \qquad q' = -0.00303$$

Die Massen dieser beyden Planeten sind

$$m = \frac{1}{3358} \text{ und } m' = \frac{1}{1067}$$

die Masse der Sonne als Einheit angenommen. Man hat daher aus §. 12. Nr. II

$$k = 125^\circ\ 15'\ 40'' \quad A = 0.01537 \quad A' = -0.00661$$
$$k' = 103^\circ\ 38'\ 40'' \quad B = 0.02905$$

und aus der Gleichung $g = -\frac{N(m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'})}{\sqrt{aa'}}$ folgt

$g = -25''5756$. Die beyden Gleichungen des §. 12. Nr. I aber geben

$$\text{tg}\,\omega = 0.03287\sqrt{1 + 0.82665 \text{ Cos } [21^\circ\ 37' - 25''.5756\ t]} \text{ und}$$

$$\text{tg}\,\omega' = 0.02980\sqrt{1 - 0.43290 \text{ Cos } [21^\circ\ 37' - 25''.5756\ t]}$$

Es ist daher $B + A = 0.04442$ und $B - A = 0.01368$, also die gröſste und kleinste Neigung der Saturnsbahn gegen die Ecliptik $2^\circ\ 32'40''$ und $0^\circ\ 47'$; für die Jupiterbahn aber ist die gröſste Neigung $2^\circ\ 2'30''$ und die kleinste $1^\circ\ 17'\ 10''$.

Auch die Knoten dieser beyden Bahnen mit der Erdbahn gehen nicht immer nach derselben Richtung fort, sondern sie sind zwischen bestimmten Gränzen, zwischen welchen sie vor und rückwärts gehen, enthalten, weil $B > A$ (vid. §. 12. Nr. IV) ist. Die Entfernung dieser Gränzen beträgt für die Saturnusbahn $31^\circ\ 56'$ und für die des Jupiter $13^\circ\ 10'$ zu beyden Seiten ihres mittleren Ortes. Die Periode endlich, in welcher die Neigungen sowohl als die Knotenlängen beyder Bahnen von ihrem kleinsten Werthe bis zu ihren gröſsten gelangen ist

$$\frac{360^\circ}{g} = \frac{360.60^2}{25.5756} = 50670 \text{ Julianische Jahre,}$$

eine Periode, deren lange Dauer uns eine Idee von der groſsen Ausdehnung der Theorie der allgemeinen Schwere gibt, welche uns, durch die Analyse unterstützt, den Zustand unseres Systemes vor und nach vielen Jahrtausenden von der gegenwärtigen Epoche kennen lehrt.

I. Um eben so die Aenderungen der Excentricität und der Länge der Perihelien dieser beyden Planetenbahnen zu finden, hat man nach dem Vorhergehenden .. $g = 21''9905$ und $\gamma = 3''5851$ also auch

$$A = 0.04877 \quad B = 0.03532 \quad A' = -0.01715 \quad B' = 0.04321$$
$$k = 306^\circ\ 35' \quad \varkappa = 210^\circ\ 17'$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung

$$e^2 = A^2 + B^2 + 2\,A\,B \,\mathrm{Cos}\,[(g-\gamma)\,t + k - \varkappa]$$

so findet man für die Excentricität der Saturnsbahn

$$e = 0.06021 \,.\, \sqrt{1 - 0.95009 \,\mathrm{Cos}\,(83^{\circ}\,42' - 18''\,4054\,t)}$$

und für die des Jupiters

$$e' = 0.04649 \,.\, \sqrt{1 + 0.68592 \,\mathrm{Cos}\,(83^{\circ}\,42' - 18''\,4054\,t)}$$

wo t die Anzahl Jahre seit 1700 bezeichnet. Die Länge der Perihelien beyder Bahnen findet man aus den beyden für tg ω und tg w' in §. 12. gegebenen Gleichungen, wenn man darin die vorhergehenden Werthe von $A\,B\,A'\,B'\,k\,\varkappa\,g\,\gamma$ substituirt, und die gröfsten Ausweichungen derselben von ihrem mittleren Orte werden durch die Gleichung

$$\mathrm{Cos}\,[(g-\gamma)\,t + k - \varkappa] = -\frac{(g\,A^2 + \gamma\,B^2)}{A\,B\,(g+\gamma)}$$

bestimmt werden. Da für unseren Fall der Werth von $(gA^2+\gamma B^2)$ gröfser ist, als $A\,B\,(g+\gamma)$, so haben die Längen beyder Perihelien keine Gränzen, oder sie gehen immer in derselben Richtung weiter.

Die Periode aber, in welcher die beyden Excentricitäten alle ihre Aenderungen durchlaufen, ist $\frac{360}{g-\gamma} = 70410$ Julianische Jahre. Endlich sind die gröfsten und kleinsten Werthe der Excentricitäten $A \pm B$ und $A' \pm B'$, also für Saturn 0.0841 und 0.0134 und für Jupiter 0.0604 und 0.0261.

EILFTES KAPITEL.

Anwendung des Vorhergehenden.

§. 1.

Um die Anwendung der vorhergehenden Ausdrücke zu zeigen, wollen wir die Störungen suchen, welche Merkur von der Sonne leidet.

Nach Vol. II. p. 387 ist für Merkur die halbe grofse Achse der Bahn a = 0 3870981, die mittlere siderische Bewegung in einem Julianischen Jahre (von 365 $\frac{1}{4}$ Tagen) gleich n = 5381016″.8, und die Excentricität der Bahn e = 0.2055132. Für die Venus hat man eben so a′ = 0.7233323, n′ = 2106641″.6 und die Masse der Venus $m' = \frac{1}{383137}$ oder m′ = 0.00000261 die Sonnenmasse als Einheit vorausgesetzt.

Man hat also $\alpha = \frac{a}{a'} = 0.53516$. Entwickelt man zuerst die Werthe von α^2, α^3, α^4 . . . so ist nach den Gleichungen (d′) Cap. VIII, §. 3., $b^0_{-\frac{1}{2}} = 2.14597$ und $b^1_{-\frac{1}{2}} = -0.51525$. Nach den Gleichungen e und f hat man dann $b^0_{\frac{1}{2}} = 2.17217$ und $b^1_{\frac{1}{2}} = 0.60570$. Mit diesen Werthen von $b^0_{\frac{1}{2}}$ und $b^1_{\frac{1}{2}}$ gibt die Gleichung (a), wenn man in ihr $x = \frac{1}{2}$ und nach der Ordnung $\kappa = 2, 3, 4$. . . setzt,

$$b^2_{\frac{1}{2}} = \frac{(1+\alpha^2)\, b^1_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha\, b^0_{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}\alpha} = 0.24659$$

$$b^3_{\frac{1}{2}} = \frac{2\,(1+\alpha^2)\, b^2_{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\alpha\, b^1_{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{2}\alpha} = 0.11077$$

$$b^4_{\frac{1}{2}} = \frac{3(1+\alpha^2)\, b^3_{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}\,\alpha\, b^2_{\frac{1}{2}}}{\frac{7}{2}\alpha} = 0{,}05208$$

Dann geben die Gleichungen (g) und (h) die Werthe von

$$b^0_{\frac{3}{2}} = 4.21415 \text{ und } b^1_{\frac{3}{2}} = 3.03538$$

Setzt man ferner in den Gleichungen (c) die Gröſse $x = \frac{1}{2}$ und $\varkappa = 2, 3, 4 \ldots$, so ist

$$b^2_{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}(1+\alpha^2)\, b^2_{\frac{1}{2}} + 3\alpha\, b^1_{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(1-\alpha^2)^2} = 1.95054$$

$$b^3_{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{5}{2}(1+\alpha^2)\, b^3_{\frac{1}{2}} + 5.\alpha\, b^2_{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(1-\alpha^2)^2} = 1.19237$$

$$b^4_{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{7}{2}(1+\alpha^2)\, b^4_{\frac{1}{2}} + 7\alpha\, b^3_{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(1-\alpha^2)^2} = 0.70867$$

Setzt man eben so in den Gleichungen (m) des §. 4. $x = \frac{1}{2}$ und $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ so erhält man:

$$\frac{db^0_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = \frac{\alpha^2\, b^0_{\frac{1}{2}} - \alpha\, b^1_{\frac{1}{2}}}{\alpha(1-\alpha^2)} = 0.78021$$

$$\frac{db^1_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = \frac{(1+2\alpha^2)\, b^1_{\frac{1}{2}} - 3\alpha\, b^2_{\frac{1}{2}}}{\alpha(1-\alpha^2)} = 1.45789$$

$$\frac{db^2_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = \frac{(2+3\alpha^2)\, b^2_{\frac{1}{2}} - 5\alpha\, b^3_{\frac{1}{2}}}{\alpha(1-\alpha^2)} = 1.07007$$

$$\frac{db^3_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = \frac{(3+4\alpha^2)\, b^3_{\frac{1}{2}} - 7\alpha\, b^4_{\frac{1}{2}}}{\alpha(1-\alpha^2)} = 0.69149$$

und eben so gibt endlich auch die Gleichung (n) des §. 4.

$$\frac{d^2 b^0_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 2.75628, \quad \frac{d^2 b^1_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 2.42616$$

$$\frac{d^2 b^2_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 3.39502, \quad \frac{d^2 b^3_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 3.38107$$

Nachdem so die Werthe dieser Gröſsen

$$b^4_{\frac{1}{2}}, \quad \frac{db^4_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} \text{ und } \frac{d^2 b^4_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}$$

gefunden sind, erhält man durch die Gleichungen (1) und (4) des §. 4.

$$A^0 = -\frac{1}{a'} . b^0_{\frac{1}{2}} = -3.00300 \text{ und}$$

$$a.A^{(1)} = \alpha - \alpha . b^1_{\frac{1}{2}} = -0.03775$$

$$a.A^{(2)} = -0.13196, \quad a.A^{(3)} = -0.05928$$

und damit geben die Gleichungen (o) des §. 5.

$$a^2 . \frac{dA^{(0)}}{da} = -0.22345 \quad a^2 . \frac{dA^{(1)}}{da} = -0.13114$$

$$a^2 . \frac{dA^{(2)}}{da} = -0.30646 \quad a^2 . \frac{dA^{(3)}}{da} = -0.19804$$

und eben so:

$$a^3 . \frac{d^2A^{(0)}}{da^2} = -0.42245 \quad a^3 . \frac{d^2A^{(1)}}{da^2} = -0.37185$$

$$a^3 . \frac{d^2A^{(2)}}{da^2} = -0.52035 \quad a^3 . \frac{d^2A^{(3)}}{da^2} = -0.51821.$$

Nach diesen Entwicklungen gehen wir nun zu den Gleichungen (L′) und (M′) des Cap. IX. §. 5. über.

Setzt man $\frac{n}{n'} = w$ so ist:

$$n^2 . H^{(\varkappa)} = \frac{a^2 \left(\frac{dA^{(\varkappa)}}{da}\right) + \frac{2}{1-\frac{1}{w}} . aA^{(\varkappa)}}{\varkappa^2\left(1-\frac{1}{w}\right)^2 - 1}$$

wo $w = 2.554311$ also auch $\log\left(1-\frac{1}{w}\right) = 9.7842641$ ist.

Setzt man in dem letzten Ausdrucke $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots$ so erhält man

$$n^2 . H^{(1)} = 0.40521 \qquad n^2 . H^{(2)} = -1.53859$$

$$n^2 . H^{(3)} = -0.16846 \qquad n^2 . H^{(4)} = -0.04325$$

Ferner ist

$$R^{(\varkappa)} = \frac{aA^{(\varkappa)}}{\varkappa\left(1-\frac{1}{w}\right)^2} + \frac{2 . n^2 H^{(\varkappa)}}{\varkappa\left(1-\frac{1}{w}\right)},$$

also auch:

$$R^{(1)} = 1.23031 \quad R^{(2)} = -2.7065 \quad R^{(3)} = -0.2379$$

$$R^{(4)} = -0.0543 \quad R^{(5)} = -0.0165$$

Mit diesen Werthen von $H^{(\varkappa)}$ und $R^{(\varkappa)}$ kann man bereits diejenigen Glieder der Gleichungen (L') und (M') berechnen, welche von den Excentricitäten e und e' unabhängig sind. Für die übrigen Glieder dieser Gleichungen kann man sich leicht durch eine vorläufige bloſs genäherte Rechnung versichern, daſs die von $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$, so wie alle von $T^{(\varkappa)}$ abhängigen Gröſsen ganz unmerklich sind.

Sucht man also bloſs $P^{(3)}$ durch die Gleichungen

$$E^{(3)} = -\frac{3a\,A^{(3)}}{1-\frac{1}{w}} + \left\{9\left(1-\frac{1}{w}\right)\left[1+3\left(1-\frac{1}{w}\right)\right] - 3\right\} n^2 H^{(3)}$$

$$+ \frac{a^3}{2} . \frac{d^2 A^{(3)}}{da^2}$$

$$P^{(3)} = \frac{-E^{(3)}}{1-\left\{1-3\left(1-\frac{1}{w}\right)\right\}^2}$$

so erhält man $P^{(3)} = 6.4662$ und eben so findet man endlich $S^{(1)} = -2.6663$ und $S^{(2)} = 36.4340$ $S^{(3)} = 15.2386$. Man bemerke noch, dafs man nach Cap. VIII. §. 4 hat

$$A^{(-x)} = A^{(x)}, B^{(-x)} = B^{(x)}, \left(\frac{dA^{(-x)}}{da}\right) = \left(\frac{dA^{(x)}}{da}\right) \text{ u. f.}$$

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen (L′) und (M′), und bemerkt man, dafs in der letzten statt δv die Gröfse $\delta v \,.\, \text{Sin}\, 1''$ stehen soll, so erhält man die Störungen Merkurs durch Venus.

Störungen des Radius Vectors:

$$\begin{aligned} \delta r = & -0.000\,000\,038 \\ & +0.000\,000\,409 \text{ Cos } (l'-l) \\ & -0.000\,001\,534 \text{ Cos } 2\,(l'-l) \\ & -0.000\,000\,170 \text{ Cos } 3\,(l'-l) \\ & -0.000\,000\,044 \text{ Cos } 4\,(l'-l) \\ & -0.000\,001\,343 \text{ Cos } (3l'-2l-w) \end{aligned}$$

Störungen der Länge

$$\begin{aligned} \delta v = & +0''.7 \text{ Sin } (l'-l) \\ & -1.5 \text{ Sin } 2\,(l'-l) \\ & -0.1 \text{ Sin } 3\,(l'-l) \\ & -0.03 \text{ Sin } 4\,(l'-l) \\ & -0.01 \text{ Sin } 5\,(l'-l) \\ & +0.3 \text{ Sin } (l'-w) \\ & -4.6 \text{ Sin } (2l'-l-w) \\ & -1.7 \text{ Sin } (3l'-2l-w) \end{aligned}$$

wo l l′ die mittleren heliocentrischen Längen Merkurs und der Venus, und wo w die Länge des Periheliums der Merkursbahn ist. — Die Störungen der Breite nach der Gleichung (N) des §. 6. sind sämmtlich unbedeutend. Ganz eben so wird man nun auch die Störungen δr und δv finden, welche Merkur von den übrigen Planeten leidet, von welchen aber blofs diejenigen noch merkbar sind, die von der Erde und von Jupiter kommen.

Die Werthe von b_x^{x}, $\frac{db_x^{x}}{da}$, $\frac{d^2 b_x^{x}}{da^2}$. . für die verschiede-

nen Planeten findet man in Méc. cél. Vol. III p. 66, wo man nach Cap. IX §. 6. bemerken kann, dafs man, wenn man diese Gröfsen für Störungen des m durch m′ berechnet hat, man so fort auch die Werthe dieser Gröfsen für die Störungen des m′ durch m erhält, wenn man die vorhergehenden Gröfsen $b^{x}_{\frac{1}{2}}$ durch $\frac{a}{a'} = \alpha$, und die $b^{x}_{\frac{3}{2}}$ durch $\left(\frac{a}{a'}\right)^3 = \alpha^3$ multiplicirt. So war oben für die Störung Merkurs durch Venus

$$b^{0}_{\frac{1}{2}} = 2.17217 \text{ und } b^{0}_{\frac{3}{2}} = 4.2.415.$$

Da aber $\alpha = \frac{a}{a'} = 0.53516$ ist, so hat man für die Störung der Venus durch Merkur

$$b^{0}_{\frac{1}{2}} = 1.16246 \text{ und } b^{0}_{\frac{3}{2}} = 0.64589.$$

Ueberhaupt also wird man bey dieser Verwandlung

$$\text{statt } b^{x}_{\frac{1}{2}} \text{ setzen } \alpha \,.\, b^{x}_{\frac{1}{2}}$$

$$b^{x}_{\frac{3}{2}} \;.\;.\;.\;.\; \alpha^3 . b^{x}_{\frac{3}{2}}$$

während die Werthe von $A^{(x)}$ und $B^{(x)}$ unverändert dieselben bleiben, den einzigen Fall $A^{(1)}$ ausgenommen, so dafs man für $a' A^{(1)}$ setzen wird $\left(\frac{1}{\alpha^2} - b^{(1)}_{\frac{1}{2}}\right)$.

§. 2.

Nachdem wir so die periodischen Störungen gesucht haben, welche Merkur durch Venus leidet, wollen wir nun auch die säculären Störungen Merkurs durch die anderen Planeten suchen.

Nach Cap. X §. 3. hat man:

$$\varphi^{1}_{0} = -\frac{3 m'n . \alpha^2 . b^{1}_{-\frac{1}{2}}}{4(1-\alpha^2)^2} \text{ oder } = +\frac{m'n}{4} . \alpha^2 b^{1}_{\frac{3}{2}}$$

$$\psi^{1}_{0} = -3 m' . n\alpha \left\{ \frac{(1+\alpha^2) . b^{1}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \alpha . b^{0}_{-\frac{1}{2}}}{2(1-\alpha^2)^2} \right\}$$

$$= +\frac{m'n}{4} \left\{ 2\alpha (1+\alpha^2) b^{1}_{\frac{3}{2}} - 3\alpha^2 . b^{0}_{\frac{3}{2}} \right\}$$

und überdieſs

$$\overset{0}{\underset{1}{\varphi}} = \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}\,\overset{1}{\underset{0}{\varphi}} \text{ und } \overset{0}{\underset{1}{\psi}} = \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}\,.\,\overset{1}{\underset{0}{\psi}}$$

Hat man so die Werthe der Gröſsen φ und ψ, so findet man die säculären Aenderungen der Excentricität e und der Länge w des Periheliums durch die Gleichungen (Cap. X, §. 2)

$$\left.\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \overset{1}{\underset{0}{\psi}}\,.\,e'\,\mathrm{Sin}\,(w'-w) \\ \frac{dw}{dt} &= \overset{1}{\underset{0}{\varphi}} - \overset{1}{\underset{0}{\psi}}\,.\,\frac{e'}{e}\,\mathrm{Cos}\,(w'-w) \end{aligned}\right\}\text{(I)}$$

Ist ferner ω die Neigung der Bahn und ϑ die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn gegen die feste Ebene der Ekliptik, wie sie im Jahre 1750 war, so ist die säkuläre Aenderung dieser Gröſsen ω und ϑ nach den Gleichungen (e) und (f)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \overset{1}{\underset{0}{\varphi}}\,.\,\omega'\,.\,\mathrm{Sin}\,(\vartheta-\vartheta') \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\overset{1}{\underset{0}{\varphi}} + \overset{1}{\underset{0}{\varphi}}\,.\,\frac{\omega'}{\omega}\,\mathrm{Cos}\,(\vartheta-\vartheta') \end{aligned}\right\}\text{(II)}$$

Ist endlich Θ die Neigung der Bahn und Ω die Länge des aufsteigenden Knotens gegen die veränderliche Ekliptik, so ist, nach den Gleichungen (g) und (h)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} = &\left(\overset{1}{\underset{0}{\varphi}} - \overset{1}{\underset{2}{\varphi}}\right)\mathrm{tg.}\,\omega'\,\mathrm{Sin}\,(\vartheta-\vartheta') \\ &+ \left(\overset{3}{\underset{0}{\varphi}} - \overset{3}{\underset{2}{\varphi}}\right)\mathrm{tg.}\,\omega'''\,\mathrm{Sin}\,(\vartheta-\vartheta''') \\ &+ \left(\overset{4}{\underset{0}{\varphi}} - \overset{4}{\underset{2}{\varphi}}\right)\mathrm{tg}\,\omega^{IV}\,\mathrm{Sin}\,(\vartheta-\vartheta^{IV}) \\ &+ \left(\overset{5}{\underset{0}{\varphi}} - \overset{5}{\underset{2}{\varphi}}\right)\mathrm{tg}\,\omega^{V}\,\mathrm{Sin}\,(\vartheta-\vartheta^{V}) + \ldots \\ \frac{d\Theta}{dt} = &-\left(\overset{1}{\underset{0}{\varphi}} + \overset{2}{\underset{0}{\varphi}} + \overset{3}{\underset{0}{\varphi}} + \overset{4}{\underset{0}{\varphi}} + \ldots\right) - \overset{0}{\underset{2}{\varphi}} \\ &+ \left(\overset{1}{\underset{0}{\varphi}} - \overset{1}{\underset{2}{\varphi}}\right)\frac{\mathrm{tg}\,\omega'}{\mathrm{tg}\,\omega}\,\mathrm{Cos}\,(\vartheta-\vartheta') \\ &+ \left(\overset{3}{\underset{0}{\varphi}} - \overset{3}{\underset{2}{\varphi}}\right)\frac{\mathrm{tg}\,\omega'''}{\mathrm{tg}\,\omega}\,\mathrm{Cos}\,(\vartheta-\vartheta''') \\ &+ \left(\overset{4}{\underset{0}{\varphi}} - \overset{4}{\underset{2}{\varphi}}\right)\frac{\mathrm{tg}\,\omega^{IV}}{\mathrm{tg}\,\omega}\,\mathrm{Cos}\,(\vartheta-\vartheta^{IV}) + \ldots \end{aligned}\right\}\ldots\text{(III)}$$

Für die Störungen Merkurs durch Venus ist nach dem Vorhergehenden $m' = 0.00000261$

$$n = 5381016''.8,\ \alpha = 0.53516,\ b^0_{\frac{3}{2}} = 4.21415,$$

$$b^1_{\frac{3}{2}} = 3.03538,\ \text{also ist}\ \varphi^1_0 = 3''.05\ \text{und}\ \psi^1_0 = 1''.96$$

Aber nach Vol. II p. 387 ist $e' = 0.00688$ und $w' - w = 54^\circ\ 15'$ also $\psi^1_0 \cdot e' \operatorname{Sin}(w' - w) = 0''.011 = \frac{de}{dt}$ die säkuläre Störung der Excentricität der Merkursbahn durch Venus.

Um auch die Störungen der anderen Planeten zu finden, wollen wir, der Kürze wegen, wie in Cap. X, die Gröfsen, welche sich auf Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus beziehen, in derselben Ordnung durch 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6 bezeichnen.

Diefs vorausgesetzt erhält man:

	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus
$b^0_{\frac{1}{2}}$	2.17217	2.08198	2.03350	2.00278	2.00082	2.00018
$b^1_{\frac{1}{2}}$	0.60570	0.41114	0.26046	0.07458	0.04061	0.02018
$b^0_{\frac{3}{2}}$	4.21415	2.87183	2.32254	2.02514	2.00743	2.00181
$b^1_{\frac{3}{2}}$	3.03538	1.57606	0.86388	0.22561	0.12213	0.06058

und daraus folgt:

$$\varphi^1_0 = 3''.05 \qquad \psi^1_0 = 1''.96 \text{ und } \varphi^0_2 = 0''.10$$

$$\varphi^2_0 = 0.96 \qquad \psi^2_0 = 0.45 \qquad \varphi^1_2 = 5.43$$

$$\varphi^3_0 = 0.04 \qquad \psi^3_0 = 0.01 \qquad \varphi^3_2 = 0.43$$

$$\varphi^4_0 = 1.58 \qquad \psi^4_0 = 0.15 \qquad \varphi^4_2 = 6.94$$

$$\varphi^5_0 = 0.08 \qquad \psi^5_0 = 0.00 \qquad \varphi^5_2 = 0.34$$

$$\varphi^6_0 = 0.00 \qquad \psi^6_0 = 0.00 \qquad \varphi^6_2 = 0.01$$

und daher nach den Gleichungen (c) des Cap. X für die säkuläre Störung der Excentricität der Merkursbahn

durch	Venus	0.″011
	Erde	0.005
	Mars	— 0.001
	Jupiter	— 0.006
	Saturn	0.000
	Uranus	0.000

Gesammtstörung aller Planeten $= + 0''.009 = + 0.000\,000\,044$

Eben so hat man für die Störung der Apsiden durch Venus

$$\log \psi_0^1 = 0.29226$$

$$\frac{e'}{e} = 8.52501$$

$$\text{Cos}: (w' - w) = 9.76660$$

$$\overline{8.58387} = \log 0.04$$

$$\varphi_0^1 = 3.05$$

$$\frac{dw}{dt} = 3.01$$

also	3″.01	. . .	durch ♀	und eben so
	0.93	. . .	— ♁	
	0.04	. . .	— ♂	
	1.56	. . .	— ♃	
	0.07	. . .	— ♄	
	0.00	. . .	— ♅	

Total-störung $\frac{dw}{dt} = +5''.61$

Ferner ist $\vartheta = 45^\circ\ 57'$, $\vartheta' = 74^\circ\ 52'$, $\varpi = 7^\circ\ 0'$, $\varpi' = 3^\circ\ 24$

$$\text{also}\quad \varphi_0^1 \cdot \text{tg}\, \varpi' . \text{Sin}\, (\vartheta - \vartheta') = -0''.09 \quad \text{und}$$

$$-\varphi_0^1 + \varphi_0^1 \cdot \frac{\text{tg}\, \varpi'}{\text{tg}\, \varpi} \text{Cos}\, (\vartheta - \vartheta') = -1''.76$$

also die säkulären Aenderungen der Neigung ϖ und der Knoten ϑ der Merkursbahn gegen die feste Ekliptik

$\frac{d\omega}{dt}$		$\frac{d\vartheta}{dt}$	
$= -0''.09$	. . .	$= -1''.76$	durch ♀
.		-0.96	- - ♁
0.00		-0.03	- - ♂
-0.03		-1.40	- - ♃
0.00		-0.06	- - ♄
0.00		0.00	- - ♅
-0.12		$-4''.21$	

Um eben so die Aenderungen der Neigung Ω, und des Knotens Θ der Merkursbahn gegen die bewegliche Ekliptik zu erhalten, hat man nach der Gleichung (III)

$$\varphi^1_0 - \varphi^1_2 = -2.38\,,\quad \operatorname{tg}\omega' \operatorname{Sin}(\vartheta - \vartheta') = -0{,}0287 \text{ also}$$

$$(\varphi^1_0 - \varphi^1_2)\operatorname{tg}\omega' \operatorname{Sin}(\vartheta - \vartheta') = +0.07$$

und eben so mit den übrigen Gliedern, also

$\frac{d\Omega}{dt} = +0''.07$	durch	♀
0.00	- - - -	♂
0.10	- - - -	♃
0.01	- - - -	♄
0.00	- - - -	♅

$$\frac{d\Omega}{dt} = +0''.18$$

Eben so gibt die zweyte der Gleichungen (III)

$$-2.38\frac{\operatorname{tg}\omega'}{\operatorname{tg}\omega}\operatorname{Cos}(\vartheta - \vartheta') = -1.01$$

$$-\varphi^1_0 = -3.05$$

$$-4.06 \text{ durch } ♀$$

$$-1.39\frac{\operatorname{tg}\omega'''}{\operatorname{tg}\omega}\operatorname{Cos}(\vartheta - \vartheta''') = -0.10$$

$$-\varphi^3_0 = -0.04$$

$$-0.14 \text{ durch } ♂$$

Für die Erde hat man blofs das Glied

$$\varphi_0^2 = 0.96$$

und für Mercur ebenfalls blofs

$$\varphi_2^0 = 0.10$$

so dafs man also hat

$$\frac{d\Theta}{dt} = -0''.10 \text{ durch } ☿$$
$$-4.06 \text{ - - - - } ♀$$
$$-0.96 \text{ - - - - } ♁$$
$$-0.14 \text{ - - - - } ♂$$
$$-2.19 \text{ - - - - } ♃$$
$$-0.12 \text{ - - - - } ♄$$
$$0.00 \text{ - - - - } ♅$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -7''.57$$

Nimmt man alles Vorhergehende zusammen, so hat man für die Merkursbahn

jährliche Aenderung der Excentricität

$$de = +0.000\,000\,044$$

jährliche Aenderung der Länge des Periheliums $d\varpi = +5''.61$

- - - - der Knoten $d\vartheta = -4''.21$ }
- - - - der Neigung $d\omega = -0''.12$ }

in Beziehung auf die feste Ekliptik

- - - - der Knoten $d\Theta = -7''.57$ }
- - - - der Neigung $d\Omega = +0''.18$ }

in Beziehung auf die bewegliche Ekliptik

Nach diesem umständlich entwikelten Beyspiele wird es nicht schwer seyn, eben so auch die Störungen jedes andern Planeten zu bestimmen.

§. 3.

Da nach dem Vorhergehenden durch die Wirkung eines jeden Planeten die Ebene der Erdbahn verrückt wird, so wird auch dadurch die Lage des Pols der Ekliptik gegen den hier als fest angenommenen Aequator der Erde verändert werden, und daraus wird eine Aenderung $d♈$ der Länge des Nachtgleichenpunktes, so wie eine Aenderung $d\varepsilon$ der Neigung der Ekliptik gegen den Aequator entstehen. Wir wollen die Werthe dieser beyden Gröfsen suchen.

Denkt man sich ein sphärisches Dreyeck A B C, welches von dem Pole A der Bahn des störenden Planeten, von dem Pole B des Aequators, und von dem Pole C der Ekliptik gebildet wird, und nennt man, wie zuvor, ω die Neigung der Planeten-Bahn gegen die Ekliptik und ϑ die Länge ihres aufsteigenden Knotens, und ε die Schiefe der Ekliptik, so ist $BC = \varepsilon$ $AC = \omega$, und der Winkel $C = 180 - \vartheta$. Da aber in dem Dreyecke A B C die Seiten A B und A C als constant zu betrachten sind, so ist (Astron. I, p. 14)

$$d\varepsilon = dA . \text{Sin } \omega \text{ Sin } \vartheta, \text{ und}$$

$$dB = - dA . \frac{\text{Sin } \omega \text{ Cos } \vartheta}{\text{Sin } \varepsilon}$$

wo dB die Aenderung der Lage des Aequinoctial-Punktes in Beziehung auf den Aequator bezeichnet, so dafs also die gesuchte Aenderung des Aequinoctial-Punktes in Beziehung auf die Ekliptik ist $d♈ = dB \text{ Cos } \varepsilon$ oder

$$d♈ = - dA \text{ Cotg } \varepsilon . \text{Sin } \omega \text{Cos } \vartheta$$

die Gröfse dA aber ist, was wir oben $\overset{x}{\varphi}_2$ genannt haben, so dafs man daher für die Wirkung a l l e r Planeten hat

$$d\varepsilon = \overset{0}{\varphi}_2 . \text{Sin } \omega \text{ Sin } \vartheta + \overset{1}{\varphi}_2 . \text{Sin } \omega' \text{ Sin } \vartheta' + \overset{3}{\varphi}_2 \text{ Sin } \omega''' \text{ Sin } \vartheta''' + \ldots$$

$$d♈ . \text{tg } \varepsilon = - \overset{0}{\varphi}_2 \text{ Sin } \omega \text{ Cos } \vartheta + \overset{1}{\varphi}_2 . \text{Sin } \omega' \text{ Cos } \vartheta'$$
$$+ \overset{3}{\varphi}_2 \text{ Sin } \omega''' \text{ Cos } \vartheta''' + \ldots$$

Für Merkur z. B. ist:

$\log \overset{0}{\varphi}_2 = 9.00000$		9.00000_n
$\log \text{Sin } \omega = 9.08589$		9.08589
$\log \text{Sin } \vartheta = 9.85657$	. . .	$\log \text{Cos } \vartheta = 9.84216$
7.94246		$\log \text{Cotg } \varepsilon = 0.36239$
		8.29044
Zahl = 0.0088		— 0.0195

Entwickelt man eben so die übrigen Glieder, so erhält man

	$d\varepsilon$	$d♈$	
	0″.0088	— 0″.0195	für ☿
	0.3233	— 0.2013	- - - ♀
	0.0073	— 0.0152	- - - ♂
	0.1576	+ 0.0538	- - - ♃
	0.0131	+ 0.0121	- - - ♄
	0.0000	0.0000	- - - ♅
Summe	0″.5101	— 0.1701	

Die jährliche Abnahme der Schiefe der Ekliptik durch die Wirkung aller Planeten auf die Erdbahn ist daher $d\varepsilon = 0''.51$ (Ast. I, p. 40) sehr nahe mit den Beobachtungen übereinstimmend. Die jährliche Präcession der Aequinoctien aber, oder die jährliche rückgängige Bewegung des Frühlingspunktes ist, nach den Beobachtungen gleich $50''.1$, und wenn man davon die jährliche rechtläufige Bewegung $d\Upsilon = -0.17$, welche aus der Wirkung der Planeten auf die Erdbahn entsteht, wegnimmt, so bleibt $50''.27$ für die Lunisolar-Präcession, welche letzte also, wie wir in dem folgenden Capitel sehen werden, eine bloſse Wirkung der Sonne und des Mondes auf die abgeplattete Erde ist. (Vergleiche I, p. 39.)

§. 4.

Diese Bewegung der Ekliptik, welche von der Wirkung der Planeten entsteht, muſs offenbar auch die Länge λ und Breite β der Fixsterne ändern.

Wir haben aber, wenn α und δ die Rectascension und Deklination des Sternes bezeichnet, nach I, p. 33

$$d\beta = - d\varepsilon \operatorname{Sin} \lambda - d\alpha \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \delta$$

$$d\lambda = d\varepsilon \operatorname{tg} \beta \operatorname{Cos} \lambda + d\alpha \frac{\operatorname{Cos} \pi \operatorname{Cos} \delta}{\operatorname{Cos} \beta}$$

wo $\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \delta = \operatorname{Cos} \lambda \operatorname{Sin} \varepsilon$ und

$$\frac{\operatorname{Cos} \pi \operatorname{Cos} \delta}{\operatorname{Cos} \beta} = \operatorname{Cos} \varepsilon - \operatorname{tg} \beta \operatorname{Sin} \lambda \operatorname{Sin} \varepsilon \text{ ist.}$$

Setzt man in diesen Ausdrücken (nach §. 3)

$$d\varepsilon = -0''.5101 \text{ und}$$

$$d\alpha = - \overset{0}{\varphi_2} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \omega \operatorname{Cos} \vartheta}{\operatorname{Sin} \varepsilon} = - d\varepsilon \frac{\operatorname{Cotg} \vartheta}{\operatorname{Sin} \varepsilon}$$

so erhält man

$$d\beta = 0''.5101 \operatorname{Sin} \lambda + d\varepsilon . \operatorname{Cotg} \vartheta \operatorname{Cos} \lambda$$

$$d\lambda = - 0''.5101 \operatorname{tg} \beta \operatorname{Cos} \lambda - d\varepsilon \frac{\operatorname{Cotg} \vartheta}{\operatorname{Sin} \varepsilon} (\operatorname{Cos} \varepsilon - \operatorname{tg} \beta \operatorname{Sin} \lambda \operatorname{Sin} \varepsilon)$$

oder wenn man nur auf den veränderlichen Theil des letzten Ausdruckes sieht

$$d\lambda = - 0''.5101 \operatorname{tg} \beta \operatorname{Cos} \lambda + d\varepsilon \operatorname{Cotg} \vartheta . \operatorname{tg} \beta \operatorname{Sin} \lambda$$

Wenn man also auf alle Planeten Rücksicht nimmt, so wird man in beyden Ausdrücken für $d\varepsilon \operatorname{Cotg} \vartheta$ setzen:

$$0.0088 \text{ Cotg } \vartheta = 0.0085$$
$$0.3233 \text{ Cotg } \vartheta^{\text{I}} = 0.0874$$
$$0.0073 \text{ Cotg } \vartheta^{\text{III}} = 0.0007$$
$$0.1576 \text{ Cotg } \vartheta^{\text{IV}} = -0.0233$$
$$0.0131 \text{ Cotg } \vartheta^{\text{V}} = -0.0052$$
$$0.0000 \text{ Cotg } \vartheta^{\text{VI}} = 0.0000$$
$$\Sigma . d\varepsilon \text{ Cotg } \vartheta = 0''.0681$$

Wir haben daher für die gesuchte säkuläre Aenderung der Fixsterne

in Breite $d\beta = 51''.01 \text{ Sin } \lambda + 6''.81 \text{ Cos } \lambda$

in Länge $d\lambda = - 51''.01 \text{ tg } \beta \text{ Cos } \lambda + 6''.81 \text{ tg } \beta \text{ Cos } \lambda$

woraus zugleich folgt, dafs die Aenderung der Breite der Sterne ein Gröfstes ist, wenn ihre Länge durch die Gleichung $\text{tg } \lambda = \frac{51.01}{6.81}$ gegeben wird, das heifst, wenn ihre Länge 82° 24′ oder 262° 24′ ist, und dafs die erste sich dem Nordpole der Ekliptik nähere, während die anderen sich davon entfernen.

I. Nennt man $p = \text{tg } \omega \text{ Sin } \vartheta$ und $q = \text{tg } \omega \text{ Cos } \vartheta$, wo ω die Neigung und ϑ die Länge des Knotens einer Planeten-Bahn bezeichnet, so hat man nach Cap. X. §. 4

$$\frac{dp}{dt} = (q' - q)\, \varphi_0^1$$
$$\frac{dq}{dt} = (p - p')\, \varphi_0^1$$

Um die Werthe der Gröfsen $p''\, q''$ für die Erde zu bestimmen, so hat man, wenn die Ausdrücke $\frac{dp''}{dt}, \frac{dq''}{dt}, \frac{d^2p''}{d^2t} \ldots$ sich auf die Epoche von 1750 deziehen, und wenn t die Anzahl Jahre seit dieser Epoche bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} p'' &= \frac{t\,dp''}{dt} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{d^2p''}{dt^2} + \\ q'' &= \frac{t\,dq''}{dt} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{d^2q''}{dt^2} + \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

Nach den zwey ersten Gleichungen ist aber, wenn man auf alle die Erde störenden Planeten Rücksicht nimmt

$$\frac{dp''}{dt} = (q-q'')\overset{0}{\varphi}_2 + (q'-q'')\overset{1}{\varphi}_2 + (q'''-q'')\overset{3}{\varphi}_2 + (q^{IV}-q'')\overset{4}{\varphi}_2 +$$

oder da $q'' = 0$ ist,

$$\frac{dp''}{dt} = q\overset{0}{\varphi}_2 + q'\overset{1}{\varphi}_2 + q'''\overset{3}{\varphi}_2 + q^{IV}\overset{4}{\varphi}_2 +$$

und eben so

$$\frac{dq''}{dt} = -p\overset{0}{\varphi}_2 - p'\overset{1}{\varphi}_2 - p'''\overset{3}{\varphi}_2 - p^{IV}\overset{4}{\varphi}_2 -$$

in welchen Ausdrücken also

$p = \text{tg}\,\omega \,\text{Sin}\,\vartheta$, $p' = \text{tg}\,\omega' \,\text{Sin}\,\vartheta'$, $p''' = \text{tg}\,\omega''' \,\text{Sin}\,\vartheta'''$ und
$q = \text{tg}\,\omega \,\text{Cos}\,\vartheta$, $q' = \text{tg}\,\omega' \,\text{Cos}\,\vartheta'$, $q''' = \text{tg}\,\omega''' \,\text{Cos}\,\vartheta'''$ ist,
und wo man hat

$$\overset{0}{\varphi}_2 = 0''.0976$$

$$\overset{1}{\varphi}_2 = 5.4267$$

$$\overset{3}{\varphi}_2 = 0.4330$$

$$\overset{4}{\varphi}_2 = 6.9479$$

$$\overset{5}{\varphi}_2 = 0.3404$$

$$\overset{6}{\varphi}_2 = 0.0071$$

Substituirt man in den beyden vorhergehenden Ausdrücken von $\frac{dp''}{dt}$ und $\frac{dq''}{dt}$ diese Werthe von $\overset{0}{\varphi}_2$, $\overset{1}{\varphi}_2$..., und auch die von $p\,p'\,p'''$... $q\,q'\,q'''$... indem man für $\omega\;\omega'$ und $\vartheta\,\vartheta'$... die bekannten Werthe der Neigungen und der Knotenlängen aus I. Thle. S. 387 setzt, so erhält man

	$\frac{dp''}{dt}$	$\frac{dq''}{dt}$
☿	+ 0''.0084	— 0''.0085
♀	+ 0.0863	— 0.3099
♂	+ 0.0091	— 0.0103
♃	— 0.0220	— 0.1582
♄	— 0.0054	— 0.0138
♅	+ 0.0003	— 0.0002

$$\frac{dp''}{dt} = +\,0''.0767 \qquad \frac{dq''}{dt} = -\,0''.5009$$

Bleibt man also bey den ersten Potenzen von t stehen, so ist

$$p'' = +0''.0767\,t \quad \text{und} \quad q'' = -0''.5009\,t.$$

Will man aber auch die zweyten Potenzen von t berücksichtigen, so hat man, wenn man die vorhergehenden Werthe von $\frac{dp''}{dt}$ und $\frac{dq''}{dt}$ differentiirt

$$\frac{d^2p''}{dt^2} = \overset{0}{\varphi}_2 \cdot \frac{dq}{dt} + \overset{1}{\varphi}_2 \cdot \frac{dq'}{dt} + \overset{3}{\varphi}_2 \cdot \frac{dq'''}{dt} + \overset{4}{\varphi}_2 \cdot \frac{dq^{IV}}{dt} + \ldots$$

wo $q = \operatorname{tg}\omega \operatorname{Cos}\vartheta$, also $\frac{dq}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{\operatorname{Cos}\vartheta}{\operatorname{Cos}^2\omega} - \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{tg}\omega$ u.f.

und wo man für $\frac{d\omega}{dt}, \frac{d\omega'}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\vartheta'}{dt}, \ldots$ die schon oben erhaltenen Werthe substituirt. Eben so ist

$$\frac{d^2q''}{dt^2} = -\overset{0}{\varphi}_2 \cdot \frac{dp}{dt} - \overset{1}{\varphi}_2 \cdot \frac{dp'}{dt} - \overset{3}{\varphi}_2 \cdot \frac{dp'''}{dt} - ,$$

und wenn man so die Werthe von

$$\frac{dp''}{dt}, \frac{dq''}{dt}, \frac{d^2p''}{dt^2} \text{ und } \frac{d^2q''}{dt^2} \text{ kennt,}$$

so wird man sie in den Gleichungen (IV) substituiren, um die Werthe von p'' und q'' zu erhalten. Man hat so gefunden

$$p'' = 0''.0767\,t + 0''.0000215\,t^2$$
$$q'' = -0''.5009\,t + 0''.0000067\,t^2$$

§. 5.

Hier folgen die Störungen der sieben gröſseren Planeten nach Laplace Mec. cel. Vol. III. In den zuerst gegebenen säkulären Störungen ist dw die siderische Aenderung der Länge des Periheliums während einem Jahre von 365¼ Tag; de die jährliche Aenderung der Excentricität, $d\omega$ und $d\Omega$ die jährliche Aenderung der Neigung gegen die fixe Ekliptik von 1750 und gegen die wahre veränderliche Ekliptik; $d\vartheta$ und $d\Theta$ endlich die jährliche siderische Aenderung der Länge des Knotens in Beziehung auf die feste Ekliptik von 1750, und auf die bewegliche Ekliptik.

Säkuläre Störungen.

Merkur.

	dw	de	dω	dΩ	dϑ	dΘ
☿	...			...		—0.10
♀	3.02	0.011	—0.09	0.07	—1.76	—4.06
♁	0.93	0.005		...	—0.96	—0.96
♂	0.04	—0.001	0.00	0.00	—0.03	—0.14
♃	1.56	—0.006	—0.03	0.10	—1.40	—2.19
♄	0.07	0.000	0.00	0.01	—0.06	—0.12
♅	0.00	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00
Summe	5.62	0.009	—0.12	0.18	—4.21	—7.57

Venus.

	dw	de	dω	dΩ	dϑ	dΘ
☿	—4.32	—0.09	0.03	0.02	0.34	0.16
♀	...	...	...	...	...	—5.42
♁	—5.76	—0.10	...	...	—7.42	—7.42
♂	1.20	—0.01	0.00	—0.01	—0.07	—0.29
♃	6.44	—0.06	—0.04	0.03	—2.65	—5.13
♄	0.08	0.00	—0.01	0.00	—0.08	—0.29
♅	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	—2.36	—0.26	—0.02	0.04	—9.88	—18.39

Erde.

	dw	de
☿	—0.41	0.00
♀	3.81	0.02
♁	...	...
♂	1.55	—0.02
♃	6.80	—0.07
♄	0.19	0.00
♅	0.01	0.00
	11.95	—0.07

Mars.

	dw	de	$d\omega$	$d\Omega$	$d\vartheta$	$d\Theta$
☿	0.02	0,00	0.00	0.00	0.05	—0.31
♀	0.50	0.00	—0.01	0.13	0.31	—8.58
♁	2.12	0.02	. . .	. . .	—1.96	—1.94
♂	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	—0.43
♃	12.31	0.16	—0.26	—0.13	—7.85	—11.02
♄	0.69	0.01	—0.03	—0.01	—0.27	—0.46
♅	0.01	0.00	0.00	0.00	—0.01	—0.10
	15.65	0.19	—0.30	—0.01	—9.73	—22.84

Jupiter.

	dw	de	$d\omega$	$d\Omega$	$d\vartheta$	$d\Theta$
☿	0.00	0.00	0.00	—0.01	0.00	—0.31
♀	0.01	0.00	0.00	—0.13	0.01	—12.83
♁	0.01	0.00	. . .	. . .	—0.01	—0.01
♂	0.00	0.00	0.00	—0.01	0.00	—0.38
♃	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	—6.94
♄	6.46	0.27	0.07	—0.07	6.51	5.87
♅	0.13	0.00	0.00	0.00	—0.04	—0.07
	6.61	0.27	0.07	—0.22	6.46	—14.67

Saturn.

	dw	de	$d\omega$	$d\Omega$	$d\vartheta$	$d\Theta$
☿	0.00	0.00	0.00	—0.01	0.00	—0.11
♀	0.00	0.00	0.00	—0.19	0.00	—5.88
♁	0.00	0.00	. . .		0.00	0.00
♂	0.00	0.00	0.00	—0.01	0.00	—0.14
♃	15.79	—0.55	0.10	0.06	—8.73	—12.29
♄			. . .			—0.34
♅	0.32	0.01	0.00	0.00	—0.27	—0.27
	16.11	—0.54	0.10	—0.15	—9.00	—19.03

Uranus.

	dw	de	dω	dΩ	dϑ	dΘ
☿	0.00	0.00	0.00	—0.01	0.00	—0.79
♀	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	—23.81
♁	0.00	0.00			0.00	0.00
♂	0.00	0.00	0.00	—0.01	0.00	—0.94
♃	1.21	—0.01	—0.01	0.06	0.49	—10.20
♄	1.24	—0.05	—0.04	—0.03	2.20	1.35
♅	...				..	—0.01
	2.45	—0.06	—0.05	0.02	2.69	—34.40

Periodische Störungen.

In den nun folgenden Ausdrücken der periodischen Störungen bezeichnet l l′ l″ l‴ l^{IV} l^{V} l^{VI} die mittlere Länge von Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, und Uranus, so wie w w′ w″.... die Länge der Perihelien der Bahn von Merkur, Venus, Erde.... Bey den Störungen der Länge wurden im Allgemeinen diejenigen weggelassen, die unter einer Sekunde sind, so wie bey denen des Radius Vectors, die, welche unter 0.000005 betragen.

Merkur.

$$
\begin{aligned}
d\nu = & - 1''.5 \text{ Sin } 2\,(l' - l) \\
& - 4.0 \text{ Sin } (2l' - l - w) \\
& - 1.7 \text{ Sin } (3l' - 2l - w) \\
& - 3.3 \text{ Sin } (2l^{IV} - l - w) \\
& + 1.7 \text{ Sin } (3l - 5l' - 43^{\circ}.31) \\
& - 8.5 \text{ Sin } (2l - 5l' + 30^{\circ}.22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dr = & \ 0.000001 \text{ Cos } 2\,(l' - l) \\
& - 0.000001 \text{ Cos } (3l' - 2l - w) \\
& - 0.000003 \text{ Cos } (2l^{IV} - l - w) \\
& + 0.000002 \text{ Cos } (3l - 5l' - 42^{\circ}.97)
\end{aligned}
$$

Die Störungen der Breite betragen alle nur kleine Theile einer Sekunde.

Venus.

$$
\begin{aligned}
d\nu' = & + 5''.0 \text{ Sin } (l'' - l') \\
& + 11.4 \text{ Sin } 2\,(l'' - l') \\
& - 7.2 \text{ Sin } 3\,(l'' - l')
\end{aligned}
$$

$- 1.1 \sin 4 (l'' - l')$ $\quad dr' = + 0.00002 \cos 2 (l'' - l')$
$+ 2.8 \sin (l^{IV} - l)$ $\quad - 0.00001 \cos 3 (l'' - l')$
$- 1.6 \sin (3l'' - 2l' - w')$ $\quad - 0.00001 \cos (l^{IV} - l')$
$+ 4.8 \sin (3l'' - 2l' - w'')$
$+ 2.2 \sin (5l'' - 4l' - w'')$
$- 1.1 \sin (3l''' - 2l' - w''')$
$- 1.5 \sin (l^{IV} - w^{IV})$
$+ 1.5 \sin (5l'' - 3l' + 20^\circ.91)$
$+ 2.0 \sin (3l''' - l' + 65.88)$
$+ 1.2 \sin (2l - 5l' + 30.22)$

Erde.

$$
\begin{aligned}
dv'' = &+ 5''.3 \sin (l' - l'') \\
&- 6.0 \sin 2 (l' - l'') \\
&+ 3.5 \sin 2 (l''' - l'') \\
&+ 7.1 \sin (l^{IV} - l'') \\
&- 2.6 \sin 2 (l^{IV} - l'') \\
&- 3.7 \sin (3l'' - 2l' - w'') \\
&+ 1.1 \sin (3l'' - 2l' - w') \\
&- 2.3 \sin (4l'' - 3l' - w'') \\
&- 1.1 \sin (2l''' - l'' - w'') \\
&+ 2.1 \sin (2l''' - l'' - w''') \\
&- 2.5 \sin (l^{IV} - w^{IV}) \\
&- 1.5 \sin (2l^{IV} - l'' - w'') \\
&+ 1.1 \sin (5l'' - 3l' + 21^\circ.04) \\
&+ 1.0 \sin (4l''' - 2l'' - 67.81)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dr'' = &- 0.00001 \cos (l' - l'') \\
&+ 0.00002 \cos 2 (l' - l'') \\
&+ 0.00001 \cos 2 (l''' - l'') \\
&+ 0.00002 \cos (l^{IV} - l'') \\
&- 0.00001 \cos 2 (l^{IV} - l'') \\
&- 0.00001 \cos (4l'' - 3l' - w'')
\end{aligned}
$$

Die Störungen der Breite der Erde endlich sind:

$$
\begin{aligned}
ds'' = &+ 0''.1 \sin (2l'' - l' - \vartheta') \\
&+ 0.2 \sin (4l'' - 3l' - \vartheta') \\
&+ 0.2 \sin (2l^{IV} - l' - \vartheta^{IV})
\end{aligned}
$$

wo ϑ, ϑ' . . . die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn des

Merkur, der Venus... in der Ekliptik sind. Zu diesen Werthen von dv'' und dr'' wird nach Cap. IX §. 7 noch die Störung des Mondes $dv'' = 9''.29 \,\text{Sin}(☾ - ☉)$ und $dr'' = 0.000044 \,\text{Cos}\,(☾ - ☉)$ gesetzt.

Mars.

$$
\begin{aligned}
dv''' = &+ 7''.0 \,\text{Sin}\,(l''-l''') \\
&- 1.0 \,\text{Sin}\,2\,(l''-l''') \\
&+ 24.4 \,\text{Sin}\,(l^{IV}-l''') \\
&- 13.6 \,\text{Sin}\,2\,(l^{IV}-l''') \\
&- 1.2 \,\text{Sin}\,3\,(l^{IV}-l''') \\
&+ 1.3 \,\text{Sin}\,(l^{V}-l''') \\
&+ 1.1 \,\text{Sin}\,(2l'''-l'-w''') \\
&- 10.1 \,\text{Sin}\,(2l'''-l''-w''') \\
&+ 5.1 \,\text{Sin}\,(2l'''-l''-w'') \\
&- 6.5 \,\text{Sin}\,(3l'''-2l''-w''') \\
&+ 5.5 \,\text{Sin}\,(l^{IV}-w''') \\
&- 5.4 \,\text{Sin}\,(l^{IV}-w^{IV}) \\
&- 23.6 \,\text{Sin}\,(2l^{IV}-l'''-w''') \\
&+ 2.6 \,\text{Sin}\,(2l^{IV}-l'''+w^{IV}) \\
&+ 2.3 \,\text{Sin}\,(3l^{IV}-2l'''-w''') \\
&- 3.6 \,\text{Sin}\,(3l^{IV}-2l'''-w^{IV}) \\
&- 2.8 \,\text{Sin}\,(2l'''-l^{IV}-w''') \\
&+ 1.3 \,\text{Sin}\,(3l'''-2l^{IV}-w''') \\
&- 1.8 \,\text{Sin}\,(2l^{V}-l'''-w''') \\
&- 6.9 \,\text{Sin}\,(3l'''-l'+65^{\circ}.44) \\
&+ 1.4 \,\text{Sin}\,(3l'''-l''+73.20) \\
&+ 4.4 \,\text{Sin}\,(4l'''-2l''+67.81) \\
&+ 2.7 \,\text{Sin}\,(5l'''-3l''+68.38) \\
&- 1.5 \,\text{Sin}\,(2l^{IV}+60.12) \\
&+ 1.3 \,\text{Sin}\,(l^{IV}-l'''+54.69)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dr''' = &- 0.00002 \,\text{Cos}\,(l''-l''') \\
&+ 0.00008 \,\text{Cos}\,(l^{IV}-l''') \\
&- 0.00007 \,\text{Cos}\,2\,(l^{IV}-l''') \\
&- 0.00002 \,\text{Cos}\,(3l'''-2l''-w''') \\
&- 0.00006 \,\text{Cos}\,(2l^{IV}-l'''-w''') \\
&- 0.00002 \,\text{Cos}\,(3l^{IV}-2l''-w^{IV})
\end{aligned}
$$

In diesen und den folgenden Ausdrücken von dr sind alle Gröfsen unter 0.000015 weggelassen worden. Die Störungen des Mars in Breite sind unmerklich.

Die nun folgenden Störungen der drey letzten Planeten sind aus den neuen Tafeln Bouvards (Paris 1821) genommen. Sie setzen die Excentricitäten voraus $e^{IV} = 0.048162$, $e^{V} = 0.056150$ $e^{VI} = 0.046611$

Die mittleren Längen dieser drey Planeten sind

$$l^{IV} = 81^{\circ}.87204 + 30.3490885\ t$$
$$l^{V} = 123.09150 + 12.2211463\ t$$
$$l^{VI} = 173.50462 + 4.2849013\ t$$

wo t die Zeit in Julianischen Jahren (von $365\frac{1}{4}$ Tag) seit der Pariser Mitternacht des 1. Januars 1800 bezeichnet.

Eben so sind die Längen der Perihelien:

$$w^{IV} = 11.12719 + 0.0018440\ t$$
$$w^{V} = 89.13901 + 0.0053629\ t$$
$$w^{VI} = 167.50655 + 0.0145834\ t$$

und die Längen der aufsteigenden Knoten der Bahnen in der Ekliptik

$$\vartheta^{IV} = 98.42915 + 0.0095342\ t$$
$$\vartheta^{V} = 111.93521 + 0.0085210\ t$$
$$\vartheta^{VI} = 72.98917 + 0.0039347\ t$$

Ferner sind die grofsen Ungleichheiten dieser Planeten

$$A^{IV} = +(0^{\circ}.32962 - 0.0000096t) \text{Sin}(5l^{V} - 2l^{IV} + 4^{\circ}.17 - 0^{\circ}0212\ t)$$
$$- 0^{\circ}.00334 \text{ Sin } 2(5l^{V} - 2l^{IV} + 4.17 - 0.0212\ t)$$

$$A^{V} = -(0^{\circ}.79796 - 0.0000223\ t) \text{Sin}(5l^{V} - 2l^{IV} + 4^{\circ}.16 - 0^{\circ}.0213\ t)$$
$$+ 0.00847 \text{ Sin } 2(5l^{V} - 2l^{IV} + 4.16 - 0.0213\ t)$$
$$+ 0.00938 \text{ Sin}(3l^{VI} - l^{IV} - 85^{\circ}.57)$$

$$A^{VI} = -(0^{\circ}.03530 - 0.000004\ t) \text{Sin}(3l^{VI} - l^{V} - 88^{\circ}.56 - 0^{\circ}.0048\ t)$$

Endlich seye $\lambda^{IV} = l^{IV} + A^{IV}$, $\lambda^{V} = l^{V} + A^{V}$ und $\lambda^{VI} = l^{VI} + A^{VI}$

Dieses vorausgesetzt, hat man für die Störungen Jupiters

$$d\nu = -0^{\circ}.0224 \text{ Sin}(\lambda^{IV} - \lambda^{V} - 1^{\circ}.15)$$
$$+ 0.0555 \text{ Sin}(2\lambda^{IV} - 2\lambda^{V} - 1.17)$$
$$+ 0.0045 \text{ Sin}(3\lambda^{IV} - 3\lambda^{V})$$
$$+ 0.0010 \text{ Sin}(4\lambda^{IV} - 4\lambda^{V})$$
$$+ 0.0005 \text{ Sin}(5\lambda^{IV} - 5\lambda^{V} + 11.95)$$
$$+ 0.0367 \text{ Sin}(\lambda^{IV} - 2\lambda^{V} - 13.09 + 0.00423\ t)$$
$$+ 0.0048 \text{ Sin}(2\lambda^{IV} - 4\lambda^{V} + 57.20)$$
$$+ 0.0009 \text{ Sin}(5\lambda^{IV} - 10\lambda^{V} + 51.36)$$
$$+ 0.0231 \text{ Sin}(2\lambda^{IV} - 3\lambda^{V} - 61.56 + 0.00731\ t)$$
$$- 0.0004 \text{ Sin}(4\lambda^{IV} - 6\lambda^{V} + 54.43)$$

$$
\begin{aligned}
&+0.0449 \,\mathrm{Sin}\,(3\lambda^{IV}-5\lambda^{V}+56.38+0.0140\,t)\\
&-0.0042 \,\mathrm{Sin}\,(3\lambda^{IV}-4\lambda^{V}-62.80)\\
&+0.0034 \,\mathrm{Sin}\,(3\lambda^{IV}-2\lambda^{V}-8.81)\\
&+0.0026 \,\mathrm{Sin}\,(3\lambda^{V}-\lambda^{IV}+68.20)\\
&+0.0031 \,\mathrm{Sin}\,(\lambda^{V}+44.95)\\
&-0.0014 \,\mathrm{Sin}\,(2\lambda^{V}+45.75)\\
&+0.0031 \,\mathrm{Sin}\,(4\lambda^{IV}-5\lambda^{V}+58.01)\\
&-0.0014 \,\mathrm{Sin}\,(2\lambda^{IV}-\lambda^{V}-16.32)\\
&+0.0003 \,\mathrm{Sin}\,(4\lambda^{IV}-3\lambda^{V}-2.65)\\
&-0.0004 \,\mathrm{Sin}\,(\lambda^{IV}-\lambda^{VI})
\end{aligned}
$$

Da nun die jährliche Präcession der Nachtgleichen $50''.10 = 0^{\circ}.01392$ ist, so wird für die gegebene Zeit t nach 1800.00 die wahre heliocentrische Länge Jupiters in seiner Bahn, vom mittleren Aequinoctium gezählt, seyn

$$L^{IV} = \lambda^{IV} + 0^{\circ}.01392\,t + d\nu + B$$

wo B die elliptische Gleichung der Bahn ist, welche letzte nicht mit dem Argumente der mittleren Anomalie $l^{IV}-w^{IV}$, sondern mit der durch die große Ungleichheit corrigirten mittleren Anomalie $\lambda^{IV}-w^{IV}$ gesucht werden muſs. Denn diese Gleichung der Bahn soll mit derjenigen mittleren Anomalie bestimmt werden, die in der That in dem Falle statt haben würde, wenn weder eine elliptische Bewegung des Planeten, noch eine Störung desselben durch die anderen Planeten existirte, daher die mittlere Länge l^{IV} wenigstens zuerst durch die vorzüglichsten Störungen, oder durch die große Ungleichheit corrigirt werden muſs. Diese Gleichung ist

$$
\begin{aligned}
B = &+(5^{\circ}.5174+0^{\circ}.0001757\,t)\,\mathrm{Sin}\,(\lambda^{IV}-w^{IV})\\
&+(0.1660+0.00001053\,t)\,\mathrm{Sin}\,2\,(\lambda^{IV}-w^{IV})\\
&+0.0069\,\mathrm{Sin}\,3\,(\lambda^{IV}-w)\\
&+0.0003\,\mathrm{Sin}\,4\,(\lambda^{IV}-w)
\end{aligned}
$$

Für die Entfernung Jupiters von der Sonne ist eben so:

$$
\begin{aligned}
r^{IV} = &\;5.20876+0.0000384\,t\\
&\left\{\begin{aligned}
&-(0.25036+0.0007964\,t)\,\mathrm{Cos}\,(\lambda^{IV}-w^{IV})\\
&-(0.00602+0.0000384\,t)\,\mathrm{Cos}\,2\,(\lambda^{IV}-w^{IV})\\
&-(0.00022+0.0000021\,t)\,\mathrm{Cos}\,3\,(\lambda^{IV}-w^{IV})\\
&-0.00009\,\mathrm{Cos}\,4\,(\lambda^{IV}-w^{IV})
\end{aligned}\right.\\
&+0.00066\,\mathrm{Cos}\,(\lambda^{IV}-\lambda^{V}-1^{\circ}.35)\\
&-0.00280\,\mathrm{Cos}\,(2\lambda^{IV}-2\lambda^{V}-1.03)\\
&-0.00029\,\mathrm{Cos}\,(3\lambda^{IV}-3\lambda^{V})
\end{aligned}
$$

$$— 0.00007 \text{ Cos}(4\lambda^{IV}—4\lambda^{V})$$
$$— 0.00002 \text{ Cos}(5\lambda^{IV}—5\lambda^{V})$$
$$+ 0.00029 \text{ Cos}(\lambda^{IV}—2\lambda^{V}—22^{\circ}.21+0.0052\, t)$$
$$+ 0.00010 \text{ Cos}(2\lambda^{IV}—4\lambda^{V}+51.07)$$
$$— 0.00089 \text{ Cos}(2\lambda^{IV}—3\lambda^{V}—62.47+0.0073\, t)$$
$$— 0.00199 \text{ Cos}(3\lambda^{IV}—5\lambda^{V}+56.29+0.0140\, t)$$
$$+ 0.00024 \text{ Cos}(3\lambda^{IV}—4\lambda^{V}—62.15)$$
$$— 0.00013 \text{ Cos}(3\lambda^{IV}—2\lambda^{V}—7.58)$$
$$+ 0.00007 \text{ Cos}(\lambda^{V}+29.22)$$
$$— 0.00008 \text{ Cos}(2\lambda^{V}+11.02)$$
$$+ 0.00009 \text{ Cos}(4\lambda^{IV}—5\lambda^{V}—14.39)$$
$$— 0.00029 \text{ Cos}(5\lambda^{V}—2\lambda^{IV}—12.15)$$

wo die vier eingeschlossenen Glieder die elliptische Aenderung der Gröſse r bezeichnen.

Endlich ist die Poldistanz Jupiters

$$p^{IV} = 90 — (1^{\circ}.3144—0.000063\, t) \text{ Sin}(L^{IV}—\Omega^{IV})$$
$$— 0.0002 \text{ Sin}(\lambda^{IV}—2\lambda^{V}—54^{\circ}.26)$$
$$— 0.0003 \text{ Sin}(2\lambda^{IV}—3\lambda^{V}—54.26)$$
$$— 0.0010 \text{ Sin}(3\lambda^{IV}—5\lambda^{V}+54.11)$$

Eben so ist für Saturn die wahre Länge in der Bahn:

$$L^{V} = \lambda^{V} + 0^{\circ}.01392\, t$$
$$\left\{\begin{array}{l} + (6^{\circ}.4318—0.000355\, t) \text{ Sin}(\lambda^{V} — w^{V}) \\ + (0.2255—0.000025\, t) \text{ Sin } 2(\lambda^{V} — w^{V}) \\ + (0.0110—0.000002\, t) \text{ Sin } 3(\lambda^{V} — w^{V}) \\ + 0.0006 \text{ Sin } 4(\lambda^{V} — w^{V}) \end{array}\right.$$
$$+ 0.0080 \text{ Sin}(\lambda^{IV}—\lambda^{V}+78.06)$$
$$— 0.0083 \text{ Sin}(2\lambda^{IV}—2\lambda^{V}—5.71)$$
$$— 0.0018 \text{ Sin } 3(\lambda^{IV}—\lambda^{V})$$
$$— 0.0005 \text{ Sin } 4(\lambda^{IV}—\lambda^{V})$$
$$— (0.1161+0.000006\, t) \text{ Sin}(\lambda^{IV}—2\lambda^{V}—14.62+0.003750\, t)$$
$$— (0.1853—0.000004\, t) \text{ Sin}(2\lambda^{IV}—4\lambda^{V}+56.87+0.013659\, t)$$
$$— 0.0134 \text{ Sin}(3\lambda^{V}—\lambda^{IV}+77.36—0.009598\, t)$$
$$— 0.0067 \text{ Sin}(2\lambda^{IV}—3\lambda^{V}+14.63—0.003441\, t)$$
$$+ 0.0031 \text{ Sin}(\lambda^{IV}+85.60)$$
$$— 0.0041 \text{ Sin}(4\lambda^{IV}—9\lambda^{V}+51.83)$$
$$+ 0.0014 \text{ Sin}(3\lambda^{IV}—4\lambda^{V}—62.78)$$
$$+ 0.0008 \text{ Sin}(2\lambda^{IV}—\lambda^{V}+31.71)$$

$$+ 0.0008 \sin(3\lambda^{IV} - 5\lambda^{V} + 57.15)$$
$$+ 0.0004 \sin(4\lambda^{IV} - 5\lambda^{V} - 62.94)$$
$$- 0.0028 \sin(\lambda^{V} - \lambda^{VI})$$
$$+ 0.0044 \sin(2\lambda^{V} - 2\lambda^{VI})$$
$$+ 0.0006 \sin(3\lambda^{V} - 3\lambda^{VI} - 68.45)$$
$$+ 0.0083 \sin(2\lambda^{V} - 3\lambda^{VI} + 23.93)$$
$$+ 0.0030 \sin(\lambda^{V} - 2\lambda^{VI} + 72.20)$$
$$+ 0.0005 \sin(3\lambda^{V} - 2\lambda^{VI} - 88.15)$$
$$+ 0.0004 \sin(\lambda^{VI} - 41.63)$$

und der Radius Vector

$$r^{V} = 9.55778 - 0.000017\, t$$
$$\left\{ \begin{array}{l} - (0.53499 + 0.000030\, t) \cos(\lambda^{V} - w^{V}) \\ - (0.01500 + 0.000002\, t) \cos 2(\lambda^{V} - w^{V}) \\ - (0.00063) \cos 3(\lambda^{V} - w^{V}) \\ - 0.00003 \cos 4(\lambda^{V} - w^{V}) \end{array} \right.$$
$$- 0.00034 \cos(\lambda^{V} - 10.35)$$
$$+ 0.00807 \cos(\lambda^{IV} - \lambda^{V} + 3.96)$$
$$+ 0.00138 \cos 2(\lambda^{IV} - \lambda^{V})$$
$$+ 0.00032 \cos 3(\lambda^{IV} - \lambda^{V})$$
$$+ 0.00010 \cos 4(\lambda^{IV} - \lambda^{V})$$
$$+ 0.00004 \cos 5(\lambda^{IV} - \lambda^{V})$$
$$+ (0.00534) \cos(\lambda^{IV} - 2\lambda^{V} - 11.76 + 0.004095\, t)$$
$$+ (0.01513) \cos(2\lambda^{IV} - 4\lambda^{V} + 56.69 + 0.013626\, t)$$
$$- 0.00117 \cos(3\lambda^{V} - \lambda^{IV} - 90.21)$$
$$- 0.00138 \cos(2\lambda^{IV} - 3\lambda^{V} - 23.32)$$
$$- 0.00023 \cos(3\lambda^{IV} - 4\lambda^{V} - 61.35)$$
$$+ 0.00351 \cos(5\lambda^{V} - 2\lambda^{IV} + 13.03)$$
$$- 0.00012 \cos(\lambda^{IV} - 53.14)$$
$$+ 0.00012 \cos(2\lambda^{IV} - \lambda^{V} - 29.70)$$
$$+ 0.00016 \cos(\lambda^{V} - \lambda^{VI})$$
$$- 0.00042 \cos 2(\lambda^{V} - \lambda^{VI})$$
$$- 0.00005 \cos 3(\lambda^{V} - \lambda^{VI})$$
$$- 0.00066 \cos(2\lambda^{V} - 3\lambda^{VI} + 23.73)$$

$$p^{V} = 90° - (2.4933 - 0.000043\, t) \sin(L^{V} - \vartheta^{V})$$
$$+ 0.0009 \sin(\lambda^{IV} - 2\lambda^{V} - 54.26)$$
$$+ 0.0025 \sin(2\lambda^{IV} - 4\lambda^{V} + 59.51)$$
$$- 0.0005 \sin(\lambda^{IV} + 54.26)$$

Endlich hat man noch für den wahren heliocentrischen Ort des Uranus

$$
\begin{aligned}
L^{vi} = \lambda^{vi} &+ 0.01392\ t \\
&\left\{\begin{aligned}
&+ (5.3485 - 0.000029\ t)\ \mathrm{Sin}\ (\lambda^{vi} - w^{vi}) \\
&+ (0.1560 - 0.000002\ t)\ \mathrm{Sin}\ 2\ (\lambda^{vi} - w^{vi}) \\
&+ 0.0063\ \mathrm{Sin}\ 3\ (\lambda^{vi} - w^{vi}) \\
&+ 0.0003\ \mathrm{Sin}\ 4\ (\lambda^{vi} - w^{vi})
\end{aligned}\right. \\
&+ 0.0062\ \mathrm{Sin}\ (\lambda^{v} - \lambda^{vi} + 21.20) \\
&- 0.0011\ \mathrm{Sin}\ 2\ (\lambda^{v} - \lambda^{vi}) \\
&- 0.0393\ \mathrm{Sin}\ (\lambda^{v} - 2\lambda^{vi} + 71.35 + 0.00438\ t) \\
&- 0.0005\ \mathrm{Sin}\ (2\lambda^{v} - 4\lambda^{vi} + 38.58) \\
&+ 0.0145\ \mathrm{Sin}\ (\lambda^{iv} - \lambda^{vi}) \\
&- 0.0009\ \mathrm{Sin}\ (\lambda^{iv} - 2\lambda^{vi} - 14.85) \\
&+ 0.0007\ \mathrm{Sin}\ (2\lambda^{v} - 3\lambda^{vi} + 23.33) \\
&+ 0.0004\ \mathrm{Sin}\ (\lambda^{v} + 4.58) \\
&+ 0.0003\ \mathrm{Sin}\ (2\lambda^{iv} - \lambda^{vi} - 10.34)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r^{vi} = 19.212098 & \\
&\left\{\begin{aligned}
&- (0.89488 - 0.0000048\ t)\ \mathrm{Cos}\ (\lambda^{vi} - w^{vi}) \\
&- 0.02088\ \mathrm{Cos}\ 2\ (\lambda^{vi} - w^{vi}) \\
&- 0.00073\ \mathrm{Cos}\ 3\ (\lambda^{vi} - w^{vi}) \\
&- 0.00003\ \mathrm{Cos}\ 4\ (\lambda^{vi} - w^{vi})
\end{aligned}\right. \\
&+ 0.00339\ \mathrm{Cos}\ (\lambda^{v} - \lambda^{vi} + 5.03) \\
&+ 0.00039\ \mathrm{Cos}\ 2\ (\lambda^{v} - \lambda^{vi}) \\
&+ 0.00581\ \mathrm{Cos}\ (\lambda^{v} - 2\lambda^{vi} + 74.08) \\
&+ 0.00489\ \mathrm{Cos}\ (\lambda^{iv} - \lambda^{vi}) \\
&+ 0.00058\ \mathrm{Cos}\ (2\lambda^{v} - 3\lambda^{vi} + 51.04) \\
&- 0.00072\ \mathrm{Cos}\ (3\lambda^{vi} - \lambda^{v} + 75.01)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p^{vi} = 90^{\circ} &- 0.7745\ \mathrm{Sin}\ (L^{vi} - \vartheta^{vi}) \\
&- 0.0008\ \mathrm{Sin}\ (\lambda^{v} - 2\lambda^{vi} - 54.14)
\end{aligned}
$$

ZWÖLFTES KAPITEL.

Störungen des Mondes.

§. 1.

Da unter den Störungen, die der Mond in seiner elliptischen Bewegung um die Erde leidet, bloſs die der Sonne noch beträchtlich sind, so wird die Entwicklung dieser Störungen des Mondes durch die Sonne bloſs eine Anwendung der vorhergehenden Auflösung des Problemes der drey Körper seyn, und es scheint, daſs dieselben Ausdrücke, welche oben die Störungen der Planeten unter einander gegeben haben, auch für diese Störungen des Mondes hinreichen werden.

Ist 3431″ die Horizontalparallaxe des Mondes, und 8″. 6 die der Sonne, so ist

$$\alpha = \frac{8.6}{3431} = 0.0025066$$

also $b^0_{-\frac{1}{2}} = 2.000031 \qquad b^1_{-\frac{1}{2}} = -0.002507$

$$b^0_{\frac{1}{2}} = 2.000031 \; b^1_{\frac{1}{2}} = 0.002507 \text{ und } b^1_{\frac{3}{2}} = 0.070520.$$

Weiter ist die mittlere Bewegung des Mondes während einem Jahre n=17325600″, und die Masse der Sonne m′=354790. Daraus folgt (nach Kap. X. §. 4.)

sider. jährliche Bewegung der Knoten $= -\varphi^1_0 = -\frac{m'n}{4}\alpha^2 b^1_{\frac{3}{2}}$ $= -72604'' = -20^\circ\ 10'\ 4''$, die Beobachtungen geben aber 19° 20′ 33″ also 0° 49′ 31″ weniger.

Die säkuläre Bewegung der Neigung der Mondsbahn ist Null, weil (Kap. X. §. 4. Gleichg. e) die Gröſse ω′ ebenfalls Null ist. Dasselbe gilt von der säkulären Aenderung der Excentricität, weil (L. c. Gleichung c) das Argument (w′—w) seine ganze Revolution schon in neun Jahren zurücklegt. Die säkuläre Bewegung der Apsiden endlich ist (ibid. Gleichg. d) gleich $+\varphi^1_0$, also gleich

jener der Knoten, nur in ihren Zeichen verschieden. Allein den Beobachtungen zu Folge ist die siderische jährliche directe Bewegung der Apsiden 40° 38′ 56″, also beynahe das Doppelte von der rückgängigen Bewegung der Knoten. Dieselbe viel zu kleine Bewegung der Apsiden fand auch Newton (Princ. L. I. Prop. 45) und Clairaut (Mem. de l'Acad. R. des Scienc. 1745), und der letzte wollte daraus die Folge ziehen, dafs das Gesetz der allgemeinen Schwere nicht die Form $\frac{A}{r^2}$, sondern die mehr zusammengesetzte $\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^m}$ haben müsse, wo B sehr klein, und m beträchtlich gröfser als 2 ist, damit das letzte Glied $\frac{B}{r^m}$ für sehr grofse Distanzen r, wie diejenigen, welche die Planeten von einander und von der Sonne trennen, unmerklich ist, aber bey kleineren Distanzen, wie die des Mondes von der Erde, noch seinen Einflufs äufsern könne, wo dann die Werthe von B und m so bestimmt werden sollen, dafs sie der beobachteten Bewegung der Apsiden des Mondes genug thuen. Allein ein Jahr später fand Clairaut, dafs er bey seiner ersten Berechnung nicht aufmerksam genug auf die kleinen Glieder der Störungsgleichungen gewesen sey, welche erst durch die Integration merklich werden (Kap. VIII. §. 2. I.), und dafs mehrere der zahlreichen Ungleichheiten des Mondes, welche hier durch die Analyse zu entwickeln sind, so grofse Werthe haben, dafs sie noch merkbar eine auf die andere einwirken, und dafs endlich die in dem Vorhergehenden gegebenen Reihen, wenn man sie auf die Störungen des Mondes durch die Sonne anwendet, zu wenig convergiren, um die Endresultate mit Sicherheit zu geben. Wir müssen daher hier einen andern Weg einschlagen, zu jenen Resultaten zu gelangen, und den jetzt folgenden Untersuchungen die drey letzten Gleichungen A, B, C des Kap. II. zu Grunde legen, indem wir die dort gebrauchten Bezeichnungen auch hier beybehalten. Es sind also M m m′ die Massen der Erde, des Mondes und der Sonne; x y z die Koordinaten des Mondes gegen den Mittelpunkt der Erde, x′ y′ z′ die Koordinaten der Sonne gegen den Mittelpunkt der Erde, und $xu = \text{Cos}\, v$, $yu = \text{Sin}\, v$, $zu = s$, so wie $x'u' = \text{Cos}\, v'$, $y'u' = \text{Sin}\, v'$, $z'u' = s'$, wo s s′ die Tangente der Breite des Mondes und der Sonne, also $s' = 0$ und wo $r^2 = \frac{1 + s^2}{u^2} = x^2 + y^2 + z^2$, und eben so $r'^2 = \frac{1}{u'^2} = x'^2 + y'^2 + z'^2$ ist.

Dieses vorausgesetzt, hat man nach d. a. O.

$$Q = \frac{u}{\sqrt{1 + s^2}} + m'u + \frac{m'u'^3}{4u^2} \cdot (1 + 3\, \text{Cos}\, 2\, (v - v') - 2\, s^2)$$

also auch, wenn man diesen Werth von Q, in Beziehung auf ν, s und u differentiirt

$$\left(\frac{dQ}{d\nu}\right) = -\frac{3m'u'^3}{2u^2}\,\mathrm{Sin}\,2(\nu-\nu')$$

$$\left(\frac{dQ}{ds}\right) = -\frac{us}{(1+s)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'u'^3 s}{u^2}$$

$$\left(\frac{dQ}{du}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} - \frac{m'u'^3}{2u^3}(1+3\,\mathrm{Cos}\,2(\nu-\nu')-2s^2)$$

und endlich

$$\left(\frac{dQ}{du}\right)+\frac{s}{u}\left(\frac{dQ}{ds}\right) = \frac{1}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'u'^3}{2u^3}(1+3\,\mathrm{Cos}\,2(\nu-\nu'))$$

§. 2.

Wenn die Sonne keine Wirkung auf den Mond äuſserte, so wäre $Q = \frac{1}{r} = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}}$, also auch

$$\left(\frac{dQ}{d\nu}\right) = 0,\ \left(\frac{dQ}{du}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}},\ \left(\frac{dQ}{ds}\right) = -\frac{us}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und die angeführten drey Gleichungen A, B, C des Kap. II. würden in folgende sehr einfache übergehen

$$dt - \frac{d\nu}{u^2h} = 0 \ldots\ldots (A')$$

$$\frac{d^2u}{d\nu^2} + u - \frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \ldots\ldots (B')$$

$$\frac{d^2s}{d\nu^2} + s = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (C')$$

Die letzte derselben gibt zum Integral

$$s = \gamma\,\mathrm{Sin}\,(\nu-\vartheta)$$

wo $\gamma\,\vartheta$ die beständigen Gröſsen der Integration bezeichnen, nämlich γ die Neigung, oder genauer die Tangente der Neigung der Mondsbahn, und ϑ die Länge ihres aufsteigenden Knotens in der Ekliptik.

Eben so gibt die zweyte der drey letzten Gleichungen

$$u = \frac{1}{h^2(1+u^2)}\cdot\left[\sqrt{1+s^2} + e\,\mathrm{Cos}\,(\nu-w)\right]$$

wo wieder e und w constante Gröſsen, e die Excentricität der Mondsbahn, und w die Länge ihres Perigäums bezeichnet.

Da aber e und γ nur klein sind, so hat man, wenn man die Gröſsen γ^3, γ^4 , $e\gamma^2$, $e^2\gamma$ vernachlässigt

$$u = \frac{1}{h^2(1+u^2)}\left\{1 + \frac{s^2}{2} + e \operatorname{Cos}(\nu - w)\right\}$$

oder

$$u = \frac{1}{h^2(1+u^2)}\cdot\left\{1 + \frac{\gamma^2}{4} + e \operatorname{Cos}(\nu - w) - \frac{\gamma^2}{4}\operatorname{Cos} 2(\nu - \vartheta)\right\}$$

Wir werden aber am Ende dieses Kapitels sehen, daſs durch die Wirkung der Sonne die Knoten der Mondsbahn sowohl, als ihre Apsiden eine beträchtliche Aenderung leiden. Sey also $(1-c)\nu$ das Vorrücken der Apsiden, und $(g-1)\nu$ das Zurückweichen der Knoten der Mondsbahn, so sind die vorhergehenden Ausdrücke, wenn man in ihnen $g\nu$ und $c\nu$ statt ν setzt

$$s = \gamma \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta)$$

$$u = \frac{1}{h^2(1+\gamma^2)}\cdot\left\{1 + \frac{\gamma^2}{4} + e \operatorname{Cos}(c\nu - w) - \frac{\gamma^2}{4}\operatorname{Cos} 2(g\nu - \vartheta)\right\}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in der ersten unserer drey Gleichungen des Kap. II., so erhält man, wenn man die Wirkung der Sonne wegläſst, oder $\left(\frac{dQ}{d\nu}\right) = 0$ setzt,

$$dt = \frac{d\nu}{u^2 h} = \frac{h^3(1+\gamma^2)^2 d\nu}{\left\{1 + \frac{\gamma^2}{4} + e \operatorname{Cos}(\nu - w) - \frac{\gamma^2}{4}\operatorname{Cos} 2(g\nu - \vartheta)\right\}^2}$$

also auch, da e und γ nur kleine Gröſsen sind,

$$dt = h^3 d\nu(1+2\gamma^2)\left\{1 - \frac{\gamma^2}{2} - 2e\operatorname{Cos}(c\nu - w) + \frac{\gamma^2}{2}\operatorname{Cos}2(g\nu-\vartheta) + \right.$$
$$\left. + \frac{3e^2}{2} + \frac{3e^2}{2}\operatorname{Cos} 2(c\nu - w)\right\}$$

oder endlich

$$dt = h^3 d\nu.\left\{1 + \frac{3e^2}{2} + \frac{3\gamma^2}{2} - 2e\operatorname{Cos}(c\nu - w) + \right.$$
$$\left. + \frac{3e^2}{2}\operatorname{Cos} 2(c\nu - w) + \frac{\gamma^2}{2}\operatorname{Cos} 2(g\nu - \vartheta)\right\}$$

und dessen Integral

$$t = C + h^3 \nu \left\{1 + \frac{3e^2}{2} + \frac{3\gamma^2}{2}\right\} - \frac{2h^3 e}{c} \operatorname{Sin}(c\nu - w)$$

$$+ \frac{3h^3 e^2}{4c} \operatorname{Sin} 2(c\nu - w) + \frac{h^3\gamma^2}{4g} \operatorname{Sin} 2(g\nu - \vartheta)$$

und da der Anfang der Zeit t willkührlich ist, so kann man $C = 0$ setzen.

Kommt der Mond wieder zu seinem Perigäum zurück, so ist die Umlaufszeit

$$T = h^3 \left\{1 + \frac{3e^2}{2} + \frac{3\gamma^2}{2}\right\},$$

oder da sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Würfel der grofsen Achsen verhalten

$$h^3 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{3e^2}{2} + \frac{3\gamma^2}{2}}$$

also auch, wenn $n = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$ ist

$$nt = \nu - \frac{2e}{c} \operatorname{Sin}(c\nu - w) + \frac{3e^2}{4c} \operatorname{Sin} 2(c\nu - w) +$$

$$+ \frac{\gamma^2}{4g} \operatorname{Sin} 2(g\nu - \vartheta),$$

wo man immer im Nenner $c = g = 1$ setzen kann.

Eben so ist, wenn man dieselben Gröfsen für die Sonne mit einem Striche bezeichnet, da $\gamma' = 0$ ist,

$$n't = \nu' - 2e' \operatorname{Sin}(c'\nu' - w') + \frac{3e'^2}{4} \operatorname{Sin} 2(c'\nu' - w').$$

Ferner ist $h = a^{\frac{1}{2}} \left\{1 - \frac{e^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2}\right\}$ also

$$\frac{1}{h^2 + (1 + n^2)} = \frac{1}{a(1 - e^2)},$$

und daher

$$u = \frac{1}{a} \left\{1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + e \operatorname{Cos}(c\nu - w) - \frac{\gamma^2}{4} \operatorname{Cos} 2(g\nu - \vartheta)\right\}$$

und eben so

$$u' = \frac{1}{a'}[1 + e'^2 + e' \operatorname{Cos}(c'v' - w')]$$

Ist aber m das Verhältniſs der mittleren Bewegung der Sonne zu der des Mondes, so ist $m = \frac{n'}{n}$, oder $n' t = m.nt$,

oder $v' - 2 e' \operatorname{Sin}(c'v' - w') + \frac{3}{4} e'^2 \operatorname{Sin} 2 (c'v' - w')$

$$= mv - 2 m e \operatorname{Sin}(cv - w) + \frac{3}{4} m e^2 \operatorname{Sin} 2 (cv - w)$$

$$+ \frac{m\gamma^2}{4} \operatorname{Sin} 2 (gv - \vartheta).$$

oder wenn man die höheren Potenzen von e und e' wegläſst

$$v' - 2 e' \operatorname{Sin}(c'v' - w') = mv - 2 m e \operatorname{Sin}(cv - w) + \frac{m\gamma^2}{4} \operatorname{Sin} 2 (gv - \vartheta)$$

oder wenn man in dem zweyten Gliede, welches schon in die sehr kleine Gröſse e' multiplicirt ist, v statt v' setzt

$$v' = mv - 2me \operatorname{Sin}(cv - w) + \frac{m\gamma^2}{4} \operatorname{Sin} 2 (gv - \vartheta) + 2e' \operatorname{Sin}(c'mv - w')$$

Sieht man also bloſs auf die ersten Potenzen von e und e', so ist

$$s = \gamma \operatorname{Sin}(gv - \vartheta)$$

$$u = \frac{1}{a}[1 + e \operatorname{Cos}(cv - w)]$$

$$u' = \frac{1}{a'}[1 + e' \operatorname{Cos}(c'mv - w')]$$

§. 3.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun die oben angeführten Gleichungen des Kap. II. entwickeln. Da unsere Absicht nicht ist, eine vollständige Theorie des Mondes zu geben, sondern nur den Weg anzuzeigen, welchen man bey der Entwicklung seiner Störungen nehmen soll, so können die hier erhaltenen Resultate nur als erste Näherungen angesehen werden, deren weitere Entwicklungen man in Laplace Mec. cel. Vol. III findet. Die zweyte jener Gleichungen oder die Gleichung (B) gibt

$$-\frac{1}{h^2}\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{s}{h^2u}\left(\frac{dQ}{ds}\right)$$

$$=-\frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{m'u'^3}{2h^2u^3}(1+3\,\mathrm{Cos}\,2\,(v-v')-2s^2)+$$

$$\frac{s}{h^2u}\left(-\frac{us}{1+s)^{\frac{3}{2}}}+\frac{m'u'^3s}{u^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{m'u'^3}{2h^2u^3}(1+3\,\mathrm{Cos}\,2\,(v-v'))$$

I. Der constante Theil von u ist $\frac{1}{a}$, wie die letzten Gleichungen des §. 2 zeigen. Die Wirkung der Sonne verändert diesen constanten Theil. Wir wollen diesen so veränderten Theil durch $\frac{1}{b}$ bezeichnen; so hat man, da sehr nahe a = b ist, auch $h^2 = b$. Setzt man der Kürze wegen $\mu = \frac{m'a^3}{a'^3}$, so ist

$$\frac{m'u'^3}{2h^2u^3}=\frac{\mu}{2b}.\frac{(1+3e'\mathrm{Cos}\,(c'mv-w'))}{(1+3e\mathrm{Cos}\,(cv-w))}$$

$$=\frac{\mu}{2b}(1-3e\,\mathrm{Cos}\,(cv-w)+3e'\,\mathrm{Cos}(c'mv-w'))$$

II. Eben so ist

$$3\,m'u'^3\,\mathrm{Cos}\,2\,(v-v')=\frac{3m'}{u'^3}(1+3e')\,\mathrm{Cos}(c'mv-w'))\,\mathrm{Cos}2(v-v').$$

Setzt man der Kürze wegen für einen Augenblick

$2v-2\,mv=\alpha$, $c'mv-w'=\beta$, $cv-w=\gamma$, so ist

nach den letzten Gleichungen des §. 2

$$3\,m'u'^3\mathrm{Cos}\,2\,(v-v')=\frac{3m'}{a'^3}(1+3e'\mathrm{Cos}\beta)\mathrm{Cos}(\alpha+4me\mathrm{Sin}\gamma-4e'\mathrm{Sin}\beta)$$

$$=\frac{3m'}{a'^3}(1+3e'\,\mathrm{Cos}\,\beta)\,(\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,(4me\,\mathrm{Sin}\,\gamma-4e'\,\mathrm{Sin}\,\beta')-$$

$$\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,(4\,me\,\mathrm{Sin}\,\gamma-4e'\,\mathrm{Sin}\,\beta'))$$

$$=\frac{3m'}{a'^3}\,[(1+3e'\,\mathrm{Cos}\,\beta)\,\mathrm{Cos}\,\alpha-(1+3e'\,\mathrm{Cos}\,\beta)\,\mathrm{Sin}\,\alpha\times$$

$$(4me\,\mathrm{Sin}\gamma-4e'\,\mathrm{Sin}\beta)]$$

$$= \frac{3m'}{a'^3} (\mathrm{Cos}\,\alpha + 3e' \mathrm{Cos}\,\alpha\, \mathrm{Cos}\beta - 4\, me\, \mathrm{Sin}\,\alpha\, \mathrm{Sin}\,\gamma + 4e' \mathrm{Sin}\,\alpha\, \mathrm{Sin}\beta)$$

$$= \frac{3m'}{a'^3} (\mathrm{Cos}\,\alpha + \frac{7e'}{2} \mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta)$$

$$- \frac{e'}{2} \mathrm{Cos}\,(\alpha + \beta) + 2\, me\, \mathrm{Cos}\,(\alpha + \gamma) - 2\, me\, \mathrm{Cos}\,(\alpha - \gamma))$$

Man hat daher

$$\frac{3\, m' u'^3 \mathrm{Cos}\, 2\,(v - v')}{\frac{3m'}{a'^3}} = \mathrm{Cos}\, 2\, (v - mv)$$
$$+ \tfrac{7}{2}\, e' \mathrm{Cos}\, (2\, (v - mv) - (c'mv - w'))$$
$$- \tfrac{1}{2}\, e' \mathrm{Cos}\, (2\, (v - mv) + (c'mv - w'))$$
$$+ 2\, me\, \mathrm{Cos}\, (2\, (v - mv) + (cv - w))$$
$$- 2\, me\, \mathrm{Cos}\, (2\, (v - mv) - (cv - w))$$

Setzt man aber in dem Ausdrucke $\frac{m'u'^3}{2h^2u^3}$ in I die Gröſse $e = e' = 0$ und multiplicirt ihn durch $\frac{a'^3}{m}$, so erhält man:

$$\frac{1}{2h^2u^3} = \frac{\mu . a'^2}{2m'} . (1 - 3e\, \mathrm{Cos}\, (cv - w))$$

Daraus folgt:

$$\frac{3m'u'^3}{2h^2u^3} . \mathrm{Cos}\, 2(v - v') = \frac{3\mu}{2b} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Cos}\, 2\, (v - mv) \\ + \tfrac{7}{2}\, e' \mathrm{Cos}\, (2\, (v - mv) - (c'mv - w')) \\ - \tfrac{1}{2}\, e' \mathrm{Cos}\, (2\, (v - mv) + (c'mv - w')) \\ - \frac{3e}{2} \mathrm{Cos}\, (2\, (v - mv) - (cv - w)) \\ - \frac{3e}{2} \mathrm{Cos}\, (2\, (v - mv) + (cv - w)) \\ - 2\, me\, \mathrm{Cos}\, (2\, (v - mv) - (cv - w)) \\ + 2\, me\, \mathrm{Cos}\, (2\, (v - mv) + (cv - w)) \end{array} \right\}$$

III. Ganz auf dieselbe Art werden auch die übrigen Entwicklungen gefunden, von denen ich der Kürze wegen nur ihre Resultate hersetze.

Um $\left(\frac{dQ}{dv}\right) . \frac{du}{h^2u^2dv}$ das heiſst, um

$- \frac{3m'u'^3}{2u^3h^2} . \frac{du}{udv} . \mathrm{Sin}\, 2\, (v - v')$ zu erhalten, wird man erstens

$-\frac{3m'u'^3}{2u^3h^2}$ Sin 2 $(\nu - \nu')$ suchen, indem man in der Entwickelung der Gröſse $\frac{3m'u'^3}{2u^3h^2}$ Cos 2 $(\nu - \nu')$ in (II) den Winkel 2ν um 90° vermehrt. Dann ist $\frac{du}{ud\nu} = -c\,e\,\text{Sin}\,(c\,\nu - w)$, also auch

$$\left(\frac{dQ}{d\,\nu}\right)\frac{du}{h^2u^2d\nu} = \frac{3\mu}{4b}\left(\begin{matrix}ce\text{Cos}[2(\nu - m\nu) - (c\nu - w)] \\ -ce\text{Cos}[2(\nu - m\nu) + (c\nu - w)]\end{matrix}\right)$$

IV. Um $\frac{2}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{d\,\nu}\right)\cdot\frac{d\nu}{u^2}$ zu erhalten, ist

$$\frac{2}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{d\,\nu}\right)\frac{d\nu}{u^2} = -\frac{3m'}{h^2}\int\frac{u'^3\,d\nu}{u^4}\,\text{Sin}\,2\,(\nu - \nu').$$

Man erhält aber aus der Entwicklung des Ausdruckes

$\frac{3m'u'^3}{2h^2u^3}$ Cos 2 $(\nu - \nu')$ in II. den Ausdruck

$-\frac{3m'u'^3}{h^2u^4}$ Sin 2 $(\nu - \nu')$, indem man $2\,\nu$ um 90° vermehrt,

und den letzten Ausdruck durch $\frac{2}{u}$ multiplicirt. Ferner ist

$\frac{2}{u} = 2\,a\,[1 - e\,\text{Cos}\,(c\,\nu - w)]$, also ist auch

$$\frac{2}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{d\,\nu}\right)\cdot\frac{d\nu}{u^2} = \frac{3\mu a}{b}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2(1-m)}\cdot\text{Cos}\,2\,(\nu - \nu') \\ -\frac{1}{1-m-\frac{c}{2}}\,e\,\text{Cos}\,[2\,(\nu - m\nu) - (c\nu - w)] \\ -\frac{1}{1-m+\frac{c}{2}}\,e\,\text{Cos}\,[2\,(\nu - m\nu) + (c\nu - w)] \\ +\frac{7e'}{2(2-3m)}\,\text{Cos}\,[2(\nu - m\nu) - (c'm\nu - w')] \\ -\frac{e'}{2(2-m)}\,\text{Cos}[2(\nu - m\nu) + (c'm\nu - w')]\end{array}\right\}$$

Noch ist

$$\frac{d^2 u}{d v^2} + u = \frac{1}{a}[1 + (1-c^2)\, e \,\mathrm{Cos}\,(cv - w)],$$ also auch

$$\left(\frac{d^2 u}{d v^2} + u\right) \cdot \frac{2}{h^2} \int \left(\frac{dQ}{d v}\right) \cdot \frac{d v}{u^2}$$

$$= \frac{3\mu}{b} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2(1-m)} \,\mathrm{Cos}\, 2\,(v - mv) \\ & + \left(\frac{1-c^2}{4(1-m)} - \frac{1}{1-m-\frac{c}{2}}\right) e \,\mathrm{Cos}\,[2\,(v-mv) - (cv - w)] \\ & - \frac{(1-m)}{1-m+\frac{c}{2}}\, e\,\mathrm{Cos}\,[2\,(v-mv) + (cv-w')] \\ & + \frac{7e'}{2\,(2-3m)} \,\mathrm{Cos}\,[2\,(v-mv) - (c'mv - w')] \\ & - \frac{e'}{2\,(2-m)} \,\mathrm{Cos}\,[2\,(v-mv) + (c'mv - w')] \end{aligned} \right\}$$

V. Endlich ist noch aus dem in I. entwickelten Ausdrucke

$$\frac{1}{h^2}\left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{h^2 u}\left(\frac{dQ}{ds}\right)$$

das Glied $-\dfrac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$ übrig, und dieses ist gleich

$-\dfrac{1}{b}[1 - \tfrac{3}{2}\gamma^2 \,\mathrm{Sin}^2\,(gn - \vartheta)]$ wofür wir hier bloſs $-\dfrac{1}{b}$ setzen wollen.

VI. Nehmen wir nun an, daſs δu der Theil von u ist, welcher der Störung zugehört, und daſs man habe

$$\begin{aligned} a\,\delta u = {} & A^0 \,\mathrm{Cos}\, 2\,(v - mv) \\ & + A^1 e\,\mathrm{Cos}\,[2\,(v-mv) - (cv - w)] \\ & + A^2 e\,\mathrm{Cos}\,[2\,(v-mv) + (cv - w)] \\ & + A^3 e'\,\mathrm{Cos}\,[2\,(v-mv) + (c'mv - w')] \\ & + A^4 e'\,\mathrm{Cos}\,[2\,(v-mv) - (c'mv - w')] \\ & + A^5 e'\,\mathrm{Cos}\,(c'mv - w') \end{aligned}$$

so gibt das Glied $\frac{m' u'^3}{2 h^2 u^3}$ in I. das Differential $-\frac{3 m' u'^3 \delta u}{2 h^2 u^4}$.

Es ist aber aus I.

$$-\frac{3m'u'^3}{2h^2u^4} = -\frac{3\mu}{2bu}[1 - 3 e \operatorname{Cos}(c\nu - w) + 3 e' \operatorname{Cos}(c'm\nu - w')]$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck durch δu, und setzt man

$$\frac{1}{u} = a\,[1 - e \operatorname{Cos}\,(c\nu - w)],$$

so ist jenes Differential

$$-\frac{3\mu}{2b}\left(a\,\delta u - 2 A^0 e \operatorname{Cos}\,[2(\nu - m\nu) - (c\nu - w)]\right)$$

VII. Das Glied $\frac{3 m' u'^3}{2h^2u^3} \operatorname{Cos} 2\,(\nu - \nu')$ gibt das Differentiale

$$-\frac{9 m'u'^3 \delta u}{2h^2u^4} \operatorname{Cos} 2\,(\nu - \nu') + \frac{3 m' u'^3 d\nu'}{h^2 u^3} \operatorname{Sin} 2\,(\nu - \nu')$$

Das zweyte Glied, dessen Entwicklung den sehr kleinen Faktor me enthält, kann hier weggelassen werden. Substituirt man aber in dem ersten Gliede δu aus VI., so ist

$$-\frac{9m'u'^3\delta u}{2 h^2 u^4} \cdot \operatorname{Cos} 2\,(\nu - \nu')$$

$$= \frac{9\mu}{4b}\,[A^0 + (A' - 4 A^0 + A^2)\, e \operatorname{Cos}\,(c\nu - w) + \\ 3 A^0 + A^3 + A^4)\, e' \operatorname{Cos}\,(c' m\nu - w')]$$

VIII. Das Glied $-\frac{3m'u'^3\, du \operatorname{Sin} 2\,(\nu - \nu')}{2 h^2 u^4\, d\nu}$ hat zum Differential

$$\frac{6m'u'^3}{h^2u^4} \cdot \frac{du}{d\nu} \cdot \frac{\delta u}{u} \cdot \operatorname{Sin} 2\,(\nu - \nu') - \frac{3m'u'^3 \cdot d\delta u}{2 h^2 u^4 d\nu} \operatorname{Sin} 2\,(\nu - \nu')$$

$$= \frac{3\mu}{4b}\left(\begin{array}{l}[2(1-m)A^0 + (2-c)A' + (2+c)A^2 - 8A^0]\, e \operatorname{Cos}\,(c\nu - w) \\ + (6A^0 + 2A^3 + 2A^4)\, e' \operatorname{Cos}\,(c'm\nu - w')\end{array}\right)$$

IX. Das Glied $\left(\frac{d^2u}{d\nu^2} + u\right)\frac{2}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{d\nu}\right)\frac{d\nu}{u^2}$ enthält die

Gröfse $-\left(\frac{d^2u}{d\nu^2} + u\right)\int \frac{3m'u'^3\, d\nu}{h^2 u^4} \operatorname{Sin} 2\,(\nu - \nu')$, und dessen Differentiale ist

$$\frac{12m'}{h^2 a}\int\frac{u'^3\,d\nu}{u^4}\left(\frac{\delta u}{u}\,\text{Sin}\,2\,(\nu-\nu')\right)-$$

$$-\left(\frac{d^2\,\delta u}{d\nu^2}+\delta u\right)\int\frac{3m'u'^3\,d\nu}{h^2\,u^4}\,\text{Sin}\,2\,(\nu-\nu')$$

$$-\frac{qm'}{h^2 a}\int\frac{u'^2\,\delta u'}{u^4}\,d\nu\,\text{Sin}\,2\,(\nu-\nu')$$

Entwickelt man dieses Differential, und setzt man abkürzend $c = 1 - \frac{3m^2}{2}$, $g = 1 + \frac{3m^2}{4}$, so ist dasselbe

$$= -\frac{3\,\mu}{4b\,(1-m)}\,[4\,(1-m)^2-1]\,A^0$$

$$-\frac{3\mu}{b}\left(\frac{7+(2-c)^2}{4(1-m)}\,A'-\frac{12\,A^0}{4-c^2}\right)e\,\text{Cos}\,(c\nu-w)$$

$$-\left\{\frac{3\mu}{4b}\left(\frac{[4\,(1-m)^2-1]\,12\,A^0}{(2-m)\,(2-3m)}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{3\mu}{4b(1-m)}[(2-m)^2-1]A^3+[(2-3m)^2-1]A^4\right\}e'\text{Cos}(e'm\nu-w)$$

§. 4.

Sammelt man nun alle vorhergehenden Glieder, so sind jene ohne Cosinus und ohne A°, A'

$$\frac{d^2u}{d\nu^2}+u-\frac{1}{b}+\frac{\mu}{2b}$$

die ohne Cosinus und mit A° sind

$$-\frac{3\mu A^\circ}{4b}\left(3-2(1-m)+\frac{4(1-m)^2-1}{1-m}\right)=$$

$$=-\frac{3\mu}{4b}\,A^\circ\left(\frac{4-7m}{1-m}\right)=-\frac{3\mu\,A^\circ(4-3m)}{4b}$$

Die mit $e\,\text{Cos}\,(c\nu-w)$ sind

$$-\frac{3\mu}{4b}\left\{\begin{array}{l}2+3\,(A'-4A^\circ+A^2)\\-(2-c)\,A'+(2+c)\,A^2-8\,A^\circ\\+4\left(\frac{7+(2-c)^2\,A'}{4(1-m)}-\frac{12(1-m)}{4-c^2}\,A^\circ\right)\end{array}\right\}$$

$$= -\frac{3\mu}{4b}\left(2+(1-c)A^2 - \frac{4(16-c^2)}{4-c^2}A^1 + \frac{12-3c+c^2}{1-m}A'\right)$$

Die mit Cos 2 $(v - mv)$ sind

$$+\frac{3\mu}{2b}\left(1+\frac{1}{1-m}-A^0\right)$$

Die mit Cos $[2(v-mv) - (cv - w)]$ sind

$$-\frac{9\mu}{4b}+\frac{3\mu}{b}\left\{\frac{1-c^2}{4(1-m)}-\frac{1}{1-m-\frac{c}{2}}\right\}+\frac{3\mu A^0}{b}+\frac{3\mu c}{4b}$$

$$=\frac{3\mu}{b}\left\{A^0+\frac{c-3}{4}+\frac{1-c^2}{4(1-m)}-\frac{1}{1-m-\frac{c}{2}}\right\}$$

Die mit Cos $(c'mv - w')$ sind

$$\frac{3\mu}{2b}-\frac{9\mu}{4b}(3A^0+A^3+A^4)+\frac{3\mu}{4b}(6A^0+2A^3+2A^4)$$

$$-\frac{3\mu A^0}{4b(2-m)(2-3m)}-\frac{9\mu A^3}{4b}-\frac{9\mu A^4}{4b}$$

$$=\frac{3\mu}{2b}\left(1-\tfrac{3}{2}A^0-\frac{18A^0}{(2-m)(2-3m)}-2A^3-2A^4.\right)$$

Die mit Cos $[2(v-mv)+(cv-w)]$ sind

$$-\frac{9\mu}{4b}-\frac{3\mu c}{4b}-\frac{3\mu(1-m)}{b\left(1-m+\frac{c}{2}\right)}-\frac{3\mu}{2b}\,.\,a\delta u$$

$$=-\frac{3\mu}{4b}\left(3+c+\frac{4}{1-m+\frac{c}{2}}+2A^2\right)$$

Endlich ist das Glied von Cos $[2(v-mv)+(c'mv-w')]$ gleich $-\frac{3\mu}{4b}\left(\frac{4}{2-m}+2A^3\right)$, und jenes von Cos $[2(v-mv)-(c'mv-w')]$ gleich $+\frac{3\mu}{4b}\left(\frac{28}{2-3m}-2A^4\right)$

Aus allem Vorhergehenden folgt für die Gleichung B des Kap. II. der Ausdruck

$$0=\frac{d^2u}{dv^2}+u-\frac{1}{b}+\frac{\mu}{2b}-\frac{3\mu}{4b}(4-3m)A^0$$

$$-\frac{3\mu}{4b}\left(2+(1-c)A^2-\frac{4(16-c^2)}{4-c^2}A^0+\frac{12-3c+c^2}{1-m}A^1\right)e\,\mathrm{Cos}(c\nu-w)$$

$$+\frac{3\mu}{2b}\left(\frac{2-m}{1-m}-A^0\right)\mathrm{Cos}\,2(\nu-m\nu)$$

$$+\frac{3\mu}{b}\left(A^0+\frac{c-3}{4}+\frac{1-c^2}{4(1-m)}-\frac{1}{1-m-\frac{c}{2}}\right)e\,\mathrm{Cos}[2(\nu-m\nu)-(c\nu-w)]$$

$$+\frac{3\mu}{2b}\left(1-\tfrac{3}{2}A^2-\frac{18A^0}{(2-m)(2-3m)}-2A^3-2A^4\right)e'\,\mathrm{Cos}(c'm\nu-w')$$

$$-\frac{3\mu}{4b}\left(3+c+2A^2+\frac{4}{1-m+\frac{c}{2}}\right)e\,\mathrm{Cos}[2(\nu-m\nu)+(c\nu-w)]$$

$$-\frac{3\mu}{b}\left(\frac{1+A^3}{2-m}\right)e'\,\mathrm{Cos}[2(\nu-m\nu)+(c'm\nu-w')]$$

$$+\frac{3\mu}{b}\left(\frac{7-A^4}{2-3m}\right)e'\,\mathrm{Cos}[2(\nu-m\nu)-(c'm\nu-w')]\;\ldots\;(B'')$$

§. 5.

Um nun die beständigen Gröfsen A^0 A^1 zu bestimmen, so ist, wenn man durch u das gestörte u bezeichnet, wie es in der letzten Gleichung (B′′) geschah,

$$u=\frac{1}{a}[1+e\,\mathrm{Cos}(c\nu-w)]+\delta u$$

und nach §. 3. Nr. VI.

$$\delta u=\frac{A^0}{a}\mathrm{Cos}2(\nu-m\nu)+\frac{A^1}{a}e\,\mathrm{Cos}[2(\nu-m\nu)-(c\nu-w)]+\ldots$$

Ist daher e und w beständig, so ist

$$\frac{du}{d\nu}=\frac{ec}{a}\mathrm{Sin}(c\nu-w)-2(1-m)\frac{A^0}{a}\mathrm{Sin}\,2(\nu-m\nu)$$

$$-(2-2m-c)\frac{A'e}{a}\mathrm{Sin}[2(\nu-m\nu)-(c\nu-w)]-\ldots$$

und daraus folgt, wenn man c = 1 setzt,

$$\frac{d^2u}{d\nu^2}=\frac{ec^2}{a}\mathrm{Cos}(c\nu-w)-4(1-m)^2\frac{A^0}{a}\mathrm{Cos}\,2(\nu-m\nu)$$

$$-(2-2m-c)^2\frac{A'e}{a}\operatorname{Cos}[2(v-mv)-(cv-w)]$$

$$-(2-2m+c)^2\frac{A^2e}{a}\operatorname{Cos}[2(v-mv)+(cv-w)]$$

$$-(2-m)^2\frac{A^3e'}{a}\operatorname{Cos}[2(v-mv)+(c'mv-w')]$$

$$-(2-3m)^2\frac{A^4e'}{a}\operatorname{Cos}[2(v-mv)-(c'mv-w')]$$

$$-\frac{m^2A^5e}{a}\operatorname{Cos}(c'mv-w').$$

Substituirt man diese Werthe von u und $\frac{d^2u}{dv^2}$ in der Gleichung (B''), und setzt man dann die Aggregate der Glieder, die denselben Cosinus zum Faktor haben, gleich Null, so hat man aus den Gliedern des Cos 2 $(v-mv)$

$$o=[1-4(1-m)^2]A^\circ+\frac{3\mu a}{2b}\left(\frac{2-m}{1-m}-A^\circ\right)$$

Der Faktor von Cos $[2(v-mv)-(cv-w)]$ gibt

$$o=[1-(2-2m-c)^2]A'+\frac{3\mu a}{b}\left(A^\circ+\frac{c-3}{4}+\frac{1-c^2}{4(1-m)}-\frac{1}{1-m-\frac{c}{2}}\right)$$

Der Faktor von Cos $[2(v-mv)+(cv-w)]$ gibt

$$o=[1-(2-2m+c)^2]A^2-\frac{3\mu a}{4b}\left(3+c+\frac{4}{1-m+\frac{c}{2}}+2A^2\right)$$

Der Faktor von Cos $[2(v-mv)+(c'mv-w')]$ gibt

$$o=[1-(2-m)^2]A^3-\frac{3\mu a}{b}\left(\frac{1+A^3}{2-m}\right)$$

Der von Cos $[2(v-mv)-(c'mv-w')]$

$$o=[1-(2-3m)^2]A^4+\frac{3\mu a}{b}\left(\frac{7-A^4}{2-3m}\right)$$

und endlich der von Cos $(c'mv-w')$

$$o=(1-m)^2A^5+\frac{3\mu a}{2b}\left(1-\tfrac{3}{2}A^\circ-\frac{18A^\circ}{(2-m)(2-3m)}-2A^3-2A^4\right)$$

und diese sechs Bedingungsgleichungen reichen hin, die Werthe der sechs Gröſsen

$$A^0 \; A^1 \; A^2 \; A^3 \; A^4 \; A^5$$

zu bestimmen.

§. 6.

Wir wollen nun wieder zu der Gleichung (A) des Kap. II. zurückkehren.

Es war

$$u = \frac{1}{a}\left(1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + e\,\mathrm{Cos}\,(cv - w) - \frac{\gamma^2}{4}\,\mathrm{Cos}\,2\,(gv - \vartheta)\right) + \delta u$$

also ist auch

$$\frac{1}{a^2u^2} = 1 - 2\,e^2 - \frac{\gamma^2}{2} - 2\,e\,\mathrm{Cos}\,(cv - w) + \frac{\gamma^2}{2}\,\mathrm{Cos}\,2\,(gv - \vartheta)$$

$$+ \frac{3e^2}{2} + \frac{3e^2}{2}\,\mathrm{Cos}\,2\,(cv - w) + \frac{3\gamma^2 e}{2}\,\mathrm{Cos}\,(cv - w)$$

$$- \frac{3\gamma^2 e}{4}\left\{\mathrm{Cos}\,[2(gv - \vartheta) - (cv - w)] + \mathrm{Cos}\,[2(gv - \vartheta) + (cv - w)]\right\}$$

Ferner war $h = b^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2}\right)$, also ist auch

$$\frac{1}{a^2u^2\left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2}\right)} = \frac{1}{a^2u^2}\left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2}\right)$$

$$= 1 - 2e\,\mathrm{Cos}\,(cv - w) + \frac{\gamma^2}{2}\,\mathrm{Cos}\,2(gv - \vartheta) + \frac{3e^2}{2}\,\mathrm{Cos}\,2(cv - w)$$

$$+ \frac{\gamma^2 e}{2}\,\mathrm{Cos}\,(cv - w) - \tfrac{3}{4}\,\gamma^2 e\left\{\mathrm{Cos}[2(gv - \vartheta) - (cv - w)] + \right.$$

$$\left. \mathrm{Cos}\,[2\,(gv - \vartheta) + (cv - w)]\right\}$$

und eben so wird man haben

$$\frac{1}{a^3u^3} = 1 - 3\left(e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + e\,\mathrm{Cos}\,(cv - w) - \frac{\gamma^2}{4}\,\mathrm{Cos}\,2(gv - \vartheta)\right)$$

$$+ 3\left(e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + e\,\mathrm{Cos}\,(cv - w) - \frac{\gamma^2}{4}\,\mathrm{Cos}\,2(gv - \vartheta)\right)^2$$

also auch:

$$\frac{1+\frac{e^2}{2}+\frac{\gamma^2}{2}}{a^3u^3} = 1-e^2-\frac{\gamma^2}{4}-3e\,\text{Cos}\,(cv-w)$$
$$+\frac{3e^2}{2}\text{Cos}\,2(cv-w)+\frac{3\gamma^2}{4}\text{Cos}\,2\,(gv-\vartheta)$$
$$-\frac{3\gamma^2 e}{2}\text{Cos}\,[2\,(gv-\vartheta)-(cv-w)]$$

Endlich ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{dv}\right)\frac{dv}{u^2}}} = 1-\frac{1}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{dv}\right)\cdot\frac{dv}{u^2}$$
$$+\frac{3}{2h^4}\left\{\int\left(\frac{dQ}{dv}\right)\cdot\frac{dv}{u^2}\right\}^2 -$$

Die Gleichung (A) geht daher in folgende über:

$$dt=\frac{a^2dv}{b^{\frac{1}{2}}}\left\{\begin{array}{l}1-2e\left(1-\frac{\gamma^2}{4}\right)\text{Cos}(cv-w)+\frac{3e^2}{2}\text{Cos}\,2(cv-w)\\ +\frac{\gamma^2}{2}\text{Cos}2(gv-\vartheta)-\frac{3\gamma^2e}{4}\text{Cos}[2(gv-\vartheta)-(cv-w)]\\ -\frac{3\gamma^2e}{4}\text{Cos}[2(gv-\vartheta)+(cv-w)]\end{array}\right\}$$
$$\times\left\{1-\frac{1}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{dv}\right)\cdot\frac{dv}{u^2}\right\}$$
$$-\frac{2a^3dv.\delta u}{b^{\frac{1}{2}}}\cdot\left\{\begin{array}{l}1+e^2-\frac{\gamma^2}{4}-3e\,\text{Cos}(cv-w)+\frac{3e^2}{2}\text{Cos}\,2\,(cv-w)\\ +\frac{3\gamma^2}{4}\text{Cos}2(gv-\vartheta)-\frac{3\gamma^2e}{2}\text{Cos}[2(gv-\vartheta)-(cv-w)]\end{array}\right\}$$
$$\times\left\{1-\frac{1}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{dv}\right)\cdot\frac{dv}{u^2}\right\}$$

Wir wollen diese Gleichung (A″) nennen. Um sie bequem zu integriren, nehmen wir analog mit dem in §. 3. V. gegebenen Ausdrucke an

$$nt+\varepsilon = v+C^0 e\,\text{Sin}\,(cv-w)$$
$$+C^1e^2\,\text{Sin}\,2\,(cv-w)$$
$$+C^3\gamma^2\,\text{Sin}\,2\,(gv-\vartheta)$$

$$+ C^4 \gamma^2 e \operatorname{Sin} [2 (g\nu - \vartheta) - (c\nu - w)]$$
$$+ C^5 \gamma^2 e \operatorname{Sin} [2 (g\nu - \vartheta) + (c\nu - w)]$$
$$+ C^6 \operatorname{Sin} 2 (\nu - m\nu)$$
$$+ C^7 e \operatorname{Sin} [2 (\nu - m\nu) - (c\nu - w)]$$
$$+ C^8 e' \operatorname{Sin} (c'm\nu - w')$$

welche Gleichung wir durch (A''') bezeichnen wollen.

Um diese beyden Gleichungen A'' und A''' unter einander zu vergleichen, und so die Werthe der Gröſsen C^0 C^1 C^3 ... zu bestimmen, können wir so verfahren.

Setzt man $a = b$, so ist $\frac{a^2}{b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{n}$, (§. 2). Noch ist

$\frac{1}{n'} = a'^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{m'}$, also $\frac{n'^2}{n^2} = m^2 = \frac{a^3 m'}{a'^3} = \mu$ oder $\mu = m^2$.

Für den Winkel $c\nu - w$ ist die Gleichung A''

$$n\,dt = -2\,d\nu \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right) e \operatorname{Cos} (\nu - w), \text{ also auch}$$

$$n\,t = -2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \frac{e}{c} \operatorname{Sin} (c\nu - w) \text{ und daher ist}$$

$$C^0 = - \frac{2 (1 - \frac{1}{4} \gamma^2)}{c}$$

Das Glied des Winkels $2 (c\nu - w)$ gibt

$$n\,d\,t = \tfrac{3}{2} e^2\, d\nu \operatorname{Cos} 2 (c\nu - w), \text{ also ist } C' = \frac{3}{4c}$$

Für $2 (g\nu - \vartheta)$ ist eben so

$$n\,d\,t = \frac{d\nu}{2} \gamma^2 \operatorname{Cos} 2 (g\nu - \vartheta), \text{ also } C^3 = \frac{1}{4g}$$

Für $2 (g\nu - \vartheta) - (c\nu - w)$ ist

$$n\,dt = d\nu \cdot \frac{3e\gamma^2}{4} \operatorname{Cos} [2(g\nu - \vartheta) - (c\nu - w)], \text{ also } C^4 = - \frac{3}{4(2g - c)}$$

Weiter ist, wenn man auch die übrigen Winkel einzeln nimmt:

$$n\,dt = -\tfrac{3}{4} e \gamma^2\, d\nu \operatorname{Cos} [2(g\nu - \vartheta) + (c\nu - w)] \text{ oder } C^5 = - \frac{3}{4(2g + c)}$$

Es war aber

$$1 - \frac{1}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{dv}\right)\frac{dv}{u^2} = 1 -$$

$$\frac{3m^2}{2}\left[\frac{1}{2(1-m)}Cos 2(v-mv) - \frac{1}{1-m-\frac{c}{2}}.e Cos[2(v-mv)-(cv-w)]+\right]$$

also ist

$$ndt = -dv\left(\frac{3m^2}{4(1-m)}Cos\,2\,(v-mv) - 2A^{\circ}Cos 2\,(v-mv)\right) \text{ und}$$

$$nt = -\frac{A^{\circ}}{1-m}Sin\,2\,(v-mv) - \frac{3m^2}{8(1-m)^2}\,Sin\,2\,(v-mv),$$

woraus folgt

$$C^6 = -\frac{A^{\circ}}{1-m} - \frac{3m^2}{8(1-m)^2}$$

Eben so hat man

$$ndt = dv\left(\frac{3m'}{2}.\frac{1}{1-m-\frac{c}{2}}\,e\,Cos\,[2\,(v-mv)-(cv-w)]\right)$$

$$-2\,dv.A'\,e\,Cos\,[2\,(v-mv)-(cv-w)]$$

$$\times\left[1 + \frac{3m^2}{2}.\frac{1}{1-m-\frac{c}{2}}.\,e\,Cos[2(v-mv)-(cv-w)]\right]$$

$$= e\,dv.Cos[2(v-mv)-(cv-w)].\left(\frac{3m^2}{2-2m-c} - 2A'\right), \text{ also}$$

$$nt = \left(\frac{3m^2}{(2-2m-c)^2} - \frac{2A'}{2-2m-c}\right)e\,Sin\,[2\,(v-mv)-(cv-w)],$$

woraus folgt

$$C^7 = \frac{3m^2 - 2A'(2-2m-c)}{(2-2m-c)^2}$$

Endlich ist für den Winkel $c'mv - w'$

$$ndt = -2A^5\,e'\,dv.Cos\,(c'mv-w'), \text{ also}$$

$$nt = -\frac{2A^5e'}{c'm}\,Sin\,(c'mv-w'), \text{ und daher}$$

$$C^8 = -\frac{2A^5}{c'm}$$

§. 7.

Ist R der Halbmesser des Erdäquators, und p die Horizontalparallaxe des Mondes, so ist

$$p = \frac{R}{r} = \frac{Ru}{\sqrt{1+s^2}} \text{ oder abkürzend}$$

$$p = Ru$$

Es war aber:

$$u = \frac{1}{a}\left[1+e^2+e\,\mathrm{Cos}\,(c\nu-w)\right]+\delta u\text{, also ist}$$

$$p = \frac{R}{a}(1+e^2)+\frac{R}{a}\,e\,\mathrm{Cos}\,(c\nu-w)+\frac{R}{a}\,.\,a\delta u$$

Nimmt man den Werth von $a\delta u$ aus §. 3, so ist

$$p = \frac{R}{a}(1+e^2)+\frac{A}{a}\,e\,\mathrm{Cos}\,(c\nu-w)+\frac{R}{a}.\,A^0\,\mathrm{Cos}\,2(\nu-m\nu)$$

$$+\frac{R}{a}.\,A'\,e\,\mathrm{Cos}[2(\nu-m\nu)-(c\nu-w)]$$

$$+\frac{R}{a}.\,A^2\,c\,\mathrm{Cos}\,[2(\nu-m\nu)+(c\nu-w)]$$

$$+\frac{R}{a}.\,A^3\,e'\,\mathrm{Cos}\,[2(\nu-m\nu)+(c'm\nu-w')]$$

$$+\frac{R}{a}\,A^4\,e'\,\mathrm{Cos}\,[2(\nu-m\nu)-(c'm\nu-w')]$$

$$+\frac{R}{a}.\,A^5\,e'\,\mathrm{Cos}\,(c'm\nu-w')$$

welche Gleichung wir (B''') nennen wollen.

§. 8.

Um nun noch die Gleichungen (A''') und (B''') numerisch zu entwickeln, so war $\mu = m^2$ und da $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}\left(1-\frac{m^2}{2}\right)$ ist, so ist auch annähernd $\frac{\mu a}{b} = m^2$. Es ist aber m das Verhältnifs der mittleren Bewegung der Sonne zu der des Mondes (§. 2), also $m = 0.0748016$ und $\frac{\mu a}{b} = 0.005579$. Weiter ist $c = 0.054863$, $e' = 0.016814$. Die Neigung der Mondesbahn ist $\gamma = 18580''\,\mathrm{Sin}\,1'' = 0.0900784$. Um g und c zu finden, mufs man die Bewegung

der Apsiden, und der Knoten der Mondesbahn aus den Beobachtungen kennen. Setzt man nämlich $(g-1)v$ gleich der jährlichen Bewegung der Knoten, und $(1-c)v$ gleich der jährlichen Bewegung der Apsiden, und substituirt man in diesen Ausdrücken für v die mittlere jährliche Bewegung des Mondes selbst, so erhält man aus ihnen

$$g = 1.004022\,,\ c = 0.991548$$

Eben so hat man für die Sonne

$$(1-c')v = 62'',\ v = 359^\circ\ 45'\ 40'' = 1295140''$$

$$\text{also } c' = 0.999951$$

Mit diesen Gröfsen findet man die oben gegebenen Werthe von A und C, wie folgt:

$$C^\circ = -\frac{2}{c}\left(1 - \frac{n^2}{4}\right) = -2.01296 \text{ und eben so}$$

$$C' = 0.75639,\ C^3 = 0.24900,\ C^4 = 0.74123$$

$$C^5 = -0.25000$$

Aus dem in §. 5 gegebenen Ausdrucke findet man

$$A^\circ = \frac{\frac{3\mu a}{2b}\left(\frac{2-m}{1-m}\right)}{\frac{3\mu a}{2b} - 1 + 4(1-m)^2} = 0.007158$$

und eben so $A' = 0.17981$, $A^2 = -0,00402$

$$A^3 = -0,00320,\ A^4 = 0.01312,\ A^5 = -0.00784$$

$$C^6 = -0.01018,\ C^7 = -0.39594,\ C^8 = 0.20994.$$

§. 9.

Substituirt man diese Gröfsen in den Gleichungen (A''') und (B'''), so erhält man

$$\begin{aligned} nt + \varepsilon = v &- 22779''\,\text{Sin}\,(cv - w) + 470\,\text{Sin}\,2\,(cv - w) \\ &+ 417\,\text{Sin}\,2\,(gv - \vartheta) - 2100\,\text{Sin}\,2(v - mv) \\ &+ 68\,\text{Sin}\,[2(gv - \vartheta) - (cv - w)] \\ &- 23\,\text{Sin}\,[2(gv - \vartheta) + (cv - w)] \\ &- 4480\,\text{Sin}\,[2(v - mv) - (cv - w)] \\ &+ 728\,\text{Sin}\,(c'mv - w') \end{aligned}$$

Da ferner a die halbe grofse Achse der Mondesbahn, und R der Halbmesser des Erdäquators ist, so ist $\frac{R}{a}$ der Sinus der Horizontalparallaxe am Aequator für die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde.

Nimmt man diese gleich 0° 56′ 58″, so ist

$$\frac{R}{a} = \text{Sin}\,0°\,56'\,58'' = 0.016570 \text{ und } e = 0.054863,$$

also $\frac{R}{a}(1 + e^2) = 3428''.1$ und $\frac{Re}{a} = 187''.5$, und daher die gesuchte Horizontalparallaxe an dem Aequator für jede Entfernung des Mondes von der Erde, nach der Gleichung (B‴)

$$\begin{aligned} p = {} & 3428''.1 \\ & + 187''.5 \text{ Cos}(c\nu - w) + 24.5 \text{ Cos } 2(\nu - m\nu) \\ & + 33.7 \text{ Cos}[2(\nu - m\nu) - (c\nu - w)] \\ & - 0.7 \text{ Cos}[2(\nu - m\nu) + (c\nu - w)] \\ & - 0.2 \text{ Cos}[2(\nu - m\nu) + (c'm\nu - w')] \\ & + 0.7 \text{ Cos}[2(\nu - m\nu) - (c'm\nu - w')] \\ & - 0.4 \text{ Cos}(c'm\nu - w') \end{aligned}$$

und in diesen beyden Gleichungen für $nt + \varepsilon$ und p ist ν die wahre auf die Ekliptik reducirte Länge des Mondes, w die Länge des Perigeums der Mondbahn, $c\nu - w$ die wahre Anomalie des Mondes, ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondesbahn, $c'm\nu - w'$ die wahre Anomalie der Sonne, $\nu - m\nu$ die Länge des Mondes weniger der Länge der Sonne, und $g\nu$ — ☊ das Argument der wahren Breite des Mondes.

In der ersten dieser Gleichungen ist die Summe der von $(c\nu - w)$, und $2(c\nu - w')$ abhängenden Glieder, die Gleichung des Mittelpunktes, die nämlich, nach Th. II. S. 61, gleich

$$-2e \text{ Sin}(c\nu - w) + (\tfrac{5}{4}e^2 + \tfrac{1}{8}e^4) \text{ Sin } 2(c\nu - w) \text{ ist.}$$

Der Faktor von 4480 ist die Evection,
von 2100 die Variation,
von 728 die jährliche Gleichung (II. S. 226)

und 417 Sin 2 ($g\nu$ — ☊) ist die Reduktion auf die Ekliptik, die nämlich (II. S. 70) gleich

$$\frac{-\text{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{\text{Sin } 1''} \cdot \text{Sin } 2 \text{ Arg. d. Breite} = -417'' \text{ Sin } 2 \text{ Arg. d. Breite ist.}$$

§. 10.

Die beyden vorhergehenden Gleichungen geben die mittlere Länge des Mondes und seine Parallaxe durch die wahre Länge, und sie müssen daher zur Anwendung in solche verwandelt werden, welche die wahre Länge und die Parallaxe durch die

mittlere geben. Zu diesen und ähnlichen Inversionen kann man sich folgender Methode bedienen.

Es sey die Reihe gegeben

$$m = \nu + a \,\mathrm{Sin}\,(b\nu + c) + a' \,\mathrm{Sin}\,(b'\nu + c') + a'' \,\mathrm{Sin}\,(b''\nu + c'') + \ldots$$

Man suche die Gröſse ν durch m auszudrücken.

Vergleicht man die gegebene Reihe mit der bekannten Gleichung Lagrange's $a = y - x \varphi y$,

so ist $a = m$, $y = \nu$, $x = -1$, $\varphi y = \Sigma a \,\mathrm{Sin}\,(b\nu + c)$,

$$\psi y = \nu, \quad \psi a = m, \quad \frac{d \psi a}{d a} = 1, \text{ und } \varphi a = \Sigma a \,\mathrm{Sin}\,(b m + c),$$

also hat man

$$\nu = m - \Sigma a \,\mathrm{Sin}\,(bm + c) + \frac{1}{2} d . \frac{\Sigma a^2 \,\mathrm{Sin}^2\,(b m + c)}{dm}$$

$$- \frac{1}{2.3} d^2 . \frac{\Sigma a^3 \,\mathrm{Sin}^3\,(b m + c)}{dm^2}$$

$$+ \frac{1}{2.3.4} d^3 . \frac{\Sigma a^4 \,\mathrm{Sin}^4\,(b m + c)}{dm^3} - \ldots$$

Es ist aber überhaupt

$$\frac{d^{n-1} . \mathrm{Sin}^n \alpha}{d \alpha^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n^{n-1} \mathrm{Sin}\, n\alpha - n(n-2)^{n-1} \mathrm{Sin}(n-2)\alpha + \frac{n.n-1}{1.2} (n-4)^{n-1} \mathrm{Sin}(n-4)\alpha \\ - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} (n-6)^{n-1} \mathrm{Sin}\,(n-6)\,\alpha + \ldots \end{array} \right\}$$

also ist auch, wenn man in diesem Ausdrucke für n nach der Ordnung die Gröſsen 1, 2, 3 substituirt, und $\alpha = bm + c$ setzt,

$$\nu = m - \Sigma a \mathrm{Sin}(bm + c) + \Sigma \frac{a^2 b}{2} \mathrm{Sin}\, 2\,(bm + c)$$

$$- \Sigma \frac{a^3 b^2}{2.3.2^2} [3^2 \,\mathrm{Sin} 3\,(bm + c) - 3 \mathrm{Sin}\,(bm + c)]$$

$$+ \Sigma \frac{a^4 b^3}{2.3.4.2^3} [4^3 \,\mathrm{Sin}\, 4\,(bm + c) - 4 . 2^3 \,\mathrm{Sin}\, 2\,(bm + c)]$$

$$- \Sigma \frac{a^5 b^4}{2.3.4.5.2^4} \left(5^4 \mathrm{Sin} 5(bm + c) - 5.3^4 \mathrm{Sin} 3(bm + c) + \frac{5.4}{1.2} \mathrm{Sin}(bm + c) \right)$$

$$+\Sigma\frac{a^6 b^5}{2.3.4.5.6.2^5}\Big(6^5\mathrm{Sin}6(bm+c)-6.4^5\mathrm{Sin}4(bm+c)$$

$$+\frac{6.5}{1.2}\,2^5\mathrm{Sin}2\,(bm+c)\Big)$$

$$-\Sigma\frac{a^7 b^6}{2.3.4.5.6.7.2^6}\Big(7^6\mathrm{Sin}7(bm+c)-7.5^6\mathrm{Sin}5(bm+c)$$

$$+\frac{7.6}{1.2}\,3^6\mathrm{Sin}3(bm+c)-\frac{7.6.5}{1.2.3}\,\mathrm{Sin}(bm+c)\Big)+\ldots.$$

Hätte man z. B. die Gleichung $m = \nu + \mathrm{Sin}\,\nu$, so ist

$$a = b = 1,\ \text{und}\ c = a = a' = a'' \ldots. = 0,$$

also die letzte Reihe

$$\nu = m - \mathrm{Sin}\,m + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,2m - \frac{1}{2.3.2^2}\,(3^2\,\mathrm{Sin}\,3m - 3\,\mathrm{Sin}\,m)$$

$$+\frac{1}{2.3.4.2^3}\,(4^3\,\mathrm{Sin}\,4m - 4.2^3\mathrm{Sin}\,2m) -$$

übereinstimmend mit Th. II. S. 62.

§. 11.

Die folgenden Störungsgleichungen hat Damoiseau in seinen Tables de la lune, Paris 1824, blofs aus der Theorie abgeleitet. Er setzt folgende Elemente voraus:

Für die mittlere Pariser Mitternacht des 1. Januars 1801 ist die Epoche

der mittl. Länge des Mondes	111°	36′	42″.8
der mittl. Anomalie	205	29	58 .4
des aufst. Knotens	13	54	54 .2

Säkuläre Bewegung

der mittl. Länge - - - -	307°	52′	41″.6
der mittl. Anomalie	198	49	55 .0
des aufst. Knotens	134	9	57 .5

Säkuläre Gleichungen

der mittl. Länge	$10''.7232\,t^2 + 0''.01936\,t^3$
der mittl. Anomalie	$50\ .4203\,t^2 + 0\ .09103\,t^3$
des aufst. Knotens	$6\ .5632\,t^2 + 0\ .01185\,t^3$

wo t die Anzahl der Jahrhunderte seit 1801 . 00 ist.

Nennt man nun der Kürze wegen ν die wahre Länge des

Mondes, l die mittlere Länge, m die mittlere Anomalie, m' die mittlere Anomalie der Sonne, und setzt

$$a = l - \text{mittlere Länge der Sonne, und}$$

$$b = l - \text{Länge des aufst. Knotens des Mondes,}$$

so hat man

für die Länge des Mondes

$$
\begin{aligned}
v = l &+ 22640'' \operatorname{Sin} m + 769'' \operatorname{Sin}. 2m + 37 \operatorname{Sin}. 3m + 2 \operatorname{Sin} 4m \\
&- 122 \operatorname{Sin} a + 2370 \operatorname{Sin} 2a + 15 \operatorname{Sin}. 4a \\
&- 674 \operatorname{Sin}. m' - 7 \operatorname{Sin}. 2m' \\
&- 412 \operatorname{Sin}. 2b \\
&- 8 \operatorname{Sin}(a+m) + 15 \operatorname{Sin} 2(a+m) \\
&- 17 \operatorname{Sin}(a-m) + 212 \operatorname{Sin} 2(a-m) \\
&+ 4590 \operatorname{Sin}(2a-m) + 31 \operatorname{Sin} 2(2a-m) \\
&+ 39 \operatorname{Sin}(4a-m) \\
&+ 13 \operatorname{Sin}(2a-3m) \\
&+ 192 \operatorname{Sin}(2a+m) - 109 \operatorname{Sin}(m+m') + 148 \operatorname{Sin}(m-m') \\
&- 8 \operatorname{Sin}(2m+m') + 10 \operatorname{Sin}(2m-m') + 18 \operatorname{Sin}(a+m') \\
&+ 8 \operatorname{Sin} 2(a-m') - 25 \operatorname{Sin}(2a+m') + 166 \operatorname{Sin}(2a-m') \\
&- 29 \operatorname{Sin}(2a+m'-m) + 15 \operatorname{Sin}(2a-m'+m) + 207 \operatorname{Sin}(2a-m'-m) \\
&+ 9 \operatorname{Sin}(2a-m'-2m) + 7 \operatorname{Sin}(2a-2m'-m) - 45 \operatorname{Sin}(2b+m) \\
&- 39 \operatorname{Sin}(2b-m) - 10 \operatorname{Sin}(2a+2b-m) - 7 \operatorname{Sin}(2a-2b+m) \\
&- 6 \operatorname{Sin} 2(a+b) + 55 \operatorname{Sin} 2(a-b) + 7 \operatorname{Sin}(l-b) \\
&+ 1. \operatorname{Sin}(2a+3m) + 1 \operatorname{Sin}(4a-3m) - 1 \operatorname{Sin}(a-2m) \\
&- 3 \operatorname{Sin}(3a-m) + 1 \operatorname{Sin} 2(a-2m) + 3 \operatorname{Sin}(m-2m') \\
&- 1 \operatorname{Sin}(m+2m') + 4 \operatorname{Sin} 2(b+m) + 1 \operatorname{Sin} 2(b-m) \\
&+ 2 \operatorname{Sin}(a+m'-m) + 1 \operatorname{Sin}(a+m'+m) - 3 \operatorname{Sin}(2a+2m'-m) \\
&- 3 \operatorname{Sin}(2a+m'+m) + 3 \operatorname{Sin}(2a+m'-2m) - 1 \operatorname{Sin}(2a-2b+m') \\
&+ 1 \operatorname{Sin}(2a-m'+2m) - 1 \operatorname{Sin}(2a+2b+m) + 3 \operatorname{Sin}(4a-m-m') \\
&- 1 \operatorname{Sin}(2a+2b-2m) + 3 \operatorname{Sin}(4a-2m-m') + 3 \operatorname{Sin}(2a-2b-m') \\
&+ 1 \operatorname{Sin}(4a-m') + 1. \operatorname{Sin} 2(2a-b)
\end{aligned}
$$

Für die Parallaxe

$$
\begin{aligned}
p = 3421'' & \\
&+ 186'' \operatorname{Cos} m + 10 \operatorname{Cos} 2m + 1 \operatorname{Cos} 3m \\
&- 1 \operatorname{Cos} a + 28 \operatorname{Cos} 2a + 34 \operatorname{Cos}(2a-m) \\
&+ 1 \operatorname{Cos}(4a-m) + 3 \operatorname{Cos}(2a+m) \\
&- 1 \operatorname{Cos}(m+m') + 1 \operatorname{Cos}(m-m') \\
&+ 2 \operatorname{Cos}(2a-m') + 1 \operatorname{Cos}(2a-m'-m) \\
&- 1 \operatorname{Cos}(2b-m)
\end{aligned}
$$

Setzt man dann zu jedem der drey Argumente m, a und b die Summe der vorhergehenden Störungen der Länge, oder die Gröfse $\nu - l$, und nennt diese so vermehrten Argumente μ, α und β, so erhält man für

die Breite des Mondes

$$18540'' \text{Sin}\,\beta + 13\,\text{Sin}\,3\beta$$
$$+\ 528\ \text{Sin}(2\alpha-\beta) - 1\ \text{Sin}(\mu+\beta)$$
$$-\ 14\ \text{Sin}(\mu-\beta) + 26\ \text{Sin}(2\mu-\beta)$$
$$+\ 2\ \text{Sin}(2\alpha-\beta+\mu) - 16\ \text{Sin}(2\alpha-\beta-\mu)$$
$$-\ 5\ \text{Sin}(2\alpha-\beta-2\mu) + 24\ \text{Sin}(\beta+m')$$
$$+\ 25\ \text{Sin}(\beta-m') + 22\ \text{Sin}(2\alpha-b-m')$$
$$+\ 1.\ \text{Sin}(2\alpha-\beta-2m') - 10\ \text{Sin}(2\alpha-\beta+m')$$
$$-\ 8\ \text{Sin}\,\nu + 1\ \text{Sin}(\alpha-\beta) - 1\ \text{Sin}(2\alpha-3\beta) + 1\ \text{Sin}(2\alpha+\beta)$$
$$-\ 1\ \text{Sin}(2\alpha-\beta-\mu-m')$$

in welchen Ausdrücken alle Gröfsen, die kleiner als eine Sekunde sind, weggelassen wurden.

§. 12.

Die Abkürzungen, welche wir uns in dem Vorhergehenden erlaubt haben, machen noch einige nachträgliche Bemerkungen nothwendig, welche ich hier zusammen stelle.. werde.

Nach den Beobachtungen ist die mittlere Bewegung des Mondes, die, nach dem Vorhergehenden, bey allen Planeten beständig ist, einer Aenderung unterworfen, deren Ursache wir nun suchen wollen.

Wenn wir in der oben gegebenen Gleichung von der planetarischen Störung der Länge blofs das letzte Glied betrachten, da die übrigen nicht zu der gegenwärtigen Untersuchung gehören, so ist mit den dort gebrauchten Bezeichnungen

$$\delta\nu = \frac{2\,a\,n}{\sqrt{1-e^2}} \int r \left(\frac{dR}{dr}\right) dt$$

Es war aber

$$R = \frac{u^2}{r'^3} - \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} \quad \text{wo } u^2 = xx'+yy'+zz'$$

ist.

Da aber x y z gegen x′ y′ z′ sehr klein sind, so ist

$$R = \frac{u^2}{u'^3} - (r^2+r'^2-2u^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{r'} + \frac{r^2}{2r'^3} - \frac{3u^4}{2r'}$$

Bezeichnet aber l und l′ die Länge der Sonne und des Mondes,

so ist, wenn man diese beyden Körper in der Ebene der Ekliptik annimmt

$$x = r\,\mathrm{Cos}\,l \quad x' = r'\,\mathrm{Cos}\,l' \text{ und } z = o$$

$$y = r\,\mathrm{Sin}\,l \quad y' = r'\,\mathrm{Sin}\,l' \qquad z' = o, \text{ also auch}$$

$$\frac{u^2}{rr'} = \mathrm{Cos}\,(l-l'), \quad \frac{u^4}{r^2 r'^2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,2\,(l-l')$$

Da man aber hier nur die nicht periodischen Glieder betrachtet, so ist

$$u^4 = \tfrac{1}{2}\,r^2 r'^2, \text{ also auch } R = -\frac{1}{r'} - \frac{r^2}{4r'^3} \text{ und}$$

$$\text{daher } r\left(\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{r^2}{2r'^3}, \text{ oder endlich}$$

$$\delta\nu = -\frac{a\,n}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\int\frac{r^2\,dt}{r'^3}$$

Es ist aber für die Ellipse

$$r = a\left(1 + \frac{e^2}{2} - e\,\mathrm{Cos}\,nt + \frac{e^2}{2}\,\mathrm{Cos}\,2\,nt\right), \text{ oder}$$

$$r^2 = a^2\left(1 + \frac{3e^2}{2}\right), \quad \frac{1}{r'^3} = 1 + \frac{3e'^2}{2} \text{ und}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = 1 + \frac{e^2}{2}, \text{ also ist auch}$$

$$\delta\nu = -\frac{na^3}{a'^3}\int\left(1 + 2e^2 + \frac{3e'^2}{2}\right)dt$$

$$= \frac{na^3\,t}{a'^3} - \frac{na^3}{a'^3}\int\left(2e^2 + \frac{3e'^2}{2}\right)dt$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist ein Theil der mittleren Bewegung selbst, und fällt hier außer unserer Betrachtung. Das andere Glied $\int e^2\,dt$ gäbe eine Gleichung, welche die kurze Aenderung der Excentricität der Mondesbahn, von etwa sechs Monathen, enthielte, und welches daher auch jene säkuläre Aenderung der mittleren Bewegung des Mondes nicht erklären kann. Es bleibt also nur noch übrig.

$$\delta\nu = -\frac{3a^3\,n}{2a'^3}\int e'\,dt$$

und da die Excentricität e' der Erdbahn, nach dem Vorhergehenden,

Veränderungen von sehr langen Perioden leidet, so wollen wir annehmen, daſs sich e'^2 durch die Reihe

$$e'^2 = A + Bt + Ct^2 +$$

darstellen lasse. Nehmen wir von dieser Reihe nur die zwey ersten Glieder, so ist

$$\delta v = -\frac{3na^3}{2a'^3}(At + \tfrac{1}{2}Bt^2).$$

Das Glied dieses Ausdruckes, dessen Faktor A t ist, gehört wieder zu der mittleren Bewegung, von welcher es einen Theil ausmacht, welcher in der beobachteten mittleren Bewegung des Mondes schon enthalten ist, und also ebenfalls nicht hierher gehört. Es bleibt daher nur

$$\delta v = -\frac{3na^3}{4a'^3}.Bt^2$$

und in diesem Ausdrucke soll die Gröſse B durch Beobachtungen bestimmet werden. Für die Epoche von 1750 ist t = o, und

$$\frac{de'}{dt} = -0.0004557, \; e' = 0.016814 \text{ also ist}$$

$$\frac{d.e'^2}{dt} = \frac{2e'de'}{dt} = -0.00001532. \text{ Es ist aber auch}$$

$$e'^2 = A + Bt, \text{ also } \frac{d.e'^2}{dt} = B, \text{ und daher}$$

$$B = -0.00001532$$

Weiter ist, wenn die Sonnenparallaxe 8''.65, und die des Mondes 57' 21'' gesetzt wird,

$$\frac{a^3}{a'^3} = \frac{(8.65)^3}{(57'\,21'')^3} = 0.0000001589$$

$$\text{also auch } \frac{3na^3}{4a'^3} = 20''.64783.$$

Da endlich die Sonnenmasse $\mu = 329630$ ist, so hat man

$$m\delta v = +10''.427\,t^2$$

wenn t die Anzahl Jahrhunderte seit 1750 bezeichnet. Dieser Ausdruck für $m\delta v$ stimmt nahe genug mit den Beobachtungen (§. 11) überein. Hätte man noch das dritte Glied Ct^2 mitgenommen, so würde man für $m\delta v$ noch ein Glied der Form $D.t^3$ gefunden haben, wo aber D noch nicht 0''.02 beträgt, also erst nach mehreren Jahrhunderten merklich seyn kann.

Diese säkuläre Gleichung des Mondes hat bekanntlich zuerst

Halley durch die Vergleichung der älteren Mondesbeobachtungen mit denen der neueren entdeckt. Es ist merkwürdig, daſs die Wirkungen der Veränderung der Excentricität der Erdbahn nicht in der Bewegung der Erde, sondern in jener des Mondes sich den Beobachtern zuerst gezeigt hat. Diese Aenderung der Excentricität hat seit den ältesten Beobachtungen, die auf uns gekommen sind, die Mittelpunktsgleichung der Erde nur um acht Minuten, die Länge des Mondes aber fünfzehnmahl mehr, oder um volle zwey Grade geändert.

§. 13.

Dasselbe wichtige Resultat würde auch unmittelbar aus den vorhergehenden Berechnungen der Störungen des Mondes von der Sonne hervorgegangen seyn, wenn man dort die höheren Potenzen von e' nicht weggelassen hätte.

Um dieses zu zeigen, war oben eigentlich

$$u = \frac{1}{a}\left[1 + e^2 + e \operatorname{Cos}(cv - w)\right], \text{ also auch}$$

$$u' = \frac{1}{a'}\left[1 + e'^2 + e' \operatorname{Cos}(c'v' - w')\right]$$

Man hat daher, nach §. 3. I.

$$\frac{m' u'^3}{2h^2 u^3} = \frac{\mu}{2b}\left(\frac{1 + e'^2 + e' \operatorname{Cos}(c'v' - w')}{1 + e^2 + e \operatorname{Cos}(cv - w)}\right)^3$$

$$= \frac{\mu}{2b}\left(1 + \tfrac{3}{2}e'^2 - 3e \operatorname{Cos}(cv - w) + 3e' \operatorname{Cos}(c'v' - w')\right)$$

Daraus folgt (§. 4), daſs die Glieder ohne Cosinus und ohne A sind

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{1}{b} + \frac{\mu}{2b}(1 + \tfrac{3}{2}e'^2),$$

also ist auch die Gleichung (B'') des §. 4, wenn man nur auf die nichtperiodischen Glieder derselben Rücksicht nimmt

$$0 = \frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{1}{b} + \frac{\mu}{2b}(1 + \tfrac{3}{2}e'^2) - \frac{3\mu}{4b}(4 - 3m)A^0,$$

und deren Integral

$$u = \frac{1}{b} - \frac{\mu}{2b}(1 + \tfrac{3}{2}e'^2) + \frac{3\mu}{2b}(4 - 3m)A^0.$$

Allein der nichtperiodische Theil in dem ersten Ausdrucke von u ist, wenn man e^2 wegläſst,

$u = \frac{1}{a}$, also ist

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{\mu}{2b}(1 + \tfrac{3}{2} e'^2) + \frac{3\mu}{4b}(4 - 3m) A^{\circ}$$

und da die Excentricität e′ der Erdbahn einer säkulären Variation unterworfen ist, so ist auch a oder die mittlere Entfernung, oder endlich die mittlere Bewegung des Mondes einer ähnlichen Variation ausgesetzt.

Der nichtperiodische Theil der Gleichung (A″) des § 6 ist gleich $\frac{a^2 d\nu}{\sqrt{b}}$. Da aber $\frac{1}{a}$ das Glied $-\frac{3}{2} \cdot \frac{\mu e'^2}{b}$ enthält, so wird a^2 ein von e′ abhängiges Glied enthalten. Es ist nämlich

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{\mu}{2b} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu e'^2}{b}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{a^{-2}} = \left(\frac{1}{b} - \frac{\mu}{2b} - \frac{3}{2} - \frac{\mu e'^2}{b}\right)^{-2},$$

oder wenn man blofs auf jenes Glied Rücksicht nimmt,

$$\frac{1}{a^{-2}} = 3\mu b^2 . e'^2$$

Also enthält der Ausdruck $\frac{a^2 d\nu}{\sqrt{b}}$ das Glied $\varphi = 3\mu b^{\frac{3}{2}} . e'^2 . d\nu$. Es ist aber $d\nu = n\,dt$, also $\varphi = 3\mu n b^{\frac{3}{2}} . e'^2\, dt$, und daher enthält auch der Ausdruck von $nt + \varepsilon$ in §. 9 das veränderliche Glied $3\mu n b^{\frac{3}{2}} \int e'^2\, dt$ u. s. w.

§. 14.

In dem Vorhergehenden haben wir die Gleichung (C) des Kap. II. für die Breite des Mondes ganz unentwickelt gelassen, weil diese Entwicklung nur eine Wiederholung der Arbeiten ist, welche wir mit der Gleichung (B) vorgenommen haben. — Nimmt man an, dafs δs in eine Reihe entwickelt, unter mehreren anderen auch das Glied

$$B^{\circ} . \gamma . \text{Sin}\, [2(\nu - m\nu) - (g\nu - \vartheta)]$$

enthalte, so wird diese particuläre Entwicklung der Gleichung (C) sehr einfach, wenn man die höheren Potenzen von e und γ und selbst alle Glieder vernachlässigt, die nicht in den Sinus oder Cosinus von $g\nu - \vartheta$ multiplicirt sind. Es war nämlich (§. 1)

$$-\frac{s}{h^2u}\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{(1+s^2)}{h^2u}\left(\frac{dQ}{ds}\right)$$

$$=-\frac{s}{h^2u}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}-\frac{m'u'^3}{2u^3}[1+3\operatorname{Cos}2(v-v')-2s^2]\right\}$$

$$+\frac{(1+s^2)}{h^2u^2}\left\{\frac{u's}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{m'u'^3s}{u^2}\right\}$$

und dieser Ausdruck ist gleich

$$\frac{3m'u'^3s}{2h^2u^4}+\frac{3m'u'^3s}{2h^2u^4}\operatorname{Cos}2(v-v').$$

Es ist aber $u=\frac{1}{a}[1+e\operatorname{Cos}(cv-w)]$,

$$u'=\frac{1}{a'}[1+e'\operatorname{Cos}(c'v'-w')],\quad s=\gamma\operatorname{Sin}(gv-\vartheta)$$

$$\mu=\frac{m'a^3}{a'^3}\text{ und }h=\sqrt{b},$$

also gibt die Entwicklung von

$$\frac{3mu'^3s}{2h^2u^4}\text{ das Glied }\frac{3\mu an}{2b}\operatorname{Sin}(gv-\vartheta)$$

Eben so erhält man $\frac{3m'u'^3s}{2h^2u^4}\operatorname{Cos}2(v-v')$,

wenn man die in §. 3. II. gegebene Entwicklung von

$$\frac{3m'u'^3}{2h^2u^3}\operatorname{Cos}2(v-v')\text{ durch }\frac{s}{u},$$

das heifst durch $a\gamma\operatorname{Sin}(gv-\vartheta)$ multiplicirt. Es ist daher

$$\frac{3m'u'^3s}{2h^2u^4}\operatorname{Cos}2(v-v')=\frac{3\mu}{2b}.\ a\gamma\operatorname{Sin}(gv-\vartheta)\operatorname{Cos}2(v-mv)$$

und dieser Ausdruck enthält keines der, nach der obigen Voraussetzung, hier zu betrachtenden Glieder, also ist

$$-\frac{s}{h^2u}\left(\frac{dQ}{du}\right)-\frac{(1+s^2)}{h^2u^2}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)=\frac{3\mu a\gamma}{2b}\operatorname{Sin}(gv-\vartheta)$$

Die Gleichung C enthält überdiefs noch das Glied

$$\frac{ds}{h^2u^2dv}.\left(\frac{dQ}{dv}\right).\text{ Es ist aber}$$

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right)=-\frac{3m'u'^3}{2u^2}\operatorname{Sin}2(v-v')\text{ und }\frac{ds}{dv}=n\gamma\operatorname{Cos}(gv-\vartheta),$$

also ist jenes Glied

$$-\frac{3\mu agn}{2b}\ \mathrm{Sin}\,2\,(\nu-\nu')\,\mathrm{Cos}\,(g\nu-\vartheta)\,;$$

oder jenes Glied ist für unsere Absicht ebenfalls gleich Null.

Ein ferneres Glied der Gleichung (C) ist,

$$\left(\frac{d^2 s}{d\nu^2}+s\right)\frac{2}{h^2}\int\left(\frac{dQ}{d\nu}\right).\frac{d\nu}{u^2}.$$

Es ist aber $\frac{ds}{d\nu}=\gamma\, g\,\mathrm{Cos}\,(g\nu-\vartheta)$

$$\frac{d^2 s}{d\nu^2}+s=\gamma\,(1-g^2)\,\mathrm{Sin}\,(g\nu-\vartheta)$$

und da g schon sehr nahe die Einheit ist, so können wir auch dieses Glied, unserem Zwecke gemäſs, übergeben.

Von den so erhaltenen Gliedern sind nun die Differentialien zu suchen.

Das Glied $\frac{3m'\,u'^3\,s}{2h^2\,u^4}$ gibt das Differential

$$\frac{3m'u'^3\,\delta s}{2h^2\,u^4}-\frac{6\,m'u'^3\,s\,\delta u}{h^2\,u^5}$$

und davon ist der erste Theil $\frac{3\mu a\,\delta s}{2b}$ oder $\frac{3\mu a}{2b}.\gamma g d\nu\,\mathrm{Cos}(g\nu-\vartheta)$;

und der zweyte Theil ist

$$-\frac{6\mu a^2\,s\delta u}{b}=-\frac{6\mu a\gamma}{b}.\,A^\circ\,\mathrm{Cos}\,2\,(\nu-m\nu)\,\mathrm{Sin}\,(g\nu-\vartheta)=0$$

Das Glied $\frac{3\,m'u'^3\,s}{2\,h^2\,u^4}$ Cos 2 $(\nu-\nu')$ gibt eben so das Differentiale

$$\frac{3m'u'^3\,\delta s}{2h^2\,u^4}\mathrm{Cos}\,2\,(\nu-\nu')-\frac{6m'u'^3\,s\,\delta u}{h^2\,u^5}\,\mathrm{Cos}\,2\,(\nu-\nu')+$$
$$\frac{3m'u'^3\,s\,\delta\nu}{h^2\,u^4}.\,\mathrm{Sin}\,2\,(\nu-\nu')$$

und davon ist das erste Glied

$$\frac{3\,\mu a}{2b}\,\delta s\,\mathrm{Cos}\;2\,(\nu-\nu')$$

$$=\frac{3\,\mu\,a}{2\,b}.\,B^\circ\,\gamma\,\mathrm{Sin}\,[2(\nu-m\nu)-(g\,\nu-\vartheta)]\,\mathrm{Cos}\,2\,(\nu-\nu')$$

$$=-\frac{3\,\mu\,a}{4\,b}B^\circ\,\gamma\,\mathrm{Sin}\,(g\nu-\vartheta)$$

Das zweyte Glied aber folgt unmittelbar aus dem vorhinbetrachteten $\frac{6m' u'^3 s \delta u}{h^2 u^5}$; es ist nähmlich dieses Glied gleich

$$-\frac{6\mu a}{b} \cdot \gamma A^\circ \operatorname{Cos} 2(\nu - m\nu) \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta) \operatorname{Cos} 2(\nu - m\nu)$$

$$= -\frac{3\mu a}{b} \gamma . A^\circ \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta)$$

Das dritte Glied endlich kann hier, unserer Absicht gemäſs, ganz übergangen werden, so daſs daher das gesuchte Differential des letzten Ausdruckes ist

$$-\frac{3\mu a}{2b} (\tfrac{1}{2} B^\circ + 2 A^\circ) \gamma \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta)$$

Auf dieselbe Art findet man endlich von dem Gliede

$$-\frac{3m' u'^3 \delta s}{2h^2 u^4 d\nu} \operatorname{Sin} 2(\nu - \nu')$$

das entwickelte Differential

$$-\frac{3\mu a \gamma}{4b} . B^\circ . \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta).$$

Sammelt man alles Vorhergehende, so ist die Gleichung (C)

$$o = \frac{d^2 s}{d\nu^2} + s + \frac{3\mu a}{2b} (1 - 2 A^\circ - B^\circ) . \gamma \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta) .$$

Es war aber $s = \gamma \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta)$, also ist

$$\frac{d^2 s}{d\nu^2} + s = \frac{d^2 \gamma}{d\nu^2} \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta) + \frac{2d\gamma}{d\nu^2} (g d\nu - d\vartheta) \operatorname{Cos}(g\nu - \vartheta)$$

$$-\frac{\gamma}{d\nu^2} (g d\nu - d\vartheta)^2 \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta) - \frac{\gamma d^2 \vartheta}{d\nu^2} \operatorname{Cos}(g\nu - \vartheta) + \gamma \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta)$$

Wenn man daher die Glieder beyder Ausdrücke von $\frac{d^2 s}{d\nu^2} + s$, welche den Sinus, und die, welche den Cosinus von $(g\nu - \vartheta)$ enthalten, jede für sich gleich Null setzt, so erhält man folgende zwey Gleichungen

$$o = \frac{u d^2 \vartheta}{d\nu^2} - \frac{2du}{d\nu} \left(g - \frac{d\vartheta}{d\nu}\right)$$

$$o = \frac{d^2 \gamma}{d\nu^2} - \gamma \left(g - \frac{d\vartheta}{d\nu}\right)^2 + \gamma + p\,\gamma$$

$$\text{wo } p = \frac{3\mu a}{2b}(1 - 2A_0 - B^0) \text{ ist}$$

Das Integral der ersten dieser beyden Gleichungen ist

$$\frac{1}{g - \frac{d\vartheta}{d\nu}} = C.\gamma^2$$

Die zweyte aber gibt, wenn man $d^2\gamma = 0$ setzt,

$$\frac{d\vartheta}{d\nu} = g - \sqrt{1+p^2}$$

also, wenn man p als beständig betrachtet, was man hier ohne merklichen Fehler thun kann, $\vartheta = g\nu - \nu.\ (1+p)^{\frac{1}{2}}$. Daraus folgt daher die jährliche rückgängige Bewegung der Mondsknoten

$$P = [(1+p)^{\frac{1}{2}} - 1].\nu$$

Um die Gröſse p zu erhalten, muſs man zuerst B^0 suchen. Es war $s = \gamma \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta)$ also auch

$$\frac{ds}{d\nu} = g\gamma \operatorname{Cos}(g\nu - \vartheta),\quad \frac{d^2s}{d\nu^2} = -g^2\gamma \operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta)$$

also ist auch

$$0 = -g^2\gamma\operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta) + \gamma\operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta) + \frac{3\mu a}{2b}(1 - 2A^0 - B^0).\gamma\operatorname{Sin}(g\nu - \vartheta),$$

und daher

$$B^0 = 1 - 2A^0 - \frac{2b}{3\mu a}.(g^2 - 1)$$

Es ist aber $g = 1.004022$, $\frac{\mu a}{b} = 0.005579$,

$A^0 = 0.00716$, also ist auch $B^0 = 0.0220$,

und daraus $p = \frac{3\mu a}{2b}(1 - 2A^0 - B^0) = 0.00806$.

Ferner ist $\nu = 17313785''$ die jährliche mittlere Bewegung des Mondes, also

$$P = 69631''$$

oder die tägliche Bewegung der Mondsknoten ist

$$\frac{P}{365.25} = 3'\ 10''.639.$$

Nach den Beobachtungen ist sie $3'\ 10''.776$.

I. Nach dem Vorhergehenden §. ist die Tangente γ der Neigung der Mondsbahn

$$\gamma = \frac{1}{C^{\frac{1}{2}}.\left(g - \frac{d\vartheta}{d\nu}\right)} = \frac{1}{C^{\frac{1}{2}}.(1+p)^{\frac{1}{4}}}$$

also constant, so fern die Gröſse p als constant betrachtet wird. Diese Beständigkeit der mittleren Neigung wird ebenfalls durch die Beobachtungen bestätigt.

§. 15.

Ein dem vorhergehenden ähnliches Verfahren läſst sich auch auf die Gleichung (B) anwenden.

Es war $u = \frac{1}{a}[1 + e \operatorname{Cos}(c\nu - w)]$, also ist, wenn man d^2e vernachlässiget,

$$\frac{d^2u}{d\nu^2} + u = -\frac{2de}{ad\nu^2}(cd\nu - dw)\operatorname{Sin}(c\nu - w) + \frac{ed^2w}{ad\nu^2}\operatorname{Sin}(c\nu - w)$$

$$- \frac{e}{ad\nu^2}(cd\nu - dw)^2 \operatorname{Cos}(c\nu - w) + \frac{1}{a}[1 + e \operatorname{Cos}(c\nu - w)]$$

Ist aber

$$q = \frac{3\mu}{4}\left[2 + (1-c)A^2 - \frac{4(16-c^2)}{4-c^2}A^0 + \frac{12 - 3c + c^2}{1-m}.A'\right.$$

so gibt die Gleichung (B)

$$\frac{d^2u}{d\nu^2} + u = \frac{qe}{b}\operatorname{Cos}(c\nu - w).$$

Wenn man also wieder die Glieder der beyden Ausdrücke von $\frac{d^2u}{d\nu^2} + u$, welche die Sinus oder Cosinus des Winkels $(c\nu - w)$ enthalten, vergleicht, so ist

$$0 = \frac{ed^2w}{ad\nu^2} - \frac{2}{a}\left(c - \frac{dw}{d\nu}\right).\frac{de}{d\nu}$$

$$0 = 1 - \left(c - \frac{dw}{d\nu}\right)^2 - q$$

weil schon sehr nahe $a = b$ ist. Das Integral der ersten Gleichung ist

$$\frac{1}{c - \frac{dw}{d\nu}} = C.\frac{e^2}{a^2},$$ und die zweyte gibt

$$\frac{dw}{dv} = c - (1 - q)^{\frac{1}{2}}$$

Sieht man also, was hier erlaubt ist, die Gröfse q als constant an, so hat man

$$w = cv - v . \sqrt{1 - q}$$

oder die jährliche Bewegung des Mondsperigeums ist

$$Q = v - v . \sqrt{1 - q}.$$

Es ist aber $q = 0.01684$, $v = 17313785$, also die tägliche Bewegung des Perigeums

$$\frac{Q}{365.25} = 6' 40''. 966.$$

Nach den Beobachtungen ist diese Gröfse $6' 40''.932$.

I. Endlich ist die Excentricität der Mondesbahn aus dem ersten der vorgehenden Integrale

$$e = \frac{a}{C^{\frac{1}{2}} \left(c - \frac{dw}{dv} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{C^{\frac{1}{2}} (1 - q)^{\frac{1}{4}}}$$

also beständig, so wie die Neigung (§. 14. I.), was ebenfalls durch die Beobachtungen bestätiget wird.

§. 16.

Der Ausdruck von $\left(\frac{dQ}{du}\right)$ des §. 1 ist, wenn man der Kürze wegen $s = 0$ setzt,

$$\left(\frac{dQ}{du}\right) = 1 - \frac{m' u'^3}{2u^3} [1 + 3 \operatorname{Cos} 2 (v - v')].$$

Es ist aber $u = \frac{1}{r}$, $u' = \frac{1}{r'}$, und daher

$$\left(\frac{dQ}{du}\right) = - r^2 \left(\frac{dQ}{dr}\right), \text{ also auch}$$

$$- \left(\frac{dQ}{dr}\right) = \frac{1}{r^2} - \frac{m' r}{2 r'^3} [1 + 3 \operatorname{Cos} 2 (v - v')]$$

und dieses ist die Kraft, welche auf den Mond in der Richtung der Entfernung r des Mondes von der Erde wirkt. Da ohne die Wirkung der Sonne die auf den Mond wirkende Kraft K der Erde gleich $\frac{1}{r^2}$ wäre, so folgt aus dem letzten Ausdrucke,

dafs die Sonne im Allgemeinen eine Verminderung der Schwere des Mondes gegen die Erde hervorbringt, und dafs diese Verminderung, wenn man von ihren periodischen Aenderungen abstrahirt, im Mittel gleich $k = \frac{m'r}{2r'^3}$ ist. Das Verhältnifs dieser beyden auf den Mond wirkenden Kräfte ist also

$$\frac{k}{K} = \frac{m'r^3}{2r'^3}. \text{ Nach §. 6 ist aber } m' = \frac{a'^3 n'^2}{a^3 n^2}$$

also ist auch, wenn man $a' = 1$, und $r = a$ setzt, oder die Excentricität der Mondsbahn vernachlässigt $\frac{k}{K} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n'^2}{n^2 r'^3}$. Nach §. 8 ist aber $\frac{n'}{n} = 0.0748$ das Verhältnifs der mittleren Bewegungen der Sonne und des Mondes, also ist $\frac{k}{K} = \frac{1}{357.5 r'^3}$, oder die Wirkung der Sonne vermindert die Schwere des Mondes gegen die Erde um ihren 357.5sten Theil. Man sieht leicht, dafs die Entfernung r des Mondes von der Erde durch die Wirkung der Sonne in demselben Verhältnisse vergröfsert wird, so dafs man hat $\frac{dr}{r} = \frac{k}{K}$, und dafs daher die Bahn des Mondes durch die Wirkung der Sonne im Allgemeinen vergröfsert wird.

Da beyde Kräfte k und K gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet sind, so hat man nach dem Princip der Erhaltung der Flächen (Kap. III. §. 2)

$$d.[r^2 d(v - v')] = 0, \text{ oder } 2rdrd(v - v') + r^2 d^2(v - v') = 0$$

oder

$$\frac{d^2(v - v')}{d.(v - v')} = -\frac{2dr}{r} = -\frac{2k}{K} = -\frac{1}{179 r'^3}$$

Vernachlässiget man aber, wie zuvor, die Excentricität der Mondsbahn, so ist $d.(v - v') = ndt$. Ferner ist, wenn e' die Excentricität der Erdbahn, und α' die mittlere Anomalie der Sonne bezeichnet,

$$r' = 1 + \frac{e'^2}{2} - e' \operatorname{Cos} \alpha' - \tfrac{1}{2} e'^2 \operatorname{Cos} 2\alpha' +$$

$$\text{oder } \frac{1}{r'} = 1 + \tfrac{3}{2} e'^2 + 3e' \operatorname{Cos} \alpha' + \tfrac{9}{2} e'^2 \operatorname{Cos} 2\alpha'$$

also die letzte Gleichung, da $d^2 v' = 0$ ist

$$d^2.v = -\frac{ndt}{179}(1 + \tfrac{3}{2} e'^2) - \frac{3e'ndt}{179}(\operatorname{Cos} \alpha' + \tfrac{3}{2} e' \operatorname{Cos} 2\alpha')$$

Da aber (nach §. 8) $m = \frac{n'}{n}$, oder $n = \frac{n'}{m}$ ist, wo $m = 0.0748$, so kann man in dem letzten Gliede der vorigen Gleichung $ndt = \frac{n'}{m}.dt$ das heifst $\frac{d\alpha'}{m}$ setzen. Integrirt man dann diese Gleichung, so erhält man:

$$d\nu = -\frac{nt}{179} - \frac{3n}{358}\int e'^2\, dt - \frac{3e'}{179m}(\text{Sin}\,\alpha' + \tfrac{3}{4}e'\,\text{Sin}\,2\,\alpha')$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist ein Theil der mittleren Bewegung nt des Mondes, nämlich der constante Theil der Verzögerung dieser mittleren Bewegung, welche durch die Wirkung der Sonne entsteht, und die also den 179sten Theil des Ganzen beträgt. Das letzte Glied enthält die jährliche Gleichung des Mondes (§. 9). Da nach §. 8 $e' = 0.01681$ und $m = 0.0748$ ist, so ist diese jährliche Gleichung gleich

$$-12'\,57''\,\text{Sin}\,\alpha' - 9''.8\,\text{Sin}\,2\,\alpha'.$$

Das zweyte Glied jener Gleichung endlich, oder $\frac{3n}{358}\int e'^2\, dt$, würde ebenfalls, so wie das erste, einen Theil der mittleren Bewegung ausmachen, wenn die Excentricität e' der Erdbahn constant wäre. Da sie aber durch die Wirkung der Planeten veränderlich ist (Kap. X. §. 3. XI. §. 5.) so entsteht aus diesem Gliede eine säkuläre Gleichung der mittleren Bewegung, dieselbe, welche wir schon §. 12 und 13 betrachtet haben.

§. 17.

Diese auf den Mond nach der Richtung der r wirkende Kraft, oder die Normalkraft $N = \frac{1}{r^2} - \frac{m'r}{2r'^3}[1 + 3\,\text{Cos}\,2(\nu - \nu')]$ ändert ihren Werth mit der Stellung des Mondes gegen die Sonne. Für $\text{Cos}\,2\,(\nu - \nu') = -\frac{1}{3}$, d. h. nahe zehn Grade vor oder nach dem Octanten (wo $2\,(\nu - \nu')$ gleich einem, oder drey rechten Winkeln ist,) wird jene Kraft $N = \frac{1}{r^2}$, wie in der ungestörten Ellipse. In den Quadraturen (wo $2\,(\nu - \nu')$ gleich zwey rechten Winkeln ist) ist sie $N = \frac{1}{r^2} + \frac{\mu}{r^2}$, und in den Syzygien, (wo $2\,(\nu - \nu')$ gleich Null ist) ist sie $N = \frac{1}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2}$, wo der Kürze wegen

$$\mu = \frac{m'r^3}{r'^3} = \frac{m'a^3}{a'^3} = 0.0056 \text{ (§. 6 und 8)}$$

gesetzt wurde, und wo also μ eine gegen die Einheit sehr kleine Grö-

ſse ist. Daraus folgt, daſs die den Mond bewegende Normalkraft durch die Wirkung der Sonne in den Quadraturen vermehrt, und in den Syzygien um das doppelte jener Vermehrung vermindert, also im Allgemeinen **vermindert** wird. Die Störung dieser Kraft, oder der Theil

$$\frac{m' r}{2r'^3} [1 + 3 \text{Cos}\, 2 (v - v')]$$

derselben, welcher der Wirkung der Sonne angehört, ist überhaupt ein Gröſstes, und gleich $\frac{2\mu}{r^2}$ in den Syzygyen, aber der absolute Werth dieser gröſsten Störung hängt von der Lage der Apsiden gegen die Sonne ab. Nennt man nämlich $N_{\prime}$ und $N_{\prime\prime}$ die Normalkräfte in den Syzygien, welche zu den Distanzen $r_{\prime}$ und $r_{\prime\prime}$ gehören, so ist $N_{\prime} : N_{\prime\prime} = \frac{1 - 2 m' r_{\prime}^3}{r_{\prime}^2} : \frac{1 - 2 m' r_{\prime\prime}^3}{r_{\prime\prime}^2}$, wenn man die Distanz $r' = a'$ der Erde von der Sonne als Einheit annimmt. Dieses Verhältniſs würde genau das verkehrte der Quadrate der Entfernungen seyn, wie in der reinen Ellipse, wenn $r_{\prime} = r_{\prime\prime}$ wäre, also wird sich auch dieses Verhältniſs der Kräfte $N_{\prime}$ $N_{\prime\prime}$ von dem $\frac{1}{r_{\prime}^2}, \frac{1}{r_{\prime\prime}^2}$ der reinen Ellipse desto mehr entfernen, je mehr die Gröſsen $r_{\prime}$ und $r_{\prime\prime}$ verschieden sind. Die letzten Gröſsen sind aber dann am meisten verschieden, wenn die eine derselben für das Perigeum, und die andere für das Apogeum gehört, woraus folgt, daſs die auf den Mond wirkende Normalkraft sich am meisten von der elliptischen Kraft entfernt, daſs also auch die ursprünglich elliptische Mondsbahn die gröſste Aenderung ihrer Gestalt leidet, wenn die Apsiden mit den Syzygien zusammen fallen, und umgekehrt: die geringste Aenderung, wenn die Apsiden mit den Quadraturen zusammenfallen.

So wie die Normalkraft $N = -\left(\frac{dQ}{dr}\right)$, die in der Richtung der r wirkt, den Werth von r oder die Gestalt der Ellipse ändert, eben so wird die Kraft $T = \frac{1}{r}\left(\frac{dQ}{dv}\right)$, oder nach §. 1,

$$T = -\frac{3 m' r}{2r'^3} \text{Sin}\, 2 (v - v'),$$

welche in der Richtung der Tangente der Bahn wirkt, die Geschwindigkeit des Mondes in seiner Bahn ändern, ohne auf die Entfernung r desselben von der Erde zu wirken. Diese **Tangentialkraft** T ist ein positives Gröſstes in den Octanten, welche vor den Syzygien liegen, und ein negatives Gröſstes in den Octanten, welche vor den Quadraturen hergehen. In den

Syzygien und in den Quadraturen selbst verschwindet diese Kraft gänzlich. Diese Kraft ist positiv vom ersten Viertel bis zum Vollmond, und vom letzten Viertel bis zum Neumond, und sie beschleunigt daher die Geschwindigkeit des Mondes; vom Neumond bis zum ersten Viertel, und vom Vollmond bis zum letzten Viertel aber ist diese Kraft negativ, und verzögert die Geschwindigkeit des Mondes, woraus also folgt, dafs die Geschwindigkeit des Mondes ein Gröfstes in den Syzygien, und ein Kleinstes in den Quadraturen ist, und dafs daher die stündliche Bewegung des Mondes von den Quadraturen zu den Syzygien wächst, und von den Syzygien zu den Quadraturen abnimmt.

Da, nach dem Vorhergehenden, in den Syzygien die Normalkraft ein Kleinstes, und die Geschwindigkeit des Mondes ein Gröfstes ist, so wird sich der Mond von der Tangente seiner hier als kreisförmig angenommenen Bahn, also auch von der Erde, in den Syzygien am wenigsten, und in den Quadraturen am meisten entfernen; oder der Mond fängt immer an in den Syzygien sich von der Erde zu entfernen, und in den Quadraturen sich der Erde zu nähern, oder endlich seine Distanz von der Erde ist in den Syzygien ein Kleinstes, und in den Quadraturen ein Gröfstes; eine Bemerkung, wodurch die Gleichung $24''.5$ Cos $2(v - v')$ der Parallaxe (§. 9) erklärt wird.

§. 18.

Wenn man die vorhergehenden Entwicklungen für die Länge und Breite des Mondes weiter fortsetzt, so erhält man noch mehrere kleine Glieder, von welchen besonders die drey folgenden merkwürdig sind.

I. Wenn man die Störung des Mondes untersucht, die aus der Voraussetzung entspringt, dafs die Erde keine vollkommene Kugel ist, so erhält man eine Störung der Breite des Mondes, welche den Ausdruck hat

$$\frac{(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}{2(g-1)} \cdot \frac{R^2}{a^2} \text{ Sin } 2\,e \,.\, \text{Sin } v$$

wo R der Halbmesser der Erde, α ihre Abplattung, β das Verhältnifs der Centrifugalkraft der Erde zu ihrer Schwere am Aequator, und e die Schiefe der Ekliptik ist. Diese Ungleichheit ist also dem Sinus der Länge v des Mondes proportional. Es ist aber, wenn die Horizontalparallaxe des Mondes $57'\ 11''$ ist,

$$\frac{R}{a} = \text{Sin } 57'\ 11'' = 0.01663,\quad g - 1 = 0.00402 \text{ (§. 2)}$$

$\beta = \frac{1}{289}$ (Kap. VI. §. 11) und $e = 23^\circ\ 28'$, also ist der Faktor von Sin v, oder der gröfste Werth jener Störung

$$x = \frac{(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}{2\,(g-1)} \cdot \frac{R^2}{a^2} \text{ Sin } 2\,e = \frac{0.02513\,\alpha - 0.0000435}{\text{Sin } 1''}$$

Nach den Beobachtungen ist aber dieser Faktor: $x = 6''.5$, also hat man, wenn man beyde Werthe von x gleich setzt,

$$\alpha = \frac{1}{335}.$$

Wäre die Abplattung, wie Einige wollen, $\frac{1}{230}$, so würde die vorhergehende Gleichung $x = 13''.6$, also den Faktor von x zweymahl gröſser geben, was mit den Mondsbeobachtungen nicht übereinstimmt.

II. Eine andere Ungleichheit der Länge des Mondes fand Laplace gleich

$$\frac{19}{4} \cdot \frac{(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}{g-1} \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot \gamma \text{ Sin } 2\,e \,.\, \text{Sin } \vartheta$$

die also von dem Sinus der Länge ϑ des aufsteigenden Knotens der Mondsbahn abhängt. Nach den Beobachtungen ist der Faktor von Sin ϑ oder der gröſste Werth dieser Störung der Länge des Mondes

$$x = \frac{19}{4} \cdot \frac{(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}{g-1} \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot \gamma \text{ Sin } 2\,e = 5''.6$$

Es ist aber die Neigung der Mondsbahn $\gamma = 18580 \text{ Sin } 1''$ (§. 8) und β, g, $\frac{R}{a}$, e wie zuvor, also

$$x = 4436\,(\alpha - 0.00173) = 5''.6,$$

woraus folgt $\alpha = \frac{1}{335}$ wie in I.

Wäre die Abplattung $\frac{1}{230}$, so hätte man $x = 11''.6$, also doppelt gröſser als nach den Beobachtungen.

Diese Abplattung von $\frac{1}{230}$ hatte Newton aus der Voraussetzung einer durchaus gleichförmigen Dichte der Erde gefunden, eine Voraussetzung, die nicht zugelassen werden kann, da höchst wahrscheinlich die Dichte der Erde mit der Nähe zu ihrem Mittelpunkte wächst, daher auch jene Abplattung von $\frac{1}{230}$ weder mit den Gradmessungen, noch mit den beobachteten Pendellängen übereinstimmt.

III. Noch gibt es eine merkwürdige Störung der Länge des Mondes, die nahe gleich

$$\frac{6}{25} \cdot \frac{a}{a'} \text{ Sin } (\nu - m\nu)$$

ist. Nach den Beobachtungen ist $\frac{6}{25} \cdot \frac{a}{a'} = 122''$.

Nennt man aber π und Π die Horizontalparallaxe der Sonne und des Mondes, so ist

$$\pi = \frac{R}{a'}, \text{ und } \Pi = \frac{R}{a}, \text{ also } \frac{a}{a'} = \frac{\pi}{\Pi}, \text{ und daher}$$

$$\pi = (122) \frac{25}{6} \Pi.$$

Ist daher, (wie in I), $\Pi = 0.01663$, so gibt die letzte Gleichung $\pi = 8''.45$ sehr nahe mit dem Resultate der beyden letzten Durchgänge der Venus übereinstimmend.

Wäre die Sonnenparallaxe $10''$, so würde jener Faktor $\frac{6}{25} \cdot \frac{a}{a'}$ gleich $144''$ seyn, was mit den Mondsbeobachtungen nicht übereinstimmt.

IV. Die vorhergehenden Bestimmungen der Sonnenparallaxe und der Abplattung der Erde setzen die Horizontalparallaxe Π des Mondes als bekannt voraus. Im I. Th. p. 231 ist aber gezeigt worden, wie ein einziger Beobachter, ohne seinen Ort auf der Erde zu verändern, diese Gröſse Π bestimmen kann.

Ist $t = 2360591''$ die siderische Revolution des Mondes, R der Halbmesser der Erde, und Π die noch unbekannte Horizontalparallaxe des Mondes für seine mittlere Entfernung von der Erde, so ist diese mittlere Entfernung selbst gleich $\frac{R}{\text{Sin } \Pi}$. Substituirt man also in dem Ausdrucke $r\, \alpha^2 \text{ Sin } 1''$ des Kap. VII. §. 8, für r die Gröſse $\frac{R}{\text{Sin } \Pi}$, und für α die Gröſse $\frac{360.60^2}{t}$ oder die siderische Bewegung des Mondes während einer Zeitsekunde, so erhält man die doppelte Fallhöhe A des Mondes für seine mittlere Entfernung während einer Sekunde

$$A = r\, \alpha^2 \text{ Sin } 1'' = \frac{R}{\text{Sin } \Pi} \left(\frac{360.60^2}{t}\right)^2 . \text{ Sin}^2\, 1'', \text{ oder da}$$

$$\text{Sin } 1'' = \frac{\pi}{180.60^2} \text{ ist, } A = \frac{4 R \pi^2}{t^2 \text{ Sin } \Pi},$$

welche Gröſse wegen der durch die Anziehung der Sonne bewirkten Verminderung (§. 16) noch um ihren 357.5^{sten} Theil zu klein ist, also durch $\frac{358.5}{357.5} = 1.003$ multiplicirt werden muſs. Die so vermehrte Fallhöhe ist aber eigentlich die Summe der Räume, durch welche der Mond gegen die Erde, und die Erde gegen den Mond in einer Sekunde fallen würde, und diese letzten zwey Fallhöhen sind den Massen der Erde und des Mondes proportional. Ist also M und m die Masse der Erde und die des Mondes, so muſs jene Fallhöhe noch durch $\frac{M}{M+m}$ multiplicirt werden, so daſs man also für die doppelte Fallhöhe des Mondes hat

$$A = \frac{4(1.003) R \pi^2}{t^2 \operatorname{Sin} \Pi} \cdot \frac{M}{M+m}$$

Ist aber l die Länge des einfachen Sekundenpendels, so ist die doppelte Fallhöhe der Körper auf der Oberfläche der Erde in der ersten Sekunde $= \pi^2 l$, und diese Gröſse muſs noch wegen der Schwungkraft der Erde um ihren $\frac{1}{433}$sten Theil vergröſsert werden, so daſs wenn $\left(1 + \frac{1}{433}\right) l = \lambda$ ist, die Geschwindigkeit, welche die Erde auf ihrer Oberfläche dem Körper in einer Sekunde mittheilt, gleich $\pi^2\lambda$ seyn wird. Wenn nun die Schwere der Erdkörper einerley ist mit der Kraft, welche den Mond bewegt, so muſs, da sich diese Kraft wie verkehrt das Quadrat ihrer Entfernung verhält, und da R die Entfernung des Pendels, und $\frac{R}{\operatorname{Sin} \Pi}$ die mittlere Entfernung des Mondes von dem Mittelpunkte der Erde ist, so muſs man haben

$$A : \pi^2 \lambda = R^2 : \frac{R^2}{\operatorname{Sin}^2 \Pi}$$

oder $\operatorname{Sin}^2 \Pi = \frac{A}{\pi^2 \lambda}$, oder endlich, wenn man den vorhergehenden Werth von A substituirt

$$R = \frac{t^2 \lambda \operatorname{Sin}^3 \Pi}{4.012} \cdot \frac{M+m}{M}$$

Es ist aber $l = 0.5093$ Toisen, $\lambda = 0.5104$, $\Pi = 57' \, 11''$

und $\frac{M}{m} = 69.75$,

also gibt die letzte Gleichung den Halbmesser der Erde

$R = 3309000$ Toisen.

Da also die Parallaxe des Mondes aus den Beobachtungen des Mondes in verschiedenen Höhen gefunden werden kann, ohne dafs es nöthig wäre, den Beobachtungsort zu verändern, und da es sich eben so mit der Bestimmung der Länge des Sekundenpendels verhält, so könnte der Astronom, ohne seine Sternwarte zu verlassen, durch die blofse Vergleichung seiner Beobachtungen mit der Theorie die Gröfsen der Erde nach IV, und ihre Abplattung nach I oder II, und endlich auch ihre Entfernung von der Sonne nach III bestimmen, welche drey Gröfsen man erst durch weite und beschwerliche Reisen in die andere Hämisphäre und durch sehr kostspielige Meridianmessungen kennen gelernt hat. Die Uebereinstimmung der auf so verschiedenen Wegen erhaltenen Werthe der Gröfse und Abplattung, und endlich der Entfernung der Erde von der Sonne ist einer der schönsten und auffallendsten Beweise für die allgemeine Schwere.

DREYZEHNTES KAPITEL.

Theorie der Satelliten Jupiters.

§. 1.

Eine vollständige Theorie der Satelliten Jupiters erfordert nicht minder umständliche Rechnungen, als die der Hauptplaneten unseres Sonnensystemes. Da wir aber hier die Methode, zu diesem Zwecke zu gelangen, mehr anzeigen, als vollständig ausführen wollen, so werden wir uns mehrere, die Rechnung sehr abkürzende Voraussetzungen erlauben, die, da sie in der Natur des Gegenstandes gegründet sind, der Wahrheit der Endresultate nur einen geringen Eintrag thun können.

Da die Beobachtungen blofs von den zwey äufsersten Satelliten, und zwar auf eine sehr unvollkommene Weise, eine kleine, von den beyden andern aber gar keine Excentricität gezeigt haben, so werden wir bey den folgenden Untersuchungen die Bahnen dieser Satelliten als vollkommen kreisförmig voraussetzen. Da ferner die Masse des Hauptplaneten so grofs gegen die Massen seiner Satelliten, und da seine Entfernung von der Sonne so bedeutend ist, so wird die Störung, welche die Anziehnng der Sonne in den Satelliten verursacht, nur sehr klein seyn; daher wir auch diese, so wie die noch geringeren Störungen Saturns, als unbeträchtlich vernachlässigen werden.

Sey r die Entfernung des ersten Satelliten von dem Mittelpunkte Jupiters, $nt + \varepsilon = l$ die mittlere, und v die wahre jovicentrische Länge des Satelliten, und m seine Masse, die Masse Jupiters als Einheit vorausgesetzt.

Für den zweyten, dritten und vierten Satelliten wollen wir diese Gröfsen mit einem, zwey und drey Strichen bezeichnen. Diefs vorausgesetzt, hat man für die Störung δr und δv des Radius Vector und der Länge des ersten Satelliten durch den zweyten, nach den Gleichungen (L) und (M) des IX. Kapitels, wenn man die dort angenommenen Bezeichnungen beybehält, und wenn $a, a' \ldots$ die Halbmesser ihrer ungestörten kreisförmigen Bahnen anzeigen, folgende Ausdrücke:

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m' n^2}{(n-n')^2 - n^2} \left[a^2 \left(\frac{dA'}{da} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a A' \right] \text{Cos}\,(l'-l)$$

$$+ \frac{m' n^2}{4(n-n')^2 - n^2} \left[a^2 \left(\frac{dA^2}{da} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a A^2 \right] \text{Cos}\,2\,(l'-l)$$

$$+ \frac{m' n^2}{9(n-n')^2 - n^2} \left[a^2 \left(\frac{dA^3}{da} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a A^3 \right] \text{Cos}\,3\,(l'-l) + \text{etc.},$$

und

$$\delta v = \left(\frac{m' n^2}{(n-n')^2} \cdot a A' + \frac{2 m' n^3}{(n-n')\,[(n-n')^2 - n^2]} \left[a^2 \left(\frac{dA'}{da} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a A' \right] \right) \text{Sin}\,(l'-l)$$

$$+ \left(\frac{m' n^2}{2\,(n-n')^2} \cdot a A^2 + \frac{m' n^3}{(n-n')\,[4(n-n')^2 - n^2]} \left[a^2 \left(\frac{dA^2}{da} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a A^2 \right] \right) \text{Sin}\,2\,(l'-l)$$

$$+ \left(\frac{m' n^2}{3\,(n-n')^2} \cdot a A^3 + \frac{2 m' n^3}{3(n-n')\,[9(n-n')^2 - n^2]} \left[a^2 \left(\frac{dA^3}{da} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a A^3 \right] \right) \text{Sin}\,3\,(l'-l) + \text{etc.}$$

Um die Störungen des ersten Satelliten durch den dritten und vierten zu erhalten, wird man in den vorhergehenden Ausdrücken die Gröfsen m' und l' in m'' l'' und m''' l''' verwandeln.

§. 2.

Das merkwürdige Verhältnifs, welches nach II Th. p. 235 zwischen den mittleren Bewegungen und zwischen den mittleren Längen der drey ersten Satelliten Statt hat, gibt den zweyten Gliedern der vorhergehenden Ausdrücke von δr und δv sehr beträchtliche Werthe, indem durch jene Verhältnisse die Divisoren jener Glieder sehr klein werden.

Es haben nämlich nach den Beobachtungen für die mittleren siderischen Bewegungen sehr nahe die Gleichungen Statt:

$$n = 2\,n', \text{ und } n' = 2\,n'', \text{ also auch } n - 3\,n' + 2\,n'' = 0,$$

und eben so für die mittleren Längen

$$l - 3\,l' + 2\,l'' = 180°$$

also ist auch sehr nahe

$$4(n-n')^2-n^2=(3n-2n')(n-2n')=2n(n-2n')$$

und $(n-n')^2-n'^2=n(n-2n')$,

ferner $2(l'-l'')=l-l'-180°$.

Wenn man blofs auf diese Glieder sieht, so gibt die letzte Gleichung des §. 1

$$d\nu=-\frac{m'n^3 F \operatorname{Sin} 2(l'-l)}{(n-n')[4(n-n')^2-n^2]}$$

$$\text{wo } F=-a^2\frac{dA^2}{da}-\frac{2n}{n-n'}aA^2 \text{ ist},$$

also auch, nach dem Vorhergehenden,

$$d\nu=\frac{m'nF}{n-2n'}\operatorname{Sin} 2(l-l').$$

Dieser Theil von $\delta\nu$ ist bey weitem die gröfste Störung des ersten Satelliten, und zugleich die einzige, welche die Beobachtungen zu erkennen gegeben haben.

Nennt man eben so in der Störung des zweyten Satelliten durch den ersten, den in Klammern eingeschlossenen Theil des ersten Gliedes G, so ist nach der letzten Gleichung des §. 1,

$$d\nu'=-\frac{2m'n^3}{(n-n')[(n-n')^2-n'^2]}\cdot G \operatorname{Sin}(l'-l)$$

oder da, nach dem Vorhergehenden,

$$n-n'=n' \text{ und } (n-n')^2-n'^2=n(n-2n') \text{ ist},$$

$$d\nu'=+\frac{m'n'}{n-2n'}\cdot G \operatorname{Sin}(l-l').$$

Heifst F' der ähnliche Theil des zweyten Gliedes jener Gleichung in der Störung des zweyten Satelliten durch den dritten, so erhält man, wie zuvor,

$$d\nu'=\frac{m''n'}{n'-2n''}F' \operatorname{Sin} 2(l'-l'')$$

oder da $2(l'-l'')=l-l'-180°$, und

$$n'-2n''=n-2n' \text{ ist},$$

$$d\nu'=-\frac{m''n'}{n-2n'}F' \operatorname{Sin}(l-l').$$

Man hat daher für die vereinigte Störung des ersten und dritten Satelliten auf den zweyten

$$\delta v' = \frac{n'}{n-2n'} (m\,G - m''F') \operatorname{Sin} (l - l').$$

Heifst man endlich G′ den ähnlichen Theil des ersten Gliedes jener Gleichung in der Störung des dritten Satelliten durch den zweyten, so ist:

$$d v'' = \frac{m'n''}{n'-2n''} \cdot G' \operatorname{Sin} (l' - l'') = \frac{m'n''}{n-2n'} \cdot G' \operatorname{Sin} (l' - l'').$$

Die Störungen des dritten Satelliten durch den vierten sind gegen die vorhergehenden sehr klein, daher sie hier weggelassen werden.

I. Die Werthe von δv, $\delta v'$, $\delta v''$ enthalten die vorzüglichsten Störungen der drey ersten Satelliten. Wir wollen sie, der Kürze wegen, so ausdrücken:

$$\left.\begin{array}{l} \delta v \;\; = \mathrm{I} \operatorname{Sin} 2 (l - l') \\ \delta v' \;= \mathrm{II} \operatorname{Sin} (l - l') \\ \delta v'' = \mathrm{III} \operatorname{Sin} (l' - l'') \end{array}\right\}$$

und wir werden in der Folge sehen, dafs die Werthe der Faktoren I, II, III, positiv sind.

Um zu untersuchen, welche Werthe diese drey Ausdrücke zur Zeit der Finsternisse der Satelliten erhalten, zu welcher Zeit man sie nämlich vorzüglich beobachtet, können wir die Winkel $l = nt + \varepsilon$ welche wir bisher auf die fixe Linie der Nachtgleichen bezogen, auch in der gegenwärtigen Betrachtung auf irgend eine bewegliche Linie beziehen, weil die Lage dieser Linie ganz aus den Ausdrücken $l - l'$, $l' - l''$, die wir hier allein betrachten, verschwindet. Ist also die Entfernung Jupiters von der Sonne, oder sein Radius vector diese Linie, so sind n n′ n″ die täglichen synodischen Bewegungen der Satelliten, und es ist klar, (Th. I. p. 235) dafs auch bey dieser Bedeutung der Gröfsen n n′ n″ die oben gegebenen Verhältnisse noch immer Statt haben werden. Nimmt man überdiefs an, dafs die zwey ersten Gröfsen ε und ε' gleich Null sind, das heifst, dafs im Anfange der Zeit t die zwey ersten Satelliten in ihrer Conjunction waren, so ist

$$l - 3l' + 2l'' = 180$$

oder, da $l = nt + 2 = nt$, $l' = n't + \varepsilon' = n't$, $l'' = n''t + \varepsilon''$ ist,

$$(n - 3n' + 2n'')\, t + 2\varepsilon'' = 180$$

oder endlich, da $n - 3n' + 2n'' = 0$ ist,

$$\varepsilon'' = 90^\circ.$$

Wir haben daher

$$l - l' = (n - n')\, t, \text{ und}$$

$$l' - l'' = (n' - n'')\,t - \varepsilon'' = (n' - n'')\,t - 90^\circ$$

und jene drey Gleichungen gehen in folgende über

$$\left.\begin{aligned} \delta v &= \text{I. Sin } 2\,(n - n')\,t \\ \delta v' &= -\text{II. Sin}\,(n - n')\,t \\ \delta v'' &= \text{III. Cos}\,(n' - n'')\,t \end{aligned}\right\}$$

In den Finsternissen des ersten Satelliten ist für den Augenblick seine mittlere Conjunction $nt = 0$. Es sey $n - 2n' = \omega$, also auch $2n - 2n' = n + \omega$, und daher

$$\delta v = \text{I. Sin } \omega\,t.$$

Eben so ist für die Finsternifs des zweyten $n' t = 0$, also $(n - n')\,t = (n' + \omega)\,t = \omega\,t$ und daher

$$\delta v' = -\text{II Sin } \omega\,t.$$

Endlich ist für die Finsternisse des dritten $n''\,t + \varepsilon'' = 0$, aber nach dem obenangeführten Verhältnisse der mittleren Bewegungen ist

$$n' - n'' = n - 2n' + n'', \text{ also auch}$$

$$(n' - n'')\,t + \varepsilon'' = (n - 2n' + n'')\,t + \varepsilon''$$

oder da $n - 2n' = \omega$ und $\varepsilon'' = 90$ ist, $(n' - n'')\,t + 90 = \omega\,t$, also auch

$$\delta v'' = \text{III. Sin } \omega\,t.$$

Diese drey Gleichungen zeigen, dafs die Werthe von δv, $\delta v'$, $\delta v''$ in den Finsternissen von demselben Winkel ω abhängen. Um die Periode T dieser Ungleichheit der Verfinsterungen der drey ersten Satelliten zu bestimmen, so ist sie nach jeder der drey vorhergehenden Gleichungen

$$T = \frac{360}{\omega} = \frac{360}{n - 2n'}$$

wo n und n' die täglichen synodischen Bewegungen der beyden ersten Satelliten bezeichnen. Nennt man aber s und s' die synodischen Revolutionen dieser Satelliten, so ist

$$n = \frac{360}{s} \text{ und } n' = \frac{360}{s'}$$

also auch die vorhergehende Gleichung

$$T = \frac{ss'}{s' - 2s}$$

Es is aber $s = 1^T.769861$ und $s' = 3^T.554094$, also

$$T = 437^T.6$$

oder die Unregelmäfsigkeiten der Verfinsterungen kommen bey jedem der drey Satelliten in 437.6 Tagen wieder. Bradley hat

der erste diese merkwürdige Periode von 437.6 Tagen aus den beobachteten Ungleichheiten der Verfinsterungen, aber bloſs bey dem ersten und zweyten Satelliten erkannt. Wargentin, welcher die ersten genaueren Tafeln der Verfinsterungen dieser Satelliten lieferte, dehnte diese Periode auch auf den dritten Satelliten aus, und schrieb sie den Einwirkungen dieser drey Körper aufeinander zu, aber ohne diese Vermuthung durch die Analysis beweisen zu können. Bailly und Lagrange, welche sich in dem Jahre 1766 mit der analitischen Entwicklung der Störungen der Jupitersmonde beschäftigten, fanden diese Ungleichheiten durch die Theorie zuerst, sowie sie sich auch zuerst den Beobachtern gezeigt haben. Laplace, der in dem vierten Buche der Mec. cel. diese Theorie am vollständigsten entwickelte, zeigte, daſs diese Ungleichheit, als eine Folge der gegenseitigen Störungen der drey ersten Satelliten, darauf gegründet sey, daſs die beyden oben erwähnten Verhältnisse zwischen ihren mittleren Bewegungen und zwischen ihren mittleren Längen nicht bloſs, wie die Beobachtungen anzeigten, beynahe, sondern in aller Schärfe richtig sey. Wenn jene Verhältnisse nicht genau Statt hätten, so würden auch die zwey Ungleichheiten des zweyten Satelliten, welche wir oben in der Gleichung, die G und F′ enthält, gefunden haben, nicht mehr in eine einzige zusammenflieſsen, sondern diese zwey Ungleichheiten würden sich sehr bald von einander trennen, und man müſste dann ganz andere und beträchtliche Ungleichheiten finden, was gegen die Beobachtungen ist. Die Voraussetzung, daſs ein bloſser Zufall diese drey Monde ursprünglich in die zu diesen Verhältnissen erforderliche Lage gesetzt habe, war sehr unwahrscheinlich, und Laplace fand, daſs es hinreichend war, wenn diese beyden Verhältnisse anfänglich nur beynahe Statt hatten, und daſs dann die gegenseitige Anziehung der drey ersten Satelliten hinreichend war, jene Verhältnisse in aller Schärfe hervorzubringen, und auch, so lange keine fremden äuſseren Wirkungen ihr System stören, für alle Zeiten zu erhalten.

§. 3.

Um die beyden Gleichungen des §. 1 numerisch zu entwickeln, nehmen wir folgende siderische Revolutionen der Satelliten an:

des ersten $1^T.769137787$
zweyten 3.551181017
dritten 7.154552808
vierten $16.689019396.$

Da die täglichen mittleren siderischen Bewegungen sich verkehrt, wie diese Revolutionen verhalten, so ist

$$n = 9.433419\, n'''$$
$$n' = 4.699569\, n'''$$
$$n'' = 2.332643\, n'''$$

Daraus findet man die synodischen Revolutionen nach Th. II. S. 232. Ist nämlich ϑ die siderische Revolution Jupiters, S die synodische und T die siderische Revolution der Satelliten, so ist

$$S = \frac{T\vartheta}{\vartheta - T}$$

Es ist aber $\vartheta = 4332^T.5963076$, also hat man, wenn man in der letzten Gleichung für T die eben gegebenen siderischen Umlaufszeiten der Satelliten substituirt, für die synodischen Umlaufszeiten derselben:

des ersten: $1^T.769861$
zweyten 3.554094
dritten 7.166386
vierten 16.758542.

Daraus folgt, daſs in der Periode von 437.6 Tagen der erste Satellit nahe 247, der zweyte 123 und der dritte 61 ganze synodische Revolution vollendet, und daſs daher diese drey Satelliten am Ende dieser Periode wieder sehr nahe dieselbe Lage gegen die Sonne haben, die sie im Anfange derselben hatten, in welcher Zeit daher auch ihre vorzüglichsten Störungen wieder zurückkommen. Vergl. §. 3.

Um die Halbmesser ihrer Bahnen zu erhalten, beobachtete Pound mit groſser Schärfe zu der Zeit, als Jupiter in seiner mittleren Distanz von der Erde war, die gröſste Digression des vierten Satelliten von dem Mittelpunkte Jupiters gleich $0°.1377778$, und zu derselben Zeit den Halbmesser des Jupiteräquators gleich $0°.0054167$. Da sich hier diese scheinbaren Gröſsen wie die wahren verhalten, so ist, wenn man den Halbmesser des Jupiteräquators zur Einheit annimmt, der Halbmesser der Bahn des vierten Satelliten

$$a''' = \frac{0.1377778}{0.0054167} = 25.4359.$$

Die drey anderen Halbmesser wird man am besten aus dem vorhergehenden Werthe von a''' und den gegebenen siderischen Revolutionen durch das dritte Gesetz Keplers ableiten. Man findet so:

$$a'' = 14.461893$$
$$a' = 9{,}066548$$
$$a = 5.698491.$$

Mit diesen Werthen erhält man nun nach den Gleichungen

des Kapitels VIII folgende Ausdrücke, wenn man die Satelliten von dem, dem Jupiter nächsten anzufangen, durch I, II, III, IV bezeichnet: (Mec. cel. IV. p. 85.)

	I und II	I und III	I und IV	II u. III	II u. IV	III u. IV
α	0.62852	0.39403	0.22403	0.62693	0.35645	0.56856
$b^{0}_{-\frac{1}{2}}$	2.20297	2.07842	2.02517	2.20191	2.06405	2.16520
$b^{1}_{-\frac{1}{2}}$	−0.59572	−0.38623	−0.22262	−0.59439	−0.35069	−0.54455
$b^{0}_{\frac{1}{2}}$	2.25884	2.08524	2.02583	2.25710	2.06851	2.19965
$b^{1}_{\frac{1}{2}}$	0.75431	0.41949	0.22839	0.75153	0.37492	0.65584
$b^{2}_{\frac{1}{2}}$	0.36321	0.12485	0.03846	0.36091	0.10080	0.28437
$b^{3}_{\frac{1}{2}}$	0.19235	0.04114	0.00719	0.19064	0.03003	0.13597
$b^{4}_{\frac{1}{2}}$	0.10651	0.01421	0.00141	0.10529	0.00938	0.06812
$\frac{db^{0}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$	1.09992	0.47609	0.23738	1.09315	0.41514	0.87893
$\frac{db^{1}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$	1.75001	1.20823	1.05958	1.74365	1.16467	1.54588
$\frac{db^{2}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$	1.45276	0.68137	0.35083	1.44484	0.59939	1.19029
$\frac{db^{3}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$	1.08460	0.32980	0.09772	1.07629	0.26332	0.81242
$\frac{db^{4}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$	0.77325	0.14980	0.02520	0.76552	0.10854	0.52652

Mit diesen Gröfsen können nun die Gleichungen des §. 1 entwickelt werden. Vor dieser Entwicklung mufs man bemer-

ken, daſs Laplace a. a. O. in jene beyden Gleichungen noch einige andere Betrachtungen aufgenommen hat, die hier, wo mehr das Verfahren, als die Ausführung desselben gegeben werden soll, als minder beträchtlich übergangen werden. Er findet so, wenn man alle Störungen, die unter 5 Sekunden sind, weglä ſst, und wenn man durch m m′ m″ m‴ die Massen der vier Satelliten, jede durch 10000 multiplicirt, bezeichnet:

$$\delta r = m'[0.0001 + 0.0005 \text{ Cos } (l'-l) - 0.0976 \text{ Cos } 2\,(l'-l) - 0.0004 \text{ Cos } 3\,(l'-l)] + m''[0.0001 \text{ Cos } (l''-l) - 0.0001 \text{ Cos } 2\,(l''-l)]$$

$$\delta v = m'[0^\circ.017 \text{ Sin } (l'-l) - 1^\circ.956 \text{ Sin } 2(l'-l) - 0^\circ.006 \text{ Sin } 3(l'-l)] + m''[0^\circ.003 \text{ Sin } (l''-l) - 0^\circ.002 \text{ Sin } 2\,(l''-l)]$$

$$\delta r' = m[-0.0004 + 0.0507 \text{ Cos } (l-l') + 0.0006 \text{ Cos } 2\,(l-l')] + m''[0.0007 \text{ Cos } (l''-l') - 0.0867 \text{ Cos } (l''-l') - 0.0006 \text{ Cos } 3\,(l''-l)]$$

$$\delta v' = m[-0^\circ.626 \text{ Sin } (l-l') - 0^\circ.005 \text{ Sin } 2\,(l-l')] + m''[0^\circ.017 \text{ Sin } (l''-l') - 1^\circ.090 \text{ Sin } 2\,(l''-l') - 0^\circ.006 \text{ Sin } 3\,(l''-l')]$$

$$\delta r'' = m[-0.0005 + 0.0006 \text{ Cos } (l-l'')] + m'[-0.0007 + 0.0414 \text{ Cos } (l'-l'') + 0.0009 \text{ Cos } 2(l'-l'')] + m'''[0.0007 \text{ Cos } (l'''-l'') - 0.0045 \text{ Cos } 2\,(l'''-l'') - 0.0004 \text{ Cos } 3\,(l'''-l'')]$$

$$\delta v'' = m[0^\circ.002 \text{ Sin } (l-l'')] + m'[-0^\circ 313 \text{ Sin } (l'-l'') - 0^\circ.004 \text{ Sin } 2\,(l'-l'')] + m'''[0^\circ 009 \text{ Sin } (l'''-l'') - 0^\circ.033 \text{ Sin } 2\,(l'''-l'') - 0^\circ.002 \text{ Sin } 3\,(l'''-l'')]$$

$$\delta r''' = m[-0.0009 + 0.0006 \text{ Cos } (l-l''')] + m'[-0.0009 + 0.0009 \text{ Cos } (l'-l''')] + m''[-0.0011 + 0.0033 \text{ Cos } (l''-l''') + 0.0006 \text{ Cos } 2(l''-l''')]$$

$$\delta v''' = m[0^\circ.001 \text{ Sin } (l-l''')] + m'[0^\circ.002 \text{ Sin } (l'-l''')] + m''[-0^\circ 003 \text{ Sin } (l''-l''') - 0^\circ.001 \text{ Sin } 2\,(l''-l''')]$$

§. 4.

In den vorhergehenden Ausdrücken müssen nun noch die Werthe der Massen der vier Satelliten bestimmt werden.

Die von Sin 2 (l′—l) abhängende gröſste Ungleichheit des ersten Satelliten fand Delambre aus bloſsen Beobachtungen in ihrem Maximum gleich 0.0022347 1 Tage, d. h. um diese Zeit können durch jene Ungleichheit die Finsternisse des ersten

Mondes verzögert oder beschleuniget werden. Um diese Zeit in Bogen zu verwandeln, mufs man sie durch 360" multipliciren, und das Product durch die synodische Revolution $1^{T}.76986$ dividiren, wodurch man erhält

$$\frac{(0.00223471)\,360}{1.76986} = 0.454553.$$

Nach der vorhergehenden Theorie aber ist diese Ungleichheit $(1.956)m'$, also hat man, wenn man beyde Ausdrücke gleich setzt,

$$m' = \frac{0.454553}{1.956} = 0.23235.$$

Auf eine ähnliche Art fand man $m'' = 0.88497$, $m''' = 0.42659$ und $m = 0.17328$, so dafs man also für die Massen der Satelliten erhält

I	Satellit	0.000017328
II	-	0.000023235
III	-	0.000088497
IV	-	0.000042659

die Masse Jupiters als Einheit vorausgesetzt.

Mit diesen Werthen von $m\,m'\,m''\,m'''$ gibt der vorhergehende Ausdruck von δv

$$\delta v = 0^{\circ}.004 \,\text{Sin}\,(l'-l) - 0.454 \,\text{Sin}\,2\,(l'-l) - 0.001 \,\text{Sin}\,3(l'-l)$$
$$+ 0.002 \,\text{Sin}\,(l''-l) - 0.002 \,\text{Sin}\,2\,(l''-l)$$

Es ist aber $l - 3l' + 2l'' = 180$, also

$$l''-l = 90 - \tfrac{3}{2}(l-l'), \text{ und}$$

$$2\,(l''-l) = 180 - 3\,(l-l'), \text{ also ist auch}$$

$$\delta v = -0.004 \,\text{Sin}\,(l-l') - 0.002 \,\text{Cos}\,\tfrac{3}{2}\,(l-l') + 0.454 \,\text{Sin}\,2\,(l-l')$$

für die Störung der Länge, welche der erste Satellit von den übrigen leidet. Laplace entwickelte a. a. O. diese Theorie umständlich, indem er auf die Excentricität der Bahnen und auf die Wirkung der Sonne Rücksicht nahm. Die Bahnen der beyden ersten Satelliten wurden sehr nahe kreisförmig gefunden. Nennt man t die Anzahl julianischer Jahre, die seit der Mitternacht des ersten Januars 1750 verflossen sind, und sind l, l', l'', l''' die mittleren jovicentrischen Längen dieser Satelliten in Beziehung auf die Frühlingsnachtgleiche der Erde, so ist

$$l = 15^{\circ}.012844 + (74324^{\circ}.35467315)\,t$$
$$l' = 311.84038 + (37027.13231488)\,t$$
$$l'' = 10.25414 + (18378.52113600)\,t$$
$$l''' = 72.551241 + (7878.84713604)\,t$$

und ebenso ist die mittlere Länge des Perijoviums, in Beziehung auf dieselbe Frühlingsnachtgleiche

für den dritten Satelliten

$$w'' = 309^\circ . 43860 + (2^\circ . 6247987)\,t$$

und für den vierten

$$w''' = 180 . 34249 + (0 . 7302361)\,t.$$

Die Excentricität der Bahn des dritten Satelliteu fand schon Wargentin aus den Beobachtungen veränderlich. Um das Jahr 1682 hatte nämlich die Mittelpunktsgleichung dieser Bahn ihren gröfsten Werth 0°.221, und im Jahre 1777 ihren kleinsten 0°.085. Die Ursache dieser Aenderungen entdeckte Laplace durch die Theorie; er fand, dafs sie von zwey verschiedenen Mittelpunktsgleichungen abhängen, deren die erste der Bahn dieses Satelliten eigen ist, und sich daher auf das Perijovium w'' bezieht, während die andere von der Excentricität der Bahn des vierten Satelliten abhängt, und sich also auf das Perijovium w''' bezieht. Diese Excentricität der Bahn des vierten Satelliten ist beträchtlich gröfser, als die des dritten, und sie beträgt in ihrem Maximum 0°.834. Eine andere Mittelpunktsgleichung des vierten Satelliten, die aber nur auf 0°.020 steigt, bezieht sich auf das Perijovium des dritten Satelliten, so dafs also die Bahn des vierten eigentlich auch eine veränderliche Excentricität hat. Indem Laplace a. a. O. auf die Störungen Rücksicht nahm, welche durch die Excentricitäten dieser Bahnen und durch die Anziehung der Sonne entstehen, fand er für die Zeit der Finsternisse, wo mehrere Ungleichheiten verschwinden, folgende Ausdrücke, in welchen ν die wahre jovicentrische Länge des Satelliten in seiner Bahn, von dem Frühlingsnachtgleichenpunkte der Erde gezählt, und A die mittlere Anomalie Jupiters vom Perihelium gezählt, bezeichnet:

$$\begin{aligned}
\nu = l & - 0^\circ . 004 \,\mathrm{Sin}\,(l - l') \\
& - 0 . 002 \,\mathrm{Cos}\,\tfrac{3}{2}\,(l - l') \\
& + 0 . 454 \,\mathrm{Sin}\,2\,(l - l') \\
& + 0 . 004 \,\mathrm{Sin}\,(\nu - w'') \\
& + 0 . 002 \,\mathrm{Sin}\,(\nu - w''') \\
& - 0 . 016 \,\mathrm{Sin}\,(l - 2\,l' + w'') \\
& - 0 . 007 \,\mathrm{Sin}\,(l - 2\,l' + w''')
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Coefficienten durch die synodische Revolution, und dividirt sie durch 360, d. h. multiplicirt man sie durch $\frac{(1.76986)\,86400}{360} = 425$, so erhält man die Correction $(\nu - l)$ der mittleren Conjunction des ersten Satelliten in Zeitsekunden ausgedrückt, und eben so für die drey folgenden Satelliten:

$$\begin{aligned}
\nu' = l' & - 0^\circ.015 \,\mathrm{Sin}\,(l'-l'') \\
& + 1.073 \,\mathrm{Sin}\,2(l'-l'') \\
& + 0.005 \,\mathrm{Sin}\,3(l'-l'') \\
& + 0.007 \,\mathrm{Sin}\,4(l'-l'') \\
& + 0.033 \,\mathrm{Sin}\,(l'-w'') \\
& + 0.014 \,\mathrm{Sin}\,(l'-w''') \\
& + 0.051 \,\mathrm{Sin}\,(l-2\,l'+w'') \\
& + 0.023 \,\mathrm{Sin}\,(l'-2\,l''+w''') \\
& - 0.010 \,\mathrm{Sin}\,A. \\
\nu'' = l'' & - 0^\circ.073 \,\mathrm{Sin}\,(l'-l'') \\
& - 0.001 \,\mathrm{Sin}\,2(l'-l'') \\
& - 0.004 \,\mathrm{Sin}\,(l''-l''') \\
& + 0.014 \,\mathrm{Sin}\,2(l''-l''') \\
& + 0.153 \,\mathrm{Sin}\,(l''-w'') \\
& + 0.068 \,\mathrm{Sin}\,(l''-w''') \\
& + 0.009 \,\mathrm{Sin}\,(l'-2\,l''+w'') \\
& + 0.004 \,\mathrm{Sin}\,(l'-2\,l''+w''') \\
& - 0.013 \,\mathrm{Sin}\,A. \\
\nu''' = l''' & - 0^\circ.003 \,\mathrm{Sin}\,(l''-l''') \\
& - 0.001 \,\mathrm{Sin}\,2(l''-l''') \\
& - 0.020 \,\mathrm{Sin}\,(l'''-w'') \\
& + 0.828 \,\mathrm{Sin}\,(l'''-w''') \\
& + 0.004 \,\mathrm{Sin}\,2(l'''-w''') \\
& - 0.004 \,\mathrm{Sin}\,(28^\circ.728+0^\circ.691\,t) \\
& - 0.031 \,\mathrm{Sin}\,A.
\end{aligned}$$

§. 5.

Bisher haben wir noch auf die Neigungen dieser Bahnen keine Rücksicht genommen. Setzen wir zuerst voraus, dafs die Lagen der Satellitenbahnen gegen die Ebene der Jupitersbahn durch die Beobachtungen gegeben seyen, und suchen wir daraus die Lage der Satellitenbahn gegen die Ekliptik.

Es sey (Vol. II. Fig. 1.) ♈ ☊' die Ekliptik, ♈ ☊ die Jupitersbahn, und ☊'☊ C die Satellitenbahn. Es bezeichne K und N die Länge des aufsteigenden Knotens der Jupitersbahn und die Neigung desselben gegen die Ekliptik;

k, n die Länge des aufsteigenden Knotens der Satellitenbahn und die Neigung derselben gegen die Jupitersbahn, und endlich

$\varkappa$, ν die Länge des aufsteigenden Knotens der Satellitenbahn und die Neigung derselben gegen die Ekliptik,

so hat man in dem sphärischen Dreyecke ♈ ☊ ☊′ die drey Winkel ♈ = N, ☊ = n, und ☊′ = 180 — ν, und die Seiten ♈ ☊ = k — K, und ♈ ☊′ = $\varkappa$ — K. Sind also die Gröſsen K N und k n gegeben, so findet man $\varkappa\,\nu$ durch folgende Gleichungen, in welchen x eine Hülfsgröſse bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}\ x &= \mathrm{tg}\ .\ n\ \mathrm{Cos}\ (k - K) \\ \mathrm{Cos}\ \nu &= \frac{\mathrm{Cos}\ n}{\mathrm{Cos}\ x}\ \mathrm{Cos}\ (N + x) \\ \mathrm{tg}\ (\varkappa - K) &= \mathrm{tg}\ (k - K)\ \frac{\mathrm{Sin}\ x}{\mathrm{Sin}\ (N + x)} \end{aligned}\right\}$$

Diese Ausdrücke enthalten die strenge Auflösung unserer Aufgabe. Da aber die Winkel N, n und 180 — ν nur klein sind, so läſst sich dieselbe Aufgabe noch auf folgende einfachere Weise auflösen.

Es sey C der Ort des Satelliten in seiner Bahn. Ein durch C auf die Jupitersbahn ♈ ☊ senkrechter Bogen schneide die Jupitersbahn in D, und ein durch C auf die Ekliptik ♈ ☊′ senkrechter Bogen schneide die Ekliptik in D′ und die Jupitersbahn in d; so ist CD′ die jovicentrische Breite des Satelliten über der Ekliptik, und man hat sehr nahe CD′ = CD + dD′. Bezeichnet man aber durch υ die jovicentrische Länge des Satelliten in seiner Bahn, so ist

$$\mathrm{Sin}\ CD = \mathrm{Sin}\ n\ \mathrm{Sin}\ (\upsilon - k) \text{ oder nahe genug}$$
$$CD = n\ \mathrm{Sin}\ (\upsilon - k), \text{ und eben so}$$
$$dD' = N\ \mathrm{Sin}\ (\upsilon - K), \text{ also auch}$$
$$CD' = n\ \mathrm{Sin}\ (\upsilon - k) + N\ \mathrm{Sin}\ (\upsilon - K) \text{ oder}$$
$$CD' = (n\ \mathrm{Cos}\,k + N\,\mathrm{Cos}\,K)\ \mathrm{Sin}\ \upsilon - (n\,\mathrm{Sin}\ k + N\,\mathrm{Sin}\,K)\ \mathrm{Cos}\ \upsilon.$$

Allein es ist auch

$$CD' = \nu\ \mathrm{Sin}\ (\upsilon - \varkappa) = \nu\ \mathrm{Cos}\ \varkappa\ \mathrm{Sin}\ \upsilon - \nu\ \mathrm{Sin}\ \varkappa\ \mathrm{Cos}\ \upsilon.$$

Setzt man daher die Coefficienten von Sin υ und Cos υ in diesen beyden Ausdrücken von CD′ einander gleich, so erhält man folgende Gleichungen

$$\nu\ \mathrm{Cos}\ \varkappa = n\ \mathrm{Cos}\ k + N\ \mathrm{Cos}\ K$$
$$\nu\ \mathrm{Sin}\ \varkappa = n\ \mathrm{Sin}\ k + N\ \mathrm{Sin}\ K,$$

woraus man also die Werthe von $\varkappa$ und ν findet, wenn die von k n, und von K N gegeben sind.

§. 6.

Da die Bahnen der Satelliten Jupiters nur sehr wenig gegen

die Ebene des Aequators dieses Planeten geneigt sind, so wollen wir zuerst die Lage dieses Aequators festsetzen.

Im Anfange des Jahres 1801 war die jovicentrische Länge des aufsteigenden Knotens dieses Aequators in der Bahn Jupiters gleich 314°.465, und dieser Knoten tritt jährlich gegen die Fixsterne um die Gröfse 0°.000074 zurück. Die Neigung des Aequators gegen die Jupitersbahn ist für dieselbe Epoche 3°.0920 mit der jährlichen Zunahme von 0°.0000063. Bezeichnet also t die Anzahl Jahre, die seit dem Anfange des Jahres 1801 verflossen sind, so ist die Länge des aufsteigenden Knotens des Aequators Jupiters in seiner Bahn

$$314°.4650 - 0°.000074\,t + 0°013917\,t$$
$$= 314°.4650 + 0.013843\,t$$

und die Neigung des Aequators gegen die Bahn Jupiters =

$$3°.0920 + 0°.0000063\,t.$$

Die mittleren Neigungen der vier Satelliten-Bahnen gegen die Jupitersbahn sind für dieselbe Epoche

I.	Satellit - -	3°. 0900
II.	- - - - -	3 . 0736
III.	- - - - -	3 . 0078
IV.	- - - - -	2 . 6828.

Die Knotenlinie dieser mittleren Satellitenbahnen fällt bey allen vier Satelliten mit der Knotenlinie des Aequators Jupiters in der Ekliptik zusammen, und daher sind die Neigungen der Satellitenbahnen gegen den Jupitersäquator

I.	Satellit - -	0°. 0020
II.	- - - - -	0 . 0184
III.	- - - - -	0 . 0842
IV.	- - - - -	0 . 4092.

Diese letzteren Neigungen der Bahnen gegen den Jupitersäquator sind constant, also ist auch die mittlere Lage dieser Bahnen derselben Säcularänderung unterworfen, welche wir oben für die des Jupiteräquators angegeben haben.

Die periodischen Aenderungen dieser Neigungen aber lassen sich so darstellen. Die Bahn eines jeden Satelliten bewegt sich gleichförmig uud mit einer constanten Neigung gegen seine mittlere Bahn so, dafs die wahre Länge der Bahn durch ihren Neigungswinkel gegen die mittlere Bahn und durch die Länge ihres auf diese mittlere Bahn sich beziehenden aufsteigenden Knotens gegeben ist. Diese Neigungen und Knotenlängen der wahren Bahnen auf ihren mittleren sind, wenn t wieder die Anzahl der seit 1801.00 verflossenen Jahre bezeichnet:

Der wahren Bahnen		
	Neigung gegen die mittlere Bahn	Knotenlänge in der mittleren Bahn
I.	unmerklich	
II.	$0°.4636$	$12°.8805 - 12°.0483\,t$
III.	0.2056	$222.9786 - 2.5538\,t$
IV.	0.2494	$70.4792 - 0.6914\,t$

und zu diesen Knotenlängen mufs noch die Präcession $50''.1\,t = 0°.013917\,t$ addirt werden, um diese Längen von dem wahren Frühlingspunkte der Erde zu erhalten.

Behält man also die Bezeichnung der Gröfsen v n k wie in §. 5. bey, und nennt man s die jovicentrische Breite des Satelliten über der Jupitersbahn, so hat man

$$\text{Sin}\, s = \text{Sin}\, n\ \text{Sin}\,(v - k) \text{ oder nahe}$$

$$s = n\ \text{Sin}\,(v - k).$$

Es ist aber für t julianische Jahre nach 1801 die Länge des mittleren Knotens aller Satellitenbahnen, von dem Frühlingspunkte der Erde gezählt, nach dem Vorhergehenden gleich $314°.4650 + 0°.013843\ t$, also hat man für den ersten Satelliten

$$s = 3°.0900\ \text{Sin}\,(v - 314°.4650 - 0°.013843\ t)$$

und eben so für den zweyten

$$s' = 3°.0736\ \text{Sin}\,(v' - 314°.465 - 0°.013843\,t).$$

Aber die Länge des aufsteigenden Knotens der wahren Bahn des zweyten Satelliten auf seiner mittleren Bahn ist

$$12°.8805 - 12°.0483\ t + 0°.013917\ t$$
$$= 12.8805 - 12.03438\ t$$

also die Verbesserung der mittleren Breite (nach §. 5.)

$$0°.4636\ \text{Sin}\,(v' - 12°.8805 + 12°.03438\ t).$$

Verfährt man eben so mit den übrigen Satelliten, so erhält man für ihre jovicentrischen Breiten über die Jupitersbahn

$$s = 3°.090\ \text{Sin}\,(v - 314°.465 - 0°.01384\ t)$$
$$s' = 3.074\ \text{Sin}\,(v' - 314.465 - 0.01384\ t)$$
$$+ 0.464\ \text{Sin}\,(v' - 12.880 + 12.03438\ t)$$
$$s'' = 3.008\ \text{Sin}\,(v'' - 314.465 - 0.01384\ t)$$
$$+ 0.206\ \text{Sin}\,(v'' - 222.979 + 2.55380\ t)$$
$$s''' = 2.683\ \text{Sin}\,(v''' - 314.465 - 0.01384\ t)$$
$$+ 0.249\ \text{Sin}\,(v''' - 70.479 + 0.69140\ t)$$

Aus diesen Ausdrücken kann man mit Hülfe der beyden letzten Gleichungen des §. 5 die Neigungen und Knotenlängen der wahren Satellitenbahnen gegen die Jupitersbahn berechnen.

Die tropischen Umlaufszeiten der Knoten der wahren Bahnen auf ihren mittleren, in Beziehung auf den Frühlingspunkt der Erde, erhält man aus den oben angegebenen jährlichen Bewegungen dieser Knoten. So ist für den zweyten Satelliten die jährliche siderische Bewegung 12°.0483, also die jährliche tropische Bewegung $12.0483 + 0.0139 = 12.0344$, und daher die gesuchte tropische Umlaufszeit dieses Knotens $\frac{360}{12.0344} = 29.914$ jul. Jahre, und eben so für den dritten 141.739 und für den vierten 531.350 Jahre.

Die Neigungen werden am gröfsten, wenn diese aufsteigenden Knoten mit dem aufsteigenden Knoten des Jupiteräquators zusammenfallen, und am kleinsten, wenn sie mit dem niedersteigenden Knoten des Jupiteräquators zusammenfallen. Um die Periode dieser Aenderungen der Neigungen zu finden, hat man z. B. für den zweyten Satelliten die jährliche tropische Bewegung der Knoten der wahren Bahn auf der mittleren gleich — 12°.03440, und die jährliche tropische Bewegung der Knoten des Jupiteräquators gleich + 0.01384, also ist die jährliche Bewegung der Knoten der wahren Bahn auf der mittleren in Beziehung auf den Knoten des Jupiteräquators gleich 12°.04824, und daher die Periode der Aenderung der Neigung des zweyten Satelliten

$$\frac{360}{12.04824} = 29.880 \text{ Jahre},$$

und eben so für den dritten 140.971, und für den vierten 520.712 Jahre.

Die Zeit der gröfsten Neigungen der Satellitenbahnen hat nach den vorhergehenden dann Statt, wenn der aufsteigende Knoten der Satellitenbahn z. B. für den zweyten $12°.8805 - 12°.03438\,t$ mit dem aufsteigenden Knoten des Jupiteräquators, oder mit $314.4650 + 0.013843\,t$ zusammenfällt. Setzt man also diese beyden Ausdrücke einander gleich, so erhält man $t = -25.0315$ Jahre, und da nach den vorhergehenden die Periode der gröfsten Neigungen bey diesem Satelliten 29.880 Jahre beträgt, so sind die Epochen der gröfsten Neigungen

1835.728; 1805.848; 1775.968; 1746.088; 1716.208; 1686.328 u. f.,

und eben so für den dritten 1906.146; 1765.175; 1624.204, und für den vierten 1968.805 und 1448.093. Maraldi fand diese gröfsten Neigungen aus unmittelbaren Beobachtungen für den zweyten Satelliten in dem Jahre 1747, 1717, 1687, und für den dritten in dem Jahre 1765 und 1633. Die Epochen der kleinsten Neigungen liegen zwischen den angegebenen Zahlen in der Mitte, und fallen daher z. B. für den zweyten Satelliten in die Jahre 1820.788; 1790.908 u. f.

§. 7.

Die Bewegungen dieser Satelliten um ihren Hauptplaneten können nicht gut unmittelbar von der Erde beobachtet werden, da ihre geocentrische Elongation vom Jupiter so klein ist, daſs der geringste Fehler der Beobachtung derselben schon Irrthümer von mehreren Graden in ihren jovicentrischen Bewegungen zur Folge haben würde. Ihre Finsternisse im Gegentheile biethen uns ein viel genaueres Mittel an, diese Bewegungen zu beobachten, und wir verdanken auch in der That der Beobachtung dieser Phönomene unsere Kenntnisse der vorzüglichsten Ungleichheiten dieser Körper. Die Neigungen der Bahnen der ersten drey Satelliten gegen die Jupitersbahn und ihre geringen Entfernungen sind die Ursache, daſs sie in jeder Revolution einmal verfinstert werden: der vierte aber geht in seiner Opposition oft über oder unter dem Schatten Jupiters vorbey, daher seine Finsternisse seltener sind.

Ein Satellit verschwindet für unsere Augen noch vor seinem gänzlichen Eintritte in den Schatten Jupiters, weil sein Licht schon durch den Halbschatten geschwächt wird, dessen Dichte mit seiner Nähe an der Gränze des vollen Schattens zunimmt. Der Umkreis des Schattenschnittes, welcher durch eine auf die Schattenachse senkrechte Ebene entsteht, und durch welche der Anfang, das Ende und die Dauer der Finsternisse bestimmt wird, ist nicht für alle Satelliten derselbe: er hängt nicht bloſs von der Entfernung vom Jupiter ab, mit welcher er wegen seiner kegelförmigen Gestalt immer kleiner wird, sondern er wird auch durch die scheinbare Distanz des Satelliten vom Jupiter, dessen lebhafter Glanz das viel mattere Licht des Satelliten schwächt, bestimmt, so wie durch die gröſsere oder geringere Fähigkeit der Oberfläche dieser Monde, das Licht zu reflectiren, und endlich durch die Refraction und durch die Schwächung der Sonnenstrahlen in der Atmosphäre des Hauptplaneten. Die gröſste Dauer der Finsternisse eines dieser vier Satelliten, die sonst den Durchschnitt jenes Schattenschnittes bestimmen würde, lehrt uns also noch nicht dieselbe Dauer für die andern Satelliten mit Genauigkeit kennen, aber die Vergleichung der gröſsten Dauer dieser Finsternisse bey allen Satelliten wird uns vielleicht über den Einfluſs der angegebenen Ursachen Aufklärung geben können. Die Veränderungen der Entfernung Jupiters von der Sonne und von der Erde, welche die Intensität des Lichtes der Satelliten ändern, werden ebenfalls ihre Wirkungen auf die Dauer dieser Finsternisse äuſsern, so wie die Höhe Jupiters über dem Horizonte des Beobachters, die Reinheit unserer Atmosphäre und die Güte unserer Instrumente. Alle diese Ursachen verbreiten mehrere Unsicherheiten über die Beobachtungen dieser Finsternisse, besonders über die der beyden letzten Satelliten, und es ist daher ein sehr vortheilhafter Umstand, daſs man bey diesen

beyden Monden in derselben Finsternifs oft zugleich den Eintritt und den Austritt derselben beobachten, und dadurch den Augenblick ihrer Opposition mit grofser Schärfe und unabhängig von den meisten der angeführten Störungen bestimmen kann.

Um die Gestalt des Schattens, welchen Jupiter auf die von der Sonne abgewendete Seite wirft, zu bestimmen, wollen wir zuerst diese beyden Körper als sphärisch annehmen. Sey a der Halbmesser der Sonne, b jener des Planeten, und c die Entfernung ihrer Mittelpunkte, in welcher auch die Achse der x liegt, so ist (II. Th. S. 314) die Gleichung für die Oberfläche des vollen Schattens

$$[ac-(a-b)x]^2 = [c^2-(a-b)^2].(y^2+z^2)$$

wo der Mittelpunkt der Sonne der Anfang der Coordinaten ist.

Für den Halbschatten gilt dieselbe Gleichung, wenn man in ihr b negativ, oder a + b statt a — b setzt. Ist der Kürze wegen

$$\lambda = \frac{b}{a}, \text{ und } f^2 = \frac{c^2}{a^2\left(1-\frac{b}{a}\right)^2} - 1,$$

so hat man für die Gleichung des Schattens

$$\left(\frac{c}{1-\lambda} - x\right)^2 = f^2 . (y^2+z^2)$$

wo für den Halbschatten die Gröfse λ negativ ist. Da für die Spitze dieses Schattenkegels $y = z = o$ ist, so hat man für die Entfernung dieser Spitze von dem Mittelpunkte der Sonne

$$x = \frac{c}{1-\lambda}$$

und von dem Mittelpunkte Jupiters

$$x - c = \frac{c\lambda}{1-\lambda}.$$

Da c viel gröfser als a ist, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen

$$f^2 = \frac{c^2}{a^2(1-\lambda)^2},$$

so dafs die Gleichung des Schattens ist

$$\frac{a^2(1-\lambda)^2}{c^2}.\left(\frac{c}{1-\lambda}-x\right)^2 = y^2+z^2.$$

Betrachten wir einen Schnitt dieses Schattens, welcher durch eine auf die Achse desselben senkrechte Ebene, die von

dem Mittelpunkte des Planeten um die Gröfse r entfernt ist, gebildet wird, so erhält man für die Gleichung dieses Schnittes, wenn man in dem letzten Ausdrucke $x = c + r$ setzt,

$$\frac{a^2}{c^2}[c\lambda - r(1-\lambda)]^2 = y^2 + z^2.$$

Dieser Schnitt ist also ein Kreis, dessen Halbmesser

$$\frac{a}{c}[c\lambda - r(1-\lambda)] = b\left\{1 - \frac{r}{c\lambda}(1-\lambda)\right\} \text{ ist.}$$

Nennt man α diesen Halbmesser des Kreises, so ist die Gleichung dieses Kreises $z^2 = \alpha^2 - y^2$, vorausgesetzt, dafs ein mit jenem paralleler Schnitt durch den Mittelpunkt Jupiters diesen Planeten selbst in einem Kreise schneidet.

Ist aber $\alpha = \frac{b(c+r) - ar}{c}$ der wahre Halbmesser des Schattenschnittes, so ist der scheinbare jovicentrische Halbmesser dieses Schnittes gleich $\frac{\alpha}{r}$, und der scheinbare heliocentrische Halbmesser desselben gleich $\frac{\alpha}{c+r}$, der Winkel endlich, welchen die Achse des Schattenkegels mit der Seite des Kegels bildet, ist gleich $\frac{a-b}{c}$. Nennt man ϱ den Halbmesser der Erdbahn, so ist (Vol. II. p. 488) $a = 961''.\varrho$, $b = 93''.4\varrho$ und $c = 5.2028\varrho$, also ist jener Winkel an dem Scheitel des Schattenkegels $\frac{a-b}{c} = \frac{867''.6}{5.2028} = 0^0\ 2'\ 47''$. Die Länge der Schattenachse vom Jupiter bis zum Scheitel ist (Vol. II. S. 314) gleich $\frac{bc}{a-b} = 0.5601\varrho$, und der Halbmesser der Bahn des vierten Satelliten (§. 3) gleich $25.4359.b = (25.4359)(93.4)\varrho$ Sin $1'' = 0.01152\varrho$; also über 48mal kleiner als die Schattenachse, daher die Finsternisse dieser Satelliten so häufig sind. — Allein die beträchtliche Abplättung Jupiters macht diese Voraussetzung nicht mehr zulässig. Wir wollen also noch auf diese Abplättung Jupiters Rücksicht nehmen, und dabey, was hier ohne merklichen Fehler geschehen kann, annehmen, dafs der Aequator dieses Planeten mit seiner Bahn zusammenfalle, wodurch also jene beyden Schnitte zu zwey ähnlichen Ellipsen werden, deren kleine Achsen auf der Bahn Jupiters senkrecht stehen. Die Gleichung eines Kreises des Halbmessers α ist $z^2 = \alpha^2 - y^2$. Wenn man aber aus dem Mittelpunkte dieses Kreises in seiner Ebene eine Ellipse be-

schreibt, deren halbe groſse und kleine Achse α und β sind, so ist die Gleichung dieser Ellipse

$$z^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - y^2).$$

Nennt man A die Abplattung dieser Ellipse, so ist $A = \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1$, also auch die Gleichung der Ellipse

$$(1 + A)^2 . z^2 = \alpha^2 - y^2.$$

Wenden wir dieses auf den elliptischen Schnitt des Schattens in der Entfernung $x = c + r$ an, so hat man, wenn ϱ' die Abplattung dieser Ellipse bezeichnet, für die Gleichung des Schnittes

$$(1 + \varrho')^2 . z^2 = \alpha^2 - y^2.$$

Um noch den Werth der Gröſse ϱ' für jede Entfernung des Schnittes zu bestimmen, sey ϱ die Abplattung Jupiters selbst, so ist

$$c : \varrho = c + r : \varrho',$$

also ist $\varrho' = \varrho\left(1 + \frac{r}{c}\right)$. Es ist aber die Abplattung Jupiters $\varrho = 0.07130$, wo der Halbmesser seines Aequators die Einheit, und die halbe Achse des Poles gleich $(1 - \varrho) = 0.92870$ ist.

Daraus folgt zugleich, daſs die gröſste Breite des Halbschattens in der Distanz r von dem Mittelpunkte Jupiters gleich der Differenz der zwey Werthe von α für den vollen und den halben Schatten ist, d. h. daſs diese gröſste Breite des Halbschattens gleich

$$b\left(1 + \frac{r}{\lambda c}(1 + \lambda)\right) - b\left(1 - \frac{r}{\lambda c}(1 - \lambda)\right) = \frac{2br}{\lambda c}$$

oder gleich $\frac{2ar}{c}$ ist, wo a den Halbmesser der Sonne bezeichnet.

§. 8.

Sey Z die Höhe eines Satelliten über der Jupitersbahn im Augenblicke seiner Opposition. Man bezeichne ferner durch r die Distanz des Satelliten von dem Mittelpunkte Jupiters und durch $\upsilon_{\prime}$ den Winkel, welchen der Satellit seit dem Augenblicke der Opposition in seiner synodischen Bewegung beschrieben hat. Nimmt man dann für die Achse der x die Projection des Radius Vectors des Satelliten im Augenblicke seiner Opposition, d. h. die Verlängerung des Radius Vectors vom Jupiter selbst für dieselbe Zeit, so hat man, wenn $\triangle$ die Projection von r auf die Ebene der Bahn bezeichnet,

$$y = \triangle \sin \upsilon_{\prime}, \text{ und } \triangle^2 = r^2 - z^2, \text{ also}$$
$$y^2 = (r^2 - z^2) \sin^2 \upsilon_{\prime}$$

und daher wird die vorhergehende Gleichung der Oberfläche des Schattens

$$(1+\varrho')^2 z^2 = \alpha^2 - (r^2 - z^2) \operatorname{Sin}^2 \upsilon_{,},$$

oder wenn man die Gröfse $z^2 \operatorname{Sin}^2 \upsilon_{,}$ als ungemein klein vernachlässigt,

$$(1+\varrho')^2 z^2 = \alpha^2 - r^2 \operatorname{Sin}^2 \upsilon_{,}.$$

Es ist aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$z = Z + \frac{dZ}{d\upsilon_{,}} \operatorname{Sin} \upsilon_{,} + \frac{d^2 Z}{2 d\upsilon_{,}^2} \operatorname{Sin}^2 \upsilon_{,} + \ldots$$

also auch, wenn man diesen Werth von z in der vorhergehenden Gleichung substituirt, und $d^2 Z$ wegläfst,

$$(1+\varrho')^2 Z^2 + 2(1+\varrho')^2 \operatorname{Sin} \upsilon_{,} \frac{ZdZ}{d\upsilon_{,}} = \alpha^2 - r^2 \operatorname{Sin}^2 \upsilon_{,}$$

und diese für $\operatorname{Sin}^2 \upsilon_{,}$ quadratische Gleichung gibt

$$\operatorname{Sin} \upsilon_{,} = -\frac{(1+\varrho')^2}{r^2} \cdot \frac{ZdZ}{d\upsilon_{,}} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 - (1+\varrho')^2 \frac{Z^2}{r^2}}$$

oder, wenn wieder s die Tangente der Breite des Satelliten über der Jupitersbahn zur Zeit der Opposition, also $Z = rs$ ist,

$$\operatorname{Sin} \upsilon_{,} = -(1+\varrho'^2) \frac{sds}{d\upsilon_{,}} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 - (1+\varrho')^2 s^2}$$

und diese Gleichung, mit ihrem oberen Zeichen genommen, gibt den Sinus des Bogens, welchen der Satellit mit seiner synodischen Bewegung von der Opposition bis zur Emersion aus dem Schatten Jupiters beschrieben hat, weil α den Halbmesser des Schattenschnittes bezeichnet. Dieselbe Gleichung mit ihrem unteren Zeichen gibt denselben negativen Sinus von der Immersion bis zur Opposition.

I. Aus der letzten Gleichung folgt, dafs die halbe Sehne des Schattens, welche der Satellit während seiner Verfinsterung beschreibt, gleich

$$\sqrt{\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 - (1+\varrho')^2 s^2} \text{ sey.}$$

Um diesen Bogen in Zeit zu verwandeln, wird man ihn durch $\frac{\vartheta}{360}$ multipliciren, wo ϑ die synodische Revolution des Satelliten bezeichnet. Man hat daher für die **Dauer** t' der ganzen Finsternifs

$$t' = \frac{\vartheta}{180} \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 - (1+\varrho')^2 s^2}$$

oder da $s = \frac{Z}{r}$ ist,

$$t' = \frac{\vartheta}{180} \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 - (1+\varrho')^2 \frac{Z^2}{r^2}}$$

welche Ausdrücke mit denen übereinstimmen, die wir schon Vol. II. S. 239 erhalten haben. Um der letzten Gleichung eine für die Rechnung bequemere Form zu geben, sey n die Neigung der Satellitenbahn gegen die des Jupiters, und u sein Argument der Breite, oder die jovicentrische Distanz des Satelliten von dem aufsteigenden Knoten seiner Bahn in der Jupitersbahn, so ist, nach den Gleichungen der sphärischen Trigonometrie

$$\text{Sin } s = \text{Sin } u \text{ Sin } n.$$

Setzt man daher

$$\alpha = \frac{b(c+r) - ar}{c} \text{ und } \text{Cos } \varphi = \frac{r}{\alpha} (1+\varrho') \text{ Sin } u \text{ Sin } n,$$

so ist die Dauer der Finsternifs

$$t' = \frac{\vartheta}{180} \cdot \frac{\alpha}{r} \text{ Sin } \varphi.$$

Ist also der Knoten und die Neigung der Satellitenbahn gegeben, so findet man die Dauer der Finsternisse durch die drey letzten Gleichungen. Da übrigens zur Zeit der Mitte der Finsternifs die heliocentrische Länge Jupiters gleich der jovicentrischen Länge des Satelliten ist, so ist auch u die heliocentrische Distanz Jupiters von den Knoten der Satellitenbahn. Wenn man dann diesen Werth von $\frac{1}{2}t'$ von der Zeit der wahren Conjunction abzieht oder zu ihr addirt, so erhält man den Augenblick der Immersion und der Emersion des Satelliten, oder den Anfang und das Ende der Finsternifs.

Da aber der Halbschatten und die Vernachlässigung des Halbmessers des Satelliten den letzten Werth von t′ unsicher machen kann, so ist es besser, aus einer grofsen Anzahl von beobachteten Finsternissen diejenigen auszuwählen, deren Dauer die gröfste ist, und die daher in den Knoten der Satellitenbahn Statt gehabt haben. Nennt man T die auf diese Weise durch unmittelbare Beobachtungen bestimmte gröfste Dauer der Finsternifs, so hat man

$$T = \frac{\alpha \vartheta}{180 r}$$

und man wird die Dauer einer jeden andern Finsternifs durch die Gleichungen bestimmen

$$\vartheta = 180 \frac{rT}{\alpha}$$

$$\text{Cos}\ \varphi = \frac{\vartheta}{180\,T} \cdot (1+\varrho') \text{ Sin u Sin n}$$

$$t' = T \text{ Sin } \varphi.$$

Dieselben Gleichungen werden übrigens auch die Neigung n, oder die Länge des Knotens der Satellitenbahn geben, wenn die übrigen Gröfsen durch die unmittelbare Beobachtung der Finsternifs bekannt sind, und man bemerkt von selbst, dafs die längsten Finsternisse zur Bestimmung der Knoten, und die kürzesten zur Bestimmung der Neigung am geschicktesten sind. (Vol. II. S. 236).

II. Sey überhaupt T die Zeit, welche der Satellit braucht, um den Halbmesser α in seiner synodischen Bewegung zu durchlaufen, und t die Zeit, in welcher er den Bogen $v_{\prime}$ zurücklegt. Sey ferner $\frac{dv_{\prime}}{ndt} = X$, und a die mittlere Entfernung des Satelliten vom Jupiter, so ist $\beta = \frac{\alpha}{a}$ der Winkel, unter welehem der Halbmesser α des Schattens aus dem Jupiter gesehen wird, und man hat sehr nahe

$$\frac{t}{T} = \frac{v_{\prime}(1-X)}{\beta} \text{ oder } = \frac{a \text{ Sin } v_{\prime} . (1-X)}{\alpha}$$

oder wenn man den vorhergehenden Werth von Sin $v_{\prime}$ substituirt

$$\frac{t}{T} = (1-X) \left[-(1+\varrho')^2 \frac{a s d s}{\alpha d v_{\prime}} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - (1+\varrho')^2 \frac{a s}{\alpha}} \right]$$

Sieht man aber blofs auf die Mittelpunktsgleichung des Satelliten, so hat man, wenn man die zwey ersten Glieder des Ausdruckes für $\frac{r}{a}$ und v vergleicht, welche Vol. II. S. 60 und 67 gegeben wurden

$$\frac{r}{a} = 1 - \tfrac{1}{2} X$$

also ist auch

$$t = T(1-X) \left[-(1+\varrho')^2 \cdot \frac{s d s}{\beta d v_{\prime}} \pm \sqrt{(1+\tfrac{1}{2}X)^2 - (1+\varrho')^2 \frac{s^2}{\beta^2}} \right]$$

Heiſst endlich t′ die ganze Dauer der Finsterniſs, oder die Differenz der beyden vorhergehenden Werthe von t, so ist

$$t' = 2T(1-X) \cdot \sqrt{(1+\tfrac{1}{2}X)^2 - (1+\varrho')^2 \cdot \frac{s^2}{\beta^2}}$$

Kennt man aber aus den Beobachtungen die Werthe von T und t′, so ist nach der letzten Gleichung die Breite des Satelliten im Augenblicke der Opposition

$$s = \frac{\beta\sqrt{4T^2.(1-X) - t'^2}}{2T(1+\varrho')(1-X)}$$

Setzt man der Kürze wegen $\zeta = (1+\varrho')\,\frac{s}{\beta}$, also auch

$$\beta\,\zeta d\zeta = (1+\varrho')^2\,\frac{s\,ds}{\beta},$$

und vernachlässiget man das Quadrat der sehr kleinen Gröſse X, so sind die beyden vorhergehenden Gleichungen

$$t = T(1-X)\left(-\frac{\beta\zeta d\zeta}{dv'} \pm \sqrt{1+X-\zeta^2}\right) \text{ und}$$

$$t' = 2T(1-X)\,.\sqrt{1+X-\zeta^2}$$

§. 9.

Um das Vorhergehende auf die einzelnen Satelliten anzuwenden, so ist für den ersten nach den Beobachtungen die gröſste Dauer der Finsternisse oder T = 0.04713 Tage. Die Gröſse β ist die mittlere synodische Bewegung dieses Satelliten während der Zeit T, also da die synodische Revolution desselben 1,769860 Tage ist,

$$\beta = \frac{(360)(60)^2.(0,04713)}{1.769860} = 34511''.$$

Nach dem Vorhergehenden ist $\varrho = 0.07130$ und wenn man $\frac{r}{c} = \frac{a}{c} = 0.00514$ nimmt, so ist $\varrho' = 0.071666$. Ferner ist der Werth von X gleich $\frac{dv_{\prime}}{n\,dt}$; sieht man also nur auf den gröſsten Werth von $v_{\prime}$, so ist nach §. 4

$$v = 0^{\circ}.454\ \text{Sin}\,2\,(l-l') = 1634''\,\text{Sin}\,2\,(l-l'),\ \text{also auch}$$

$$X = \frac{dv}{n\,dt} = 1634\ \text{Sin}\,1''.\ \text{Cos}\,2\,(l-l') = 0.00792\ \text{Cos}\,2\,(l-l')$$

Weiter war $\zeta = \frac{(1+e)}{\beta} . s = \frac{1.071666}{9^0 . 5864}$. s, oder $\zeta = (0.11179)$ s,

und daher, wenn man in dieser Gleichung den Werth von s aus §. 6 substituirt

$$\zeta = 0^\circ.345 \text{ Sin } (v - 314^\circ.465 - 0^\circ.01384\, t)$$

Die zwey letzten Gleichungen des vorhergehenden §. sind also

$$t = 0^T.04713 (1 - X) \left(3451 1 \text{ Sin } 1'' \frac{\zeta d\zeta}{dv} \pm \sqrt{1 + X - \zeta^2}\right) \text{ oder}$$

$$t = (0^T.007885) \frac{\zeta d\zeta}{dv} \pm 0^T.04713 (1 - X) . \sqrt{1 + X - \zeta^2}$$

und die Dauer der ganzen Finsternifs ist

$$t' = 0^T.09426 (1 - X) . \sqrt{1 + X - \zeta^2}.$$

Eben so ist für den zweyten Satelliten T = 0.059757 Tage, $\beta = 21790''$, $e' = 0.07189$. Um den Werth von $X = \frac{dv'}{n'dt}$ zu erhalten, wird man die zwey gröfsten Glieder von v' (§. 4) nehmen, und so erhalten

$$X = 0.000578 \text{ Sin } (l' - w'') + 0.018725 \text{ Sin } 2 (l' - l'').$$

Eben so folgt aus §. 6

$$\zeta = 0.510 \text{ Sin } (v' - 314.465 - 0.01384\, t)$$
$$+ 0.077 \text{ Sin } (v' - 12.880 + 12.03438\, t),$$

woraus folgt

$$t = -0^T.006313 \frac{\zeta d\zeta}{dv'} \pm 0^T.059757 (1 - X) . \sqrt{1 + X - \zeta^2}$$

$$t' = 0.119514 (1 - X) \sqrt{1 + X - \zeta^2}.$$

Für den dritten Satelliten ist $T = 0^T.07419$, $\beta = 13417''$, $e' = 0.07224$, und wenn man wieder die drey gröfsten Glieder von v'' im §. 4 nimmt,

$$X = \frac{dv''}{n''dt} = 0.002684 \text{ Cos } (l'' - w'')$$
$$+ 0.001188 \text{ Cos } (l'' - w''')$$
$$- 0.001269 \text{ Cos } (l' - l'').$$

Eben so folgt aus §. 6

$$\zeta = 0.866 \text{ Sin } (v'' - 314.465 - 0.01384\, t)$$
$$+ 0.059 \text{ Sin } (v'' - 222.979 + 2.55380\, t)$$

woraus folgt

$$t = -0^T.005174 \frac{\zeta d\zeta}{dv''} \pm 0.07419 (1-X) \sqrt{1+X-\zeta^2}$$

$$t' = 0^T.14838 (1-X) \sqrt{1+X-\zeta^2}.$$

Für den vierten Satelliten endlich ist $T = 0^T.09890$, $\beta = 7651''$.

$$\varsigma' = 0.07296, \; X = \frac{dv'''}{n'''dt} = 0.014554 \, \mathrm{Cos}\,(l'''-w'''), \text{ und}$$

$$\zeta = 1.363 \, \mathrm{Sin}\,(v'''-314.465-0.01384t)$$
$$+ 0.126 \, \mathrm{Sin}\,(v'''-70.479+0.69140t), \text{ also auch}$$

$$t = -0.003668 \frac{\zeta d\zeta}{dv'''} \pm 0^T.09890 (1-X) \sqrt{1+X-\zeta^2}$$

$$t' = 0^T.19780 (1-X) \sqrt{1+X-\zeta^2}.$$

Da diese Werthe von t die Zeit ausdrücken, die seit dem Augenblicke der Opposition der auf die Jupitersbahn projecirten Satelliten verflossen ist, einen Augenblick, welchen man durch die in §. 4. 5 gegebenen Werthe von v und s, und durch die gegebenen Tafeln Jupiters selbst bestimmen wird, so geben diese Werthe von t auch die Zeit der Immersion und der Emersion der Satelliten.

I. Nach der Lage der Schattenachse gegen die Erde, kann die Seite des Schattens, wo der Eintritt oder Austritt des Satelliten Statt hat, von dem Körper Jupiters für uns bedeckt werden, und dann sieht man den Satelliten nicht in den Schatten, sondern in der Scheibe Jupiters ein- und austreten. Um diese Umstände näher zu bestimmen, sey l die jovicentrische Länge des Satelliten, und L die jovicentrische Länge der Erde, wo $L = 180° +$ geocentrische Länge Jupiters ist. Sey ferner a der Halbmesser der Satellitenbahn, und A die Entfernung Jupiters von der Erde, so hat man in dem ebenen Dreyecke zwischen der Erde, dem Jupiter und seinem Satelliten, wenn man die Breiten vernachlässiget, den Winkel an Jupiter $= l - L$, und wenn der Winkel an der Erde durch T bezeichnet wird

$$\mathrm{tg}\, T = \frac{a \, \mathrm{Sin}\,(l-L)}{A - a \, \mathrm{Cos}\,(l-L)}$$

$$\mathrm{tg}.\, T = \frac{a}{A} \mathrm{Sin}\,(l-L), \text{ oder endlich } T = \frac{a}{A} \frac{\mathrm{Sin}\,(l-L)}{\mathrm{Sin}\, 1''}$$

wo also T die Elongation (Vol. II. S. 76) des Satelliten für den Mittelpunkt der Erde ist. Ist T gröſser als der von der Erde gesehene Halbmesser Jupiters, so ist der Satellit sichtbar, ist T kleiner, so ist der Satellit entweder vor der Scheibe Jupiters

sichtbar, oder hinter derselben unsichtbar, nachdem (l — L) kleiner oder gröſser als 180 Grade ist. Ist endlich T gleich jenem Halbmesser, so ist der Satellit an dem Rande Jupiters selbst.

Es ist aber der scheinbare Halbmesser Jupiters in der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne gleich 93″.2, also ist der von der Erde gesehene Halbmesser gleich $\frac{93''.2}{A}$, und der Satellit erscheint daher am Rande Jupiters, wenn $T = \frac{93.2}{A}$, d. h. wenn

$$\text{Sin}\,(l - L) = \frac{93.2 \text{ Sin } 1''}{a} \text{ ist.}$$

Multiplicirt man die in §. 3 gegebenen Werthe von a durch 19″.5 den Halbmesser Jupiters in seiner mittleren Entfernung, so erhält man

$$a = 111''.1$$
$$a' = 176.8$$
$$a'' = 282.0$$
$$a''' = 496.0$$

und multiplicirt man die Sinus dieser Winkel durch 5.2028, der Entfernung Jupiters von der Sonne in Theilen der halben groſsen Achse der Erdbahn, so erhält man die Halbmesser der Satellitenbahnen in Theilen der halben groſsen Achse der Erdbahn, oder

$$a = 0.0030028$$
$$a' = 0.0044596$$
$$a'' = 0.0071131$$
$$a''' = 0.0125110$$

Substituirt man diese letzten Werthe von a in der vorhergehenden Gleichung $\text{Sin}\,(l - L) = \frac{93''.2}{a} \text{ Sin } 1''$, so erhält man

$$l - L = 8^\circ\,39'\,16'' \text{ oder } 171^\circ\,20'\,44''$$
$$l' - L = 5\;48\;54 \;\text{ - - }\; 174\;11\;6$$
$$l'' - L = 3\;38\;31 \;\text{ - - }\; 176\;21\;29$$
$$l''' - L = 2\;4\;11 \;\text{ - - }\; 177\;55\;49$$

und diese Winkel sind die Gränzen, zwischen welchen der Satellit von der Erde sichtbar ist. Mit ihrer Hülfe wird man die Eintritte der Satelliten in den Rand der Jupitersscheibe, oder ihre Bedeckung hinter dieser Scheibe bestimmen. So ist z. B.

für den ersten Satelliten für den Eintritt und Austritt auf der vordern Seite der Jupitersscheibe

$$l = \text{jovic. Länge der Erde} \mp 8^\circ\ 39'\ 16''$$

und für den Eintritt und Austritt auf der von uns abgewendeten Seite Jupiters

$$l = \text{geoc. Länge Jupiters} \mp 8^\circ\ 39'\ 16'',$$

welche Ausdrücke dazu dienen können, sich zu der Beobachtung dieser Erscheinungen vorzubereiten. Man bemerke noch, daſs, da 93″. 2 der Halbmesser Jupiters in der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne, oder in der Entfernung 1 ist, der Halbmesser Jupiters in Theilen der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne gleich Sin 93″. 2 = 93″. 2 Sin 1″ ist, und daſs daher die vorhergehenden Gränzen oder die Werthe von $\frac{93 . 2}{a}$ Sin 1″ die Horizontalparallaxe der Satelliten in Beziehung auf ihren Hauptplaneten ausdrücken.

§. 10.

Auſser den bisher betrachteten *wahren* Ungleichheiten, welchen die Satelliten durch ihre eigenen gegenseitigen Störungen und durch die Wirkung der Sonne unterworfen sind, gibt es andere, welche bloſs von den Ungleichheiten Jupiters und der Erde abhängen, und daher, da sie mit diesen verschwinden würden, bloſs *scheinbar* sind. Geht man z. B. von einer beobachteten Finsterniſs aus, die zu der Zeit, als Jupiter in seinem Perihelium war, Statt hatte, so würde man die Zeiten aller folgenden Finsternisse durch eine bloſse Addition der synodischen Revolution des Satelliten finden, wenn die Bewegung Jupiters in seiner Bahn gleichförmig wäre. Da aber die Bewegung dieses Planeten in seiner Sonnennähe gröſser ist, als die mittlere, so wird die nächstfolgende *wahre* Finsterniſs später eintreten, und zwar um die Zeit ϑ, welche der Satellit braucht, mit seiner mittleren synodischen Bewegung einen Bogen zu durchlaufen, welcher der Mittelpunktsgleichung Jupiters für diesen Ort seiner Bahn gleich ist. Ist nämlich t die periodische, und T die synodische Umlaufszeit des Satelliten, und ω der Bogen, welchen Jupiter in seiner Bahn während der Zeit T zurücklegt, so beschreibt der Satellit während der Zeit t den Bogen 360°, und während der Zeit T den Bogen 360° + ω, also ist $T = \left(\frac{360 + \omega}{360}\right) t$, oder T desto gröſser, je gröſser ω ist.

Ist also $d\omega$ die Mittelpunktsgleichung Jupiters, so ist

$$\vartheta = \frac{T}{360} \cdot d\omega.$$

Ist aber ε die Excentricität der Jupitersbahn, und m seine mittlere Anomalie vom Perihelium gezählt, so ist (Vol. II. S. 67)

$$d\omega = \frac{2\varepsilon}{\text{Sin } 1''} \text{ Sin m} = 5^{\circ}.510 \text{ Sin m}.$$

Substituirt man daher für T die in §. 3 gegebenen synodischen Revolutionen, so erhält man für die gesuchte Correction jeder nächstfolgenden Finsternifs

I. Satellit - -	$\vartheta = 0^h$. 650 Sin m	
II. - - - - -	1 . 305 Sin m	
III. - - - - -	2 . 640 Sin m	
IV. - - - - -	6 . 156 Sin m.	

I. Allein auch nach diesen Verbesserungen stimmten die so voraus berechneten Finsternisse noch nicht genau mit den Beobachtungen überein, und man fand bald, dafs die wahren Finsternisse sich verzögerten, wenn die Entfernung Jupiters von der Erde wuchs, und früher eintreten, wenn jene Enfernung abnahm, und dafs sie überhaupt zur Zeit der Opposition Jupiters mit der Sonne um nahe 0^h . 274 früher Statt hatten, als zur Zeit der Conjunction. Da Jupiter in seiner Opposition uns um den ganzen Durchmesser der Erdbahn näher ist, als in der Conjunction, so fand bekanntlich Römer (Vol. I. S. 56. u. Vol. II. S. 233) die Ursache jener Erscheinung in der Geschwindigkeit des Lichtes, welches also 0^h . 274 braucht, den Durchmesser der Erdbahn zu durchlaufen.

Die Ungleichheit, welche daraus für die Zeiten der Finsternisse entsteht, wird also von der Distanz D Jupiters von der Erde abhängen. Nennt man A die Länge der Sonne weniger der heliocentrischen Länge Jupiters, und r R die Entfernungen Jupiters und der Erde von der Sonne, so ist

$$D = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \text{Cos} A}$$

oder wenn man die dritten Potenzen von $\frac{1}{r}$ vernachlässiget

$$D = r + \frac{R^2}{4r} - R \text{ Cos } A \left(1 - \frac{R^2}{8r^2}\right) - \frac{R^2}{4r} \text{Cos } 2A - \frac{R^2}{8r^2} \text{ Cos} 3A.$$

Ist aber a ε die halbe grofse Achse und die Excentricität der Jupitersbahn, und m die mittlere Anomalie dieses Planeten vom Perihelium gezählt, und bezeichnet man für die Erde dieselben Gröfsen durch 1, E und M, so ist (Vol. II. p. 60)

$$r = a(1 - \varepsilon \text{ Cos m}) \text{ und } R = 1 - E \text{ Cos } M,$$

also der vorhergehende Ausdruck

$$D = a + \frac{1}{4\varepsilon} - \varepsilon \operatorname{Cos} m \left(a - \frac{1}{4a}\right) - \operatorname{Cos} A \left(1 - \frac{1}{8a^2}\right) - \frac{1}{4a} \operatorname{Cos} 2A$$

$$- \frac{1}{8a^2} \operatorname{Cos} 3A + E \operatorname{Cos} M \operatorname{Cos} A$$

und dieser Ausdruck mit der Zeit, welche das Licht braucht, den Halbmesser der Erdbahn zu durchlaufen, das heiſst, mit $0^h.137$ multiplicirt, wird die Zeit geben, um welche die Finsternisse in der Entfernung D später gesehen werden, als wenn die Geschwindigkeit des Lichtes unendlich groſs wäre. Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe von a ε und E aus Vol. II. S. 387, so erhält man für die sogenannte Lichtgleichung den Ausdruck

$$0.137\,D = 0^h.719 - 0^h.034 \operatorname{Cos} m - 0^h.136 \operatorname{Cos} A - 0^h.007 \operatorname{Cos} 2A$$

$$- 0^h.001 \operatorname{Cos} 3A + 0^h.002 \operatorname{Cos} M \operatorname{Cos} A.$$

VIERZEHNTES KAPITEL.

Präcession und Nutation.

§. 1.

Wir wollen nun untersuchen, welche Aenderungen die Anziehung der Himmelskörper in der Lage der Erdachse und in der Geschwindigkeit ihrer Rotation um diese Achse hervorbringt, und zu diesem Zwecke die Gleichungen II. des Kap. IV. §. 3 wieder vornehmen.

Diese Gleichungen sind

$$\left.\begin{aligned} Cdp + (B-A)\,qrdt &= dN \operatorname{Cos}\vartheta - dN' \operatorname{Sin}\vartheta \\ Apq + (C-B)\,prdt &= dN'' \operatorname{Cos}\varphi - (dN \operatorname{Sin}\vartheta + dN' \operatorname{Cos}\vartheta) \operatorname{Sin}\varphi \\ Bdr + (A-C)\,pqdt &= - dN'' \operatorname{Sin}\varphi - (dN \operatorname{Sin}\vartheta + dN' \operatorname{Cos}\vartheta) \operatorname{Cos}\varphi \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

wo
$$\begin{aligned} dN &= \int dm\,dt\,(Yx - Xy) \\ dN' &= \int dm\,dt\,(Zx - Xz) \\ dN'' &= \int dm\,dt\,(Zy - Yz) \end{aligned}$$

und
$$\begin{aligned} p\,dt &= d\varphi - d\psi \operatorname{Cos}\vartheta \\ q\,dt &= d\psi \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Sin}\varphi - d\vartheta \operatorname{Cos}\varphi \\ r\,dt &= d\psi \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\varphi + d\vartheta \operatorname{Sin}\varphi \end{aligned}$$

also auch $\frac{d\vartheta}{dt} = r \operatorname{Sin}\varphi - q \operatorname{Cos}\varphi$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{r \operatorname{Cos}\varphi + q \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}\vartheta}.$$

In diesen Ausdrücken müssen wir vor allem die Werthe der Gröſsen X Y Z bestimmen.

Die Lage eines Gestirns gegen den Schwerpunkt der Erde, den wir zugleich als ihren Mittelpunkt annehmen, werde durch die drey rechtwinklichten Coordinaten x y z, und die Lage eines Elementes dm der Erde gegen denselben Schwerpunkt werde durch

die den vorigen parallele Coordinaten x' y' z' gegeben, und es sey ϱ die Entfernung des Gestirns von dem Schwerpunkte der Erde, so wie r' die Entfernung des Gestirns von dem Elemente d m, das heifst

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ und } r'^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2.$$

Bezeichnet K' die Kraft, mit welcher das Gestirn auf den Schwerpunkt der Erde, und K'' die Kraft, mit welcher es auf das Element d m wirkt, so hat man, wenn M die Masse des Gestirns ist,

$$K' = \frac{M}{\varrho^2} \text{ und } K'' = \frac{M}{r'^2}.$$

Da wir aber hier nur die Rotation betrachten wollen, so abstrahiren wir von der fortschreitenden Bewegung der Erde, und bringen daher nur die Differenz jener beyden Kräfte (K''—K') in Rechnung. Diese Differenz der Kräfte oder diese Kraft (K''—K'), nach der Richtung der Achsen der x y z zerlegt, sey vorläufig $\left(\frac{dV}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy'}\right)$ und $\left(\frac{dV}{dz'}\right)$.

I. Diese drey Ausdrücke sowohl als auch die Gröfse V selbst mufs nun zuerst näher bestimmt werden. Es ist aber

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right) = \left(\frac{dK''}{dx'}\right) - \left(\frac{dK'}{dx'}\right),$$

und die Kraft K' nach der Richtung der x' zerlegt, ist gleich dem Produkte von K' in den Cosinus des Winkels, welchen x mit ϱ bildet, oder, da dieser Cosinus gleich $\frac{x}{\varrho}$ ist, so hat man

$$\left(\frac{dK'}{dx'}\right) = \frac{Mx}{\varrho^3},$$

und ganz eben so

$$\left(\frac{dK'}{dy'}\right) = \frac{My}{\varrho^3} \text{ und } \left(\frac{dK'}{dz'}\right) = \frac{Mz}{\varrho^3}.$$

Auf dieselbe Art erhält man auch

$$\left(\frac{dK''}{dx'}\right) = \frac{M(x'-x)}{r'^3}, \left(\frac{dK''}{dy'}\right) = \frac{M(y'-y)}{r'^3}, \left(\frac{dK''}{dz'}\right) = \frac{M(z'-z)}{r'^3}.$$

Die Gleichung $\left(\frac{dV}{dx'}\right) = \left(\frac{dK''}{dx'}\right) - \left(\frac{dK'}{dx'}\right)$ gibt also

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right) = -\frac{Mx}{\varrho^3} - \frac{M(x'-x)}{r'^3}, \text{ und eben so}$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right) = -\frac{My}{\varrho^3} - \frac{M(y'-y)}{r'^3}$$

$$\left(\frac{dV}{dz'}\right) = -\frac{Mz}{\varrho^3} - \frac{M(z'-z)}{r'^3}$$

Die Gröſse V selbst also, deren partielle Differentialien die so eben angezeigten Werthe haben, ist daher

$$V = -\frac{M}{\varrho^3}(xx'+yy'+zz') + \frac{M}{r'}$$

Nimmt man von diesem Ausdrucke der Gröſse V auch die partiellen Differentialien in Beziehung auf die Coordinaten x y z, so ist

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{Mx'}{\varrho^3} + \frac{3M}{\varrho^4}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) + \frac{M}{r'^3}(x'-x)$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = -\frac{My'}{\varrho^3} + \frac{3M}{\varrho^4}\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) + \frac{M}{r'^3}(y'-y)$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right) = -\frac{Mz'}{\varrho^3} + \frac{3M}{\varrho^4}\left(\frac{d\varrho}{dz}\right) + \frac{M}{r'^3}(z'-z)$$

und es ist $\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) = \frac{x}{\varrho}$, $\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) = \frac{y}{\varrho}$, $\left(\frac{d\varrho}{dz}\right) = \frac{z}{\varrho}$

II. Aus der Vergleichung beyder Systeme der partiellen Differentialgleichungen erhält man sofort

$$x'\left(\frac{dV}{dy'}\right) - y'\left(\frac{dV}{dx'}\right) = y\left(\frac{dV}{dx}\right) - x\left(\frac{dV}{dy}\right)$$

$$x'\left(\frac{dV}{dz'}\right) - z'\left(\frac{dV}{dx'}\right) = z\left(\frac{dV}{dx}\right) - x\left(\frac{dV}{dz}\right)$$

$$y'\left(\frac{dV}{dz'}\right) - z'\left(\frac{dV}{dy'}\right) = z\left(\frac{dV}{dy}\right) - y\left(\frac{dV}{dz}\right)$$

§. 2.

Durch die vorhergehenden Bestimmungen lassen sich die Werthe von N N' N'' bequemer ausdrücken. Es sind nämlich die Gröſsen $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy}\right)$, $\left(\frac{dV}{dz}\right)$ dieselben, welche in den obigen Ausdrücken für N, N', N'' durch X, Y, Z bezeichnet wurden, so daſs man also hat

$$\frac{dN}{dt} = \int dm \left\{ y\left(\frac{dV}{dx}\right) - x\left(\frac{dV}{dy}\right) \right\}$$

$$\frac{dN'}{dt} = \int dm \left[z\left(\frac{dV}{dx}\right) - x\left(\frac{dV}{dz}\right)\right]$$

$$\frac{dN''}{dt} = \int dm \left[z\left(\frac{dV}{dy}\right) - y\left(\frac{dV}{dz}\right)\right]$$

I. Um diese Ausdrücke von dN, dN′, dN″ noch weiter zu reduziren, wollen wir in ihnen die Werthe von $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ des §. 1. N. I. substituiren. Es ist nämlich

$$y\left(\frac{dV}{dx}\right) - x\left(\frac{dV}{dy}\right) = M(y'x - x'y)\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right).$$

Da aber die Gröſsen x′ y′ z′ gegen x y z sehr klein sind, so ist

$$\frac{1}{r'^3} = [\varrho^2 - 2(xx' + yy' + zz')]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\varrho^3} - \frac{3}{\varrho^5}(xx' + yy' + zz') +$$

Also hat man

$$\frac{dN}{dt} = \frac{3M}{\varrho^5}\int dm\,(yx' - xy')(xx' + yy' + zz')$$

und eben so

$$\frac{dN'}{dt} = \frac{3M}{\varrho^5}\int dm\,(zx' - xz')(xx' + yy' + zz')$$

$$\frac{dN''}{dt} = \frac{3M}{\varrho^5}\int dm\,(zy' - yz')(xx' + yy' + zz').$$

Führt man aber wieder die in Kap. IV. §. 3 gebrauchten Gröſsen ein

$$A = \int dm\,(y'^2 + z'^2),\quad B = \int dm\,(x'^2 + z'^2),\quad C = \int dm\,(x'^2 + y'^2),$$

und setzt, wie dort, $\int x'y'dm = \int x'z'dm = \int y'z'dm = 0$, so ist

$$\frac{dN}{dt} = \frac{3M}{\varrho^5}\int dm\,(x'^2 - y'^2)\,xy, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{3M}{\varrho^5}(B - A)\,xy \\ &\text{und eben so} \\ \frac{dN'}{dt} &= \frac{3M}{\varrho^5}(C - A)\,xz \\ \frac{dN''}{dt} &= \frac{3M}{\varrho^5}(C - B)\,yz \end{aligned}\right\}$$

§. 3.

Die zuletzt gefundenen Werthe von dN, dN′, dN″ sollen nun in den Gleichungen (I) des §. 1 substituirt werden. Vor dieser Substitution aber bemerke man Folgendes:

Nimmt man an, daſs die Erde ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entstandenes Sphäroid ist, so ist bekanntlich A = B, also auch $\frac{dN}{dt} = 0$. Ferner sind die Coordinaten x y z der Gleichungen (I) ganz willkührlich genommen, und dadurch diese Gleichungen selbst in ihrer ganzen Allgemeinheit dargestellt. Wollen wir uns z. B. vorstellen, die Ebene der x y sey die Ebene der Ekliptik, so ist ϑ die Neigung der Ekliptik gegen den Aequator, und φ der Winkel der x mit der ersten freyen Achse. Nehmen wir aber statt der Ekliptik den Aequator selbst, in welchem zwey der freyen Achsen liegen, und nehmen wir ferner die neue Achse der x als die erste freye Achse an, so ist $\vartheta = 0$, und $\varphi = 0$. Die ersten der Gleichungen (I) ist dann $dp = 0$, oder $p = D$, wo D eine constante Gröſse ist, und die beyden andern Gleichungen (I) sind

$$A\,dq + (C - A)\,r\,D\,.\,dt = \frac{dN''}{dt}$$

$$A\,dr + (A - C)\,q\,D\,.\,dt = -\frac{dN'}{dt}$$

oder wenn man die Werthe von $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$ aus §. 2 substituirt

$$\left.\begin{aligned} A\,dq + (C - A)\,r\,D\,dt &= \frac{3M\,dt}{\varrho^3}(C - A)\,y\,z \\ A\,dr + (A - C)\,q\,D\,dt &= \frac{3M\,dt}{\varrho^3}(A - C)\,x\,z \end{aligned}\right\} (1).$$

Ueberdieſs war $p\,dt = d\varphi - d\psi \operatorname{Cos} \vartheta$, und da $d\psi$ die Veränderung des Winkels der beyden Achsen der x, eine sehr geringe Gröſse ist, so ist sehr nahe $p\,dt = d\varphi$ oder $d\varphi = D\,.\,dt$.

§. 4.

Die Gleichungen (1) enthalten die Störungen der Rotation in Beziehung auf den Aequator. Will man diese Störungen, dem astronomischen Gebrauche gemäſs, in Beziehung auf die Ekliptik, als feste Ebene, wofür wir die Lage der Ekliptik für irgend eine fixe Epoche nehmen wollen, erhalten, so wird man drey neue Coordinaten $\xi\ \upsilon\ \zeta$ einführen, von denen $\xi\ \upsilon$ in der Ebene dieser festen Ekliptik, und ξ in der Linie der Nachtgleichen

liegt. Es sey nun wieder ϑ die Neigung der Ebene $\xi\,v$ und $x\,y$, und φ der Winkel der x mit ξ, so ist (Kap. IV. §. 2)

$$x = \xi \operatorname{Cos}\varphi + v \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Sin}\varphi - \zeta \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Sin}\varphi$$
$$y = v \operatorname{Cos}\vartheta \operatorname{Cos}\varphi - \xi \operatorname{Sin}\varphi - \zeta \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\varphi$$
$$z = v \operatorname{Sin}\vartheta + \zeta \operatorname{Cos}\vartheta$$

und wenn man diese Werthe von $x\ y\ z$ in (1) substituirt

$$\left.\begin{array}{l} A\,dq + (C-A)\,r\,D\,dt = (C-A)\,dt\,(P \operatorname{Cos}\varphi - P' \operatorname{Sin}\varphi) \\ A\,dr + (A-C)\,q\,D\,dt = (A-C)\,dt\,(P' \operatorname{Cos}\varphi + P \operatorname{Sin}\varphi) \end{array}\right\} (2)$$

wo der Kürze wegen $P' = \frac{3M}{\varrho^5}(\xi v \operatorname{Sin}\vartheta + \xi\zeta \operatorname{Cos}\vartheta)$

$$\text{und } P = \frac{3M}{\varrho^5}\left[(v^2 - \zeta^2) \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\vartheta + v\zeta(\operatorname{Cos}^2\vartheta - \operatorname{Sin}^2\vartheta)\right]$$

gesetzt worden ist.

Diese Gleichungen (2) drücken die Störungen der Rotation in Beziehung auf die feste Ekliptik aus, und aus ihnen werden sich die Werthe $\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d\psi}{dt}$ durch die vorhergehenden Gleichungen des §. 1

$$\frac{d\vartheta}{dt} = r \operatorname{Sin}\varphi - q \operatorname{Cos}\varphi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{r \operatorname{Cos}\varphi + q \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}\vartheta}$$

bestimmen lassen, wenn man zuerst aus den Gleichungen (2) die Werthe von q und r gefunden hat. Diese Ausdrücke von q und r wollen wir daher jetzt suchen.

§. 5.

Die Gröfsen P und P′ des §. 4 hängen allein von den Gröfsen $\xi\ v\ \zeta$ und ϱ ab, diese letzteren aber hängen von der mittleren Länge und von der mittleren Anomalie, und diese endlich wieder unmittelbar von der Zeit ab, so dafs also die Gröfse P und P′ selbst Functionen der Zeit, und zwar periodische Functionen derselben sind, weil sich die Werthe von $\xi\ v\ \zeta$ und ϱ nicht ohne Ende anhäufen, sondern in bestimmten Gränzen wachsen und abnehmen. Es werden sich also diese Gröfsen P und P′ in Reihen entwickeln lassen, deren Glieder, da die Reihen periodisch sind, trigonometrische Functionen der Zeit seyn werden. Zwar ist die Form dieser Glieder unbekannt, aber eine der Natur der Sache nicht gemäfse Annahme derselben wird im Ver-

folg die Rechnung auf unmögliche oder widersprechende Resultate führen, und sonach von selbst auf die Annahme der gehörigen Form leiten.

Ich setze also voraus, daſs P in eine Reihe entwickelt werden könne, deren jedes Glied die Gestalt $\varkappa$ Cos $(Ft+e)$ hat, und daſs P′ eine ähnliche Reihe gebe, deren Glieder insgesammt die Form $\varkappa'$ Sin $(Ft+e)$ haben. Nimmt man der Kürze wegen bloſs auf ein einzelnes dieser Glieder Rücksicht, so ist aus (2)

$$A\,dq+(C-A)\,r\,D\,dt$$
$$=\tfrac{1}{2}(C-A)dt[(\varkappa+\varkappa')\,Cos(\varphi+Ft+e)+(\varkappa-\varkappa')Cos(\varphi-Ft-e)]$$
$$A\,dr+(A-C)\,q\,D\,dt$$
$$=\tfrac{1}{2}(A-C)dt[(\varkappa+\varkappa')Sin(\varphi+Ft+e)+(\varkappa-\varkappa')Sin(\varphi-Ft-e)]$$

Um daraus q und r zu finden, wollen wir diesen Gröſsen die Form geben

$$\left.\begin{aligned} q &= P''\,Sin(\varphi+Ft+e)+Q''Sin(\varphi-Ft-e)\\ r &= P''Cos(\varphi+Ft+e)+Q''Cos(\varphi-Ft-e)\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

und daraus die Werthe von P″, Q″ suchen.

Aus dieser Annahme folgt sofort

$$dq=P''(D+F)\,dt\,Cos(\varphi+Ft+e)+Q''(D-F)\,dt\,Cos(\varphi-Ft-e)$$

also auch

$$Adq+(C-A)r\,D\,dt=P''[A(D+F)+(C-A)D]dtCos(\varphi+Ft+e)$$
$$+Q''[A(D-F)+(C-A)D]dtCos(\varphi-Ft-e)$$

und wenn man dieses mit dem zuvor gegebenen Werthe von $A\,dq+(C-A)\,r\,D\,dt$ vergleicht, so erhält man

$$P''=\frac{\tfrac{1}{2}(C-A)(\varkappa+\varkappa')}{CD+AF}\ \text{und}\ Q''=\frac{\tfrac{1}{2}(C-A)(\varkappa-\varkappa')}{CD-AF}$$

und dieselben Ausdrücke für P″ und Q″ findet man auch, wenn man dr sucht, und damit auf dieselbe Art verfährt.

Da aber die Gröſsen P und P′ nur die Entfernungen ξ υ ζ und ϱ enthalten, die sich nur sehr langsam ändern, so ist die Gröſse F, welche in den Ausdrücken $P=\varkappa\,Cos(Ft+e)$ und $P'=\varkappa'\,Sin(Ft+e)$ diese der Zeit proportionalen Aenderungen von ξ υ ζ ϱ bezeichnet, eine sehr geringe Gröſse, oder es ist sehr nahe

$$P''=\frac{(C-A)(\varkappa+\varkappa')}{2CD}\ \text{und}\ Q''=\frac{(C-A)(\varkappa-\varkappa')}{2CD}.$$

Substituirt man diese Werthe von P″ und Q″ in den Gleichungen (3), so sind die Werthe von q und r bestimmt.

§. 6.

Substituirt man dann die in §. 5 gefundenen Werthe von q und r in den zwey letzten Gleichungen des §. 4, so ist

$$\frac{d\vartheta}{dt} = (Q''-P'') \operatorname{Sin}(Ft+e)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{(Q''+P'')}{\operatorname{Sin}\vartheta} \operatorname{Cos}(Ft+e)$$

Es ist aber $Q''+P'' = \frac{2\varkappa P''}{\varkappa+\varkappa'} = -\frac{\varkappa(C-A)}{CD}$

$$Q''-P'' = -\frac{\varkappa'(A-C)}{CD}, \text{ also ist auch}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{A-C}{CD}.\Sigma.\varkappa' \operatorname{Sin}(Ft+e) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{C-A}{CD\operatorname{Sin}\vartheta}.\Sigma.\varkappa \operatorname{Cos}(Ft+e) \end{aligned}\right\}$$

wenn man nämlich durch Σ die Summe aller Glieder bezeichnet, in welche P und P′ entwickelt werden können, von welchen wir, da sie alle von derselben Form sind, der Kürze wegen vorhin nur ein einziges betrachtet haben.

Stellen wir jetzt die frühere Form dieser Gröſsen wieder her, da die damit vorgenommenen Veränderungen, nämlich die Auflösung in Reihen, deren Glieder der Zeit proportional sind, nun zur Auffindung der Werthe von q und r gedient haben, so hat man, da $P' = \Sigma\varkappa' \operatorname{Sin}(Ft+e)$ und $P = \Sigma\varkappa \operatorname{Cos}(Ft+e)$ ist, statt den zwey vorhergehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} d\vartheta &= \frac{A-C}{CD}.P'\,dt \\ d\psi &= \frac{C-A}{CD\operatorname{Sin}\vartheta}.P\,dt \end{aligned}\right\} (4).$$

§. 7.

Die Gleichungen (4) sind die gesuchten. Die erste gibt die Veränderung der Schiefe der Ekliptik, und die zweyte die Veränderung der Lage des Aequinoctialpunktes an, vorausgesetzt, daſs beyde Veränderungen bloſs durch die Störungen bewirkt werden, welche von den äuſseren Kräften in der Rotation der Erde erzeugt werden.

Für die Kugel ist $A = C$, also $d\vartheta = d\psi = 0$, oder diese

beyden Aenderungen verschwinden für die Kugel, und können daher, wenn sie existiren, nur eine Folge der Abplattung der Erde seyn.

Jene äufseren Kräfte aber, welche diese Störungen bey der abgeplatteten Erde hervorbringen, können allein von der Sonne und von dem Monde kommen, da alle andern Gestirne zu schwach oder zu weit entfernt sind, um in der Rotation der Erde eine merkliche Veränderung hervorzubringen. Betrachten wir zuerst die Wirkung der Sonne und sey ν die Länge der Sonne von dem beweglichen Frühlingspunkt; γ die Neigung der gegenwärtigen Ekliptik gegen die für eine bestimmte Epoche als fest angenommene Erdbahn, und L die Länge des aufsteigenden Knotens des Aequators auf der festen Ebene der Ekliptik.

Drückt man also die Lage der Sonne gegen den Mittelpunkt der Erde in Beziehung auf die bewegliche Ekliptik durch die rechtwinklichten Coordinaten $\xi' \; v' \; \zeta'$ aus, wo ξ in der Linie der veränderlichen Nachtgleichenlinie und $\xi' \; v'$ in der beweglichen Ekliptik liegt, so ist $\xi' = \varrho \operatorname{Cos} \nu$, $v' = r \operatorname{Sin} \nu$ und $\zeta' = o$. Sind dann $\xi \; v \; \zeta$ die Coordinaten der Sonne gegen den Mittelpunkt der Erde in Beziehung auf die feste Ekliptik, so hat man, wenn man in den Gleichungen des (Kap. IV. §. 2) $\vartheta = \gamma$ und $\varphi = \psi = -L$ setzt,

$$\xi = \xi'(\operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Sin}^2 L + \operatorname{Cos}^2 L) + v'(\operatorname{Sin} L \operatorname{Cos} L - \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Sin} L \operatorname{Cos} L)$$
$$v = \xi'(-\operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos} L \operatorname{Sin} L - \operatorname{Sin} L \operatorname{Cos} L) + v'(\operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}^2 L + \operatorname{Sin}^2 L)$$
$$\zeta = \xi' \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin} L - v' \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Cos} L.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man

$$\xi = \frac{\varrho}{2} \operatorname{Cos} \nu \left[2 \operatorname{Cos}^2 \frac{\gamma}{2} + \operatorname{Cos} 2L - \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos} 2L) \right]$$
$$+ \tfrac{1}{2} \varrho \operatorname{Sin} \nu \operatorname{Sin} 2L - \tfrac{1}{2} \varrho \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Sin}\nu \operatorname{Sin} 2L$$
$$\text{oder } \xi = \varrho \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Cos} \nu + \varrho \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Cos}(\nu - 2L)$$

und eben so findet man

$$v = \varrho \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Sin} \nu - \varrho \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Sin}(\nu - 2L) \text{ und}$$
$$\zeta = \varrho \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}(\nu - L).$$

Vernachlässiget man die höheren Potenzen von γ, so ist

$$\xi v = \tfrac{1}{2} \varrho^2 \operatorname{Sin} 2\nu$$
$$\xi \zeta = \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Sin}(2\nu - L) - \tfrac{1}{2} \varrho^2 \gamma \operatorname{Sin} L$$
$$v \zeta = \tfrac{1}{2} \varrho^2 \gamma \operatorname{Cos} L - \tfrac{1}{2} \varrho^2 \gamma \operatorname{Cos}(2\nu - L)$$
$$v^2 - \xi^2 = \tfrac{1}{2} \varrho^2 (1 - \operatorname{Cos} 2\nu).$$

Nimmt man die Sonnenbahn kreisförmig an, so ist $\varrho = a$ und $\nu = mt$, wo a die halbe grofse Achse der Sonnenbahn und mt die mittlere Länge, also m die mittlere tägliche Bewegung der Sonne ist.

Es ist aber (Kap. VII §. 4) $\sqrt{M} = \frac{2\pi}{\tau} \cdot a^{\frac{3}{2}}$, wo τ das Sternjahr der Erde bezeichnet, und $\frac{2\pi}{\tau} = m$, also $M = a^3 m^2$. Setzt man also

$$\varrho = a, \; d\,t = \frac{d\nu}{m} \text{ und } m^2 = \frac{M}{a^3},$$

so ist, wenn man die letzten Werthe von $\xi\,\nu$, $\xi\,\zeta \ldots$ in den zu Ende des §. 4 gegebenen Werthen von P und P′ substituirt,

$$P'\,d\,t = \frac{3\,m^2}{2}\left(\frac{d\,\nu}{m}\,\text{Sin}\,2\,\nu\,\text{Sin}\,\vartheta - \right.$$

$$\left. \gamma\,d\,t\,\text{Sin}\,L\,\text{Cos}\,\vartheta + \gamma \cdot \frac{d\,\nu}{m} \cdot \text{Sin}\,(2\,\nu - L)\,\text{Cos}\,\vartheta\right)$$

Vernachlässiget man das letzte dieser Glieder, da es gegen die beyden andern sehr klein ist, so hat man

$$\int P'\,d\,t = -\frac{3\,m}{4}\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,2\,\nu - \tfrac{3}{2}\,m^2\,\text{Cos}\,\vartheta \cdot \int \gamma\,d\,t\,\text{Sin}\,L$$

und selbst in diesem Ausdrucke ist das letzte Glied, da es in die sehr kleine Gröſse γ multiplicirt ist, gegen das erste beynahe als verschwindend zu betrachten.

§. 8.

Bezeichnet man die Gröſse ν γ L M und a für den Mond mit einem Striche, so ist, wenn $\frac{M'}{a'^3} = B\,m^2$ gesetzt wird, analog mit dem Vorhergehenden

$$\int P'\,d\,t = -\frac{3\,B\,m^2}{4\,m'} \cdot \text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,2\,\nu' - \tfrac{3}{2}\,m^2\,B\,\text{Cos}\,\vartheta \cdot \int \gamma'\,d\,t\,\text{Sin}\,L'$$

wo γ' die Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik und L′ die Länge des aufsteigenden Knotens dieser Bahn in der Ekliptik ist. Ist c′ die Tangente dieser Neigung, so ist, da γ' nur klein ist, $c' = \gamma'$, wo aber γ' mit $\text{Sin}\,1'' = \frac{\pi}{180.60^2}$ multiplicirt werden muſs. Es ist aber bekannt, daſs diese Neigung γ' eine beständige Gröſse ist, so wie man auch die Gröſse ϑ als constant annehmen kann.

Ist ferner f′ die tägliche Bewegung des Mondsknotens, und F′ die Länge des Mondsknotens für irgend eine Epoche, so wird für jede andere Zeit die Länge des Mondsknotens oder L′ durch (F′ + f′ t) ausgedrückt werden können, oder da die Bewegung

der Knoten rückläufig ist, so ist $L' = -(F' + f't)$, und daher $\gamma' \sin L' dt = -c' dt \sin(F' + f't)$ und dessen Integral

$$\int \gamma' dt . \sin L' = + \frac{c'}{f'} \cos(f't + F')$$

also auch der vorhergehende Ausdruck

$$\int P' dt = -\frac{3 B m^2}{4 m'} \sin \vartheta \cos 2 \nu' - \tfrac{3}{2} B m^2 . \frac{c'}{f'} \cos \vartheta \cos(F' + f' t).$$

§. 9.

Substituirt man jetzt beyde Werthe von $\int P' dt$ des §. 7 und 8 in der ersten der Gleichungen (4) so ist

$$\vartheta = h + \frac{3 m (C - A)}{2 CD} \left\{ \tfrac{1}{2} \sin \vartheta \left(\cos 2 \nu + \frac{B m}{m'} \cos 2 \nu' \right) + \frac{B m c'}{f'} \cos \vartheta \cos (F' + f' t) \right\}$$

wo h eine beständige Gröſse ist.

Ist h der Werth, welchen ϑ ohne den in dieser Gleichung angegebenen Störungen haben würde, und ist

$$l = \frac{3 m^2}{2DC} (C - A)(1 + B) \cos h$$

so ist auch annähernd

$$\vartheta = h + \frac{l B c'}{f'(1 + B)} \cos (F' + f' t) + \frac{l . \mathrm{tg}\, h}{2 m (1 + B)} \left(\cos 2 \nu + \frac{B m}{m'} \cos 2 \nu' \right) \ldots (5)$$

§. 10.

Substituirt man eben so die Werthe von $\xi \nu$, $\xi \zeta \ldots$ aus §. 7 in dem Werthe von P des §. 4, so ist

$$P dt = \frac{3 m^2}{2} \left(dt \sin \vartheta \cos \vartheta - \frac{1}{2 m} (\sin \vartheta \cos \vartheta d . \sin 2 \nu + \gamma\, dt \cos L\, (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \right)$$

für die Sonne ist $\gamma = 0$, also

$$P dt = \frac{3 m^2}{2} \left(dt \sin \vartheta \cos \vartheta - \frac{1}{2 m} . \sin \vartheta \cos \vartheta . d . \sin 2 \nu \right)$$

und für den Mond

$$P\,dt = \frac{3 B m^2}{2}\Big(dt \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\vartheta - \frac{1}{2m'}(\operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\vartheta . d.\operatorname{Sin} 2\nu')$$

$$+ (\operatorname{Cos}^2\vartheta - \operatorname{Sin}^2\vartheta).\gamma' dt \operatorname{Cos} L'\Big)$$

Ist wieder $\gamma' = c'$ und $L' = -(F' + f't)$, so ist

$$\gamma' dt \operatorname{Cos} L' = c' \operatorname{Cos}(F' + f' t)\, dt$$

und beyde Werthe von $P\,dt$ in der zweyten der Gleichungen (4) substituirt, geben

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3m(C-A)}{2CD}\Big[(1+B)\, m \operatorname{Cos}\vartheta - \frac{\operatorname{Cos}\vartheta}{2dt}\Big(d.\operatorname{Sin} 2\nu +$$

$$\frac{Bm}{m'}\, d.\operatorname{Sin} 2\nu'\Big) + \frac{m}{\operatorname{Sin}\vartheta}(\operatorname{Cos}^2\vartheta - \operatorname{Sin}^2\vartheta)\, B c' \operatorname{Cos}(F' + f' t)\Big]$$

Ist aber wieder $l = \frac{3m^2}{2CD}(C-A)(1+B)\operatorname{Cos} h$, so ist das erste Glied von $\frac{d\psi}{dt}$ gleich l, also $\psi = l t$. Setzt man dann in den andern Gliedern abkürzend $\vartheta = h$, so erhält man durch ihre Integration für den vollständigen Werth von ψ den Ausdruck

$$\psi = l t + \frac{2 l B c'}{f'(1+B)} \operatorname{Cotg} 2h \operatorname{Sin}(F' + f' t)$$

$$- \frac{1}{2m(1+B)}.\Big(\operatorname{Sin} 2\nu + \frac{Bm}{m'}\operatorname{Sin} 2\nu'\Big) \ldots (6)$$

§. 11.

Die Gleichungen (5) und (6) geben die Werthe von ϑ und ψ in Beziehung auf eine feste Ekliptik; wir bedürfen sie aber zu dem astronomischen Gebrauche in Beziehung auf die gegenwärtige, oder auf die bewegliche Ekliptik. Seyen $\vartheta' \psi'$ diese Werthe von $\vartheta\psi$ für die bewegliche Ekliptik. — Denkt man sich ein sphärisches Dreyeck A B C, in welchem A C die feste, A B die bewegliche Ekliptik und B C den Aequator bezeichnet, so ist die Seite $AB = \psi'$, $AC = \psi = L$ und der Winkel $BAC = \gamma$, $ABC = \vartheta'$ und $ACB = 180 - \vartheta$, also hat man nach den bekannten Ausdrücken der Trigonometrie

$$\operatorname{Sin}\frac{\psi' - \psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta' - (180 - \vartheta)}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Sin}\frac{\psi' + \psi}{2}$$

$$\text{und } \operatorname{tg} \frac{\vartheta + 180 - \vartheta'}{2} = \frac{\operatorname{Cos} \frac{\psi' - \psi}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{\psi' + \psi}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma}$$

oder abkürzend

$$\psi' = \psi - \gamma \operatorname{Sin} L \operatorname{Cotg} \vartheta, \text{ und}$$
$$\vartheta' = \vartheta + \gamma \operatorname{Cos} L.$$

Setzt man wieder $\gamma = c$, $L = F + ft$, so ist

$\vartheta' = \vartheta + c \operatorname{Cos}(F + ft) = \vartheta + c \operatorname{Cos} F - c f t \operatorname{Sin} F = \vartheta - c f t \operatorname{Sin} F$ und eben so $\psi' = \psi - c \operatorname{Cotg} \vartheta . \operatorname{Sin}(F + ft) = \psi - cft \operatorname{Cotg} \vartheta \operatorname{Cos} F$, also ist

$$\vartheta' = \vartheta - c f t \operatorname{Sin} F + \frac{l B c'}{f'(1+B)} \operatorname{Cos}(F' + f't)$$
$$+ \frac{l \operatorname{tg} h}{2 m (1+B)} \left(\operatorname{Cos} 2 \nu + \frac{Bm}{m'} \operatorname{Cos} 2 \nu' \right) \ldots (7)$$

$$\psi' = l t - c f t \operatorname{Cotg} h \operatorname{Cos} F - \frac{l}{2 m (1+B)} \left(\operatorname{Sin} 2\nu + \frac{Bm}{m'} \operatorname{Sin} 2 \nu' \right)$$
$$+ \frac{2 l B c'}{f'(1+B)} \operatorname{Cotg} 2 h \operatorname{Sin}(F' + f't) \ldots (8)$$

und diese Gleichungen (7) und (8) geben die Störungen der Schiefe der Ekliptik und des Aequinoctialpunktes in Beziehung auf die veränderliche Ekliptik.

§. 12.

Um die vorhergehenden Gleichungen numerisch zu entwickeln, so ist die siderische Revolution der Erde $365^T . 256384$ und des Mondes $27^T . 32166$, also $m = \frac{360}{365.256384} = 0^\circ.98561$, und $m' = \frac{360}{27.32166} = 13^\circ.17636$, wo m und m′ die mittlere Bewegung der Erde und des Mondes in einem Sterntag bezeichnen, und $\frac{m}{m'} = 0.07480$ ist.

Ferner ist die Schiefe der Ekliptik für die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts $h = 23^\circ\ 28'\ 17''.9$, und die Neigung der Mondsbahn $5^\circ\ 8'\ 50''$, also $c' = \operatorname{tg} 5^\circ\ 8'\ 50''$.

Bezeichnet T ein julianisches Jahr, oder ist $T = 365^T . 25$, so ist das siderische Zurückweichen der Mondsknoten in der Zeit

T gleich $f'T = 69680''$, als $f' = 190.773$. Weiter war $m^2 = \frac{M}{a^3}$,
$Bm^2 = \frac{M'}{a'^3}$, also ist $B = \frac{M'a^3}{Ma'^3}$. Aber $M = 351886$, $M' = 0.0151$,
und die Horizontalparallaxe der Sonne $8''2$ und des Mondes $56'\,58''$, also ist

$$B = \frac{(0.0151)\,\mathrm{Sin}^3 56'58''}{(351886)\,\mathrm{Sin}^3 8''2}, \text{ oder nahe } B = 3.$$

In der Gleichung (7) ist $c\,f\,\mathrm{Sin}\,F$ die jährliche Abnahme der Schiefe der Ekliptik, und diese kann wegen den sehr geringen Aenderungen der Gröfsen c, f und F durch mehrere Jahrhunderte als gleichförmig angesehen werden. Nach den Beobachtungen beträgt sie jetzt $0''.484$. — In der Gleichung (8) ist eben so $(l - c\,f\,\mathrm{Cos}\,\vartheta\,\mathrm{Cos}\,F)$ das jährliche Vorrücken der Nachtgleichen, welches jetzt, den Beobachtungen zu Folge, $50''.176$ beträgt. Da das Glied $c\,f\,\mathrm{Cos}\,\vartheta\,\mathrm{Cos}\,F$ sehr klein ist, so kann man annähernd annehmen $lT = 50''.176$, oder $l = \frac{50.176}{365.25} = 0.1374$.

Nach dieser Bestimmung der Gröfsen m m' c' f' B und l hat man

$$\frac{l\,\mathrm{tg}\,h}{2m(1+B)} = 0''42, \text{ wo man } m = (0\;98561)\;3600 \text{ setzen mufs.}$$

$$\text{Ferner } \frac{Bm}{m'} = 0.224, \quad \frac{l}{2\,m\,(1+B)} = 0.97,$$

$$\frac{l\,B\,c'}{f'(1+B)\,\mathrm{Sin}\,1''} = 10.108, \quad \frac{2\,\mathrm{Cotg}\,2\,h\,.\,B\,l\,c'}{f'\,(1+B)} = 18.889,$$

also sind die Gleichungen (7) und (8)

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta' = h - 0''484t + 10''.11\,\mathrm{Cos}\,L' + 0''.42\,\mathrm{Cos}\,2\nu + 0''.09\,\mathrm{Cos}\,2\nu' \\ \psi' = 50''.176\,t - 18''.89\,\mathrm{Sin}\,L' - 0''.97\,\mathrm{Sin}\,2\,\nu - 0''.22\,\mathrm{Sin}\,2\nu' \end{array}\right\}\text{(II).}$$

Das Glied $0''.484$ ist die jährliche Abnahme der Schiefe der Ekliptik, das Glied $50''.176$ die jährliche Präcession der Nachtgleichen, und die übrigen Glieder der beyden letzten Gleichungen enthalten die Nutation der Schiefe der Ekliptik und der Länge. (Th. I. Kap. II.)

§. 13.

Wir haben oben in der letzten Gleichung des §. 7 das Glied $\gamma \cdot \frac{d\nu}{m}\,\mathrm{Sin}\,(2\,\nu - L)\,\mathrm{Cos}\,\vartheta$ vernachlässiget. Für die Sonne wird dieses Glied in der That gleich Null, da $\gamma = 0$ ist. Für den Mond

aber scheinet dieses Glied in dem Integrale dieselbe Ordnung mit dem unmittelbar vorhergehenden zu haben, und also nicht weggelassen werden zu dürfen. Nimmt man es mit in die Rechnung auf, so ist der Ausdruck für $\int P d\nu$ gleich

$$\int P' dt = -\frac{3Bm^2}{4m'} \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} 2\nu' - \tfrac{3}{2} B m^2 \operatorname{Cos} \vartheta \int \gamma' dt \operatorname{Sin} L$$

$$+ \frac{3Bm^2\gamma'}{4m'} \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} (2\nu' - L)$$

Nimmt man also blofs auf dieses Glied Rücksicht, so wird man in der letzten Gleichung des §. 8 dem dort gegebenen Werthe von $\int P' dt$ noch die Gröfse

$$\frac{3Bm^2\gamma'}{4m'} \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} (2\nu' - L')$$

hinzufügen, und in der ersten Gleichung des §. 9 zu dem Werthe von ϑ noch das Glied

$$\frac{3m(C-A)}{2CD} \cdot \tfrac{1}{2}\gamma' \cdot \frac{Bm}{m'} \operatorname{Cos} h . \operatorname{Cos} (2\nu' - L')$$

$$= \frac{\gamma' B l}{2(1+B)m'} \operatorname{Cos} (2\nu' - L')$$

addiren. Da aber $\gamma' = 0.0901$, $B = 3$, $\frac{m}{m'} = 0.0748$, und $\frac{l}{2m(1+B)} = 0.97$ ist, so ist das letzte Glied $= 0''.02 \operatorname{Cos} (2\nu' - L')$, also unmerklich.

§. 14.

Aber in der letzten Gleichung des §. 7 wurde noch das Glied $-\tfrac{3}{2} m^2 \operatorname{Cos} \vartheta \int \gamma dt \operatorname{Sin} L$ weggelassen, und dieses Glied verdient eine nähere Betrachtung.

So wie wir in §. 8 für den Mond angenommen haben

$$\int \gamma' dt \operatorname{Sin} L' = \frac{c'}{f'} \operatorname{Cos} (F' + f' t),$$

eben so können wir auch für die Sonne setzen

$$\int \gamma dt \operatorname{Sin} L = \frac{c}{f} \operatorname{Cos} (F + f t),$$

und dann ist jenes Glied gleich

$$-\tfrac{3}{2} m^2 \operatorname{Cos} h . \frac{c}{f} \operatorname{Cos} (F + f t).$$

Nimmt man dann für den Mond statt dem eben erwähnten Ausdrucke den etwas genauern

$$\int \gamma' \, dt \, \mathrm{Sin}\, L' = \frac{c'}{f'} \mathrm{Cos}\,(F' + f't) - \frac{c}{f} \mathrm{Cos}\,(F + ft),$$

so erhält man, wenn man bloſs auf die von $(F + ft)$ abhängigen Glieder sieht, in §. 7 für die Sonne

$$\int P' \, dt = \frac{3m^2}{2} \mathrm{Cos}\, \vartheta \,.\, \frac{c}{f} \mathrm{Cos}\,(F + ft),$$

und eben so in §. 8 für den Mond

$$\int P' dt = -\frac{3m^2}{2} B \,\mathrm{Cos}\vartheta \left(\frac{c'}{f'} \mathrm{Cos}(F' + f\,t) - \frac{c}{f} \mathrm{Cos}\,(F + ft)\right)$$

oder vielmehr, da das in Cos $(F' + f't)$ multiplicirte Glied schon oben mitgenommen wurde, für den Mond

$$\int P' dt = \frac{3m^2}{2} B \frac{c}{f} \mathrm{Cos}\, \vartheta \,\mathrm{Cos}\,(F + ft).$$

Daher wird der von $(F + ft)$ abhängige Theil des Werthes von ϑ in der ersten Gleichung des §. 9

$$\vartheta = -\frac{3m^2}{2} \cdot \frac{C - A}{CD} (1 + B) \mathrm{Cos}\vartheta \,.\, \frac{c}{f} \mathrm{Cos}(F + ft) = -\frac{lc}{f} \mathrm{Cos}(F + ft) \ldots (9)$$

I. Um eben so die von $(F + ft)$ abhängigen Glieder der Gröſse $P\,dt$ zu erhalten, so ist in §. 10 für die Sonne

$$P\,dt = \frac{3m^2}{2} \gamma \, dt \, \mathrm{Cos}\, L \,(\mathrm{Cos}^2 \vartheta - \mathrm{Sin}^2 \vartheta)$$

$$= \frac{3m^2}{2} dt \,.\, c \,\mathrm{Cos}\,(F + ft) \,.\, (\mathrm{Cos}^2 \vartheta - \mathrm{Sin}^2 \vartheta),$$

und für den Mond

$$P\,dt = \frac{3Bm^2}{2} \,.\, c \,\mathrm{Cos}\,(F + ft) \,.\, (\mathrm{Cos}^2 \vartheta - \mathrm{Sin}^2 \vartheta)$$

Man hat daher auch

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3m^2}{2} \cdot \frac{C - A}{CD\,\mathrm{Sin}\vartheta} (1 + B) (\mathrm{Cos}^2 \vartheta - \mathrm{Sin}^2 \vartheta) \,.\, c \,\mathrm{Cos}\,(F + ft).$$

Addirt man dieses Glied zu dem in §. 10 gegebenen Werthe von $\frac{d\psi}{dt}$, so erhält man, wenn man die bereits betrachteten Glieder, welche von Cos $(F' + f't)$ und von Sin $2\,\nu$ und Sin $2\,\nu'$ abhängen, wegläſst

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{l \operatorname{Cos} \vartheta}{\operatorname{Cos} h} + \frac{l(\operatorname{Cos}^2 \vartheta - \operatorname{Sin}^2 \vartheta)}{\operatorname{Sin} h \operatorname{Cos} h} . c \operatorname{Cos}(F + ft) \ldots (10).$$

In dem letzten Gliede dieses Ausdrucks wird man ohne merklichen Fehler $\vartheta = h$ setzen können. In dem ersten aber wird man, nach der letzten Gleichung (9)

$$\vartheta = h - \frac{lc}{f} \operatorname{Cos}(F + ft)$$

setzen, weil dieses Glied $\frac{lc}{f} \operatorname{Cos}(F+ft)$ das einzige in dem Werthe von ϑ ist, welches in der Folge der Jahrhunderte noch einen beträchtlichen Werth erhalten kann. Dieses Glied $\frac{l \operatorname{Cos} \vartheta}{\operatorname{Cos} h}$ wird daher in das Folgende übergehen

$$\frac{l \operatorname{Cos}\left[h - \frac{lc}{f} \operatorname{Cos}(F+ft)\right]}{\operatorname{Cos} h} = l + \frac{l^2 c}{f} \operatorname{tg} h \operatorname{Cos}(F+ft),$$

und daher ist das Integral der Gleichung (10)

$$\psi = lt + \frac{l^2 c}{f^2} \operatorname{tg} h \operatorname{Sin}(F+ft) + \frac{lc}{f \operatorname{Sin} h \operatorname{Cos} h} . (\operatorname{Cos}^2 h - \operatorname{Sin}^2 h) \operatorname{Sin}(F+ft)$$

oder

$$\psi = lt + \left[\left(\frac{l}{f} - 1\right) \operatorname{tg} h + \operatorname{Cotg} h\right] . \frac{lc}{f} \operatorname{Sin}(F + ft) \ldots (11)$$

II. Behandelt man die Gleichungen (9) und (11) wie die Werthe von ϑ und ψ in §. 11, um die Werthe von ϑ' und ψ' zu erhalten, so findet man

$$\vartheta' = h + \frac{(f-l)}{f} c \operatorname{Cos}(F + ft) \ldots (9')$$

$$\psi' = lt + \left[1 + \frac{l}{f} \operatorname{tg}^2 h\right] \left(\frac{l-f}{f}\right) \operatorname{Cotg} h . c \operatorname{Sin}(F + ft) \ldots (11')$$

§. 15.

Um die letzten vier Gleichungen numerisch zu entwickeln, bemerken wir, daſs wir in Kap. XI. §. 4 für die säkulären Störungen der Lage der Erdbahn erhalten haben

$$p'' = \quad 0''.\ 0767\ t + 0''.\ 0000215\ t^2$$
$$q'' = -0''.\ 5009\ t + 0\ .\ 0000067\ t^2.$$

Nehmen wir an, daſs diese Werthe von p'' und q'' die Form haben

$$\left.\begin{array}{l} p'' = c \operatorname{Sin} F - c \operatorname{Cos} F \operatorname{Sin} gt - c \operatorname{Sin} F \operatorname{Cos} g' t \\ q'' = c \operatorname{Cos} F - c \operatorname{Cos} F \operatorname{Cos} gt + c \operatorname{Sin} F \operatorname{Sin} g' t \end{array}\right\} (11)$$

oder wenn man nur die zweyten Potenzen von t berücksichtiget

$$p'' = -\, c\, g\, t \operatorname{Cos} F + \tfrac{1}{2} c\, g'^2 t^2 \operatorname{Sin} F$$
$$q'' = +\, c\, g' t \operatorname{Sin} F + \tfrac{1}{2} c\, g^2 t^2 \operatorname{Cos} F$$

Vergleicht man diese beyden Ausdrücke von p'' und q'', so erhält man

$$c\, g \operatorname{Cos} F = -0''.0767 \qquad c\, g'^2 \operatorname{Sin} F = 0.0000430$$
$$c\, g' \operatorname{Sin} F = -0.5009 \qquad c\, g^2 \operatorname{Cos} F = 0.0000134$$

und aus diesen vier Gleichungen folgt

$$g = -36''.27 \qquad g' = -17''.76$$
$$c \operatorname{Sin} F = 5821''.3 \qquad c \operatorname{Cos} F = 436.2$$

also auch $F = 85^\circ.715$, $c = 5837''$ und $c \operatorname{Cotg} h = 13646''$.

Man erhält aber die Werthe von $c \,.\, \operatorname{Sin}(F + f\, t)$ und von $c \,.\, \operatorname{Cos}(F + f\, t)$, wenn man in den durch die Gleichungen (11) gegebenen Werthen von p'' und von q'' die Gröſse F sowohl als die Gröſse $g\, t$ um $l\, t$ vergröſsert, so daſs man hat $f = g + l$ und

$$c.\operatorname{Sin}(F+ft) = c \operatorname{Sin}(F+lt) - c \operatorname{Cos} F \operatorname{Sin}(g+l)t - c \operatorname{Sin} F \operatorname{Cos}(g'+l)t$$

und

$$c.\operatorname{Cos}(F+ft) = c \operatorname{Cos}(F+lt) - c \operatorname{Cos} F \operatorname{Cos}(g+l)t + c \operatorname{Sin} F \operatorname{Sin}(g'+l)t.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den Gleichungen 9, 11 und 9′ 11′ des §. 14, so erhält man

$$\psi = lt + c \operatorname{Cotg} h \operatorname{Sin}(F+lt) - \frac{1}{1+g} . c \operatorname{Cos} F \left(\operatorname{Cotg} h - \frac{g}{1+g} \operatorname{tg} h \right) \operatorname{Sin}(g+l)t$$
$$- \frac{1}{1+g} . c \operatorname{Sin} F \left(\operatorname{Cotg} h - \frac{g'}{1+g'} \operatorname{tg} h \right) \operatorname{Cos}(g'+l)t$$

$$\vartheta = h - c \operatorname{Cos}(F+lt) + \frac{1}{g+l} . c \operatorname{Cos} F \operatorname{Cos}(g'+l)t$$
$$- \frac{1}{g'+l} . c \operatorname{Sin} F \operatorname{Sin}(g'+l)t$$

$$\psi' = lt + \frac{g}{1+g} c \operatorname{Cos} F . \left(\operatorname{Cotg} h + \frac{1}{1+g} \operatorname{tg} h \right) \operatorname{Sin}(g+l)t$$
$$+ \frac{g'}{1+g'} . c \operatorname{Sin} F \left(\operatorname{Cotg} h + \frac{1}{1+g'} \operatorname{tg} h \right) \operatorname{Cos}(g'+l)t$$

$$\vartheta' = h - \frac{g}{1+g} . c \operatorname{Cos} F \operatorname{Cos}(g+l)t + \frac{g'}{1+g'} . c \operatorname{Sin} F \operatorname{Sin}(g'+l)t$$

und überdiefs, wenn man die vorletzte dieser Gleichungen differentiirt

$$\frac{d\psi'}{dt} = l + c\,g\,\mathrm{Cos}\,F\left(\mathrm{Cotg}\,h + \frac{1}{1+g}\,\mathrm{tg}\,h\right)\mathrm{Cos}\,(g+l)\,t$$

$$- c\,g'\,\mathrm{Sin}\,F\left(\mathrm{Cotg}\,h + \frac{1}{1+g'}\,\mathrm{tg}\,h\right)\mathrm{Sin}\,(g'+l)\,t.$$

Nach den Beobachtungen hat man für die Epoche 1750 die jährliche Präcession $\frac{d\psi'}{dt} = 50''.10$, also ist die letzte Gleichung, da für diese Epoche $t = 0$ ist

$$l + c\,g\,\mathrm{Cos}\,F\left(\mathrm{Cotg}\,h + \frac{1}{1+g}\,\mathrm{tg}\,h\right) = 50''.10.$$

Nimmt man in dieser Gleichung die Schiefe der Ekliptik für 1750 gleich $h = 23°\ 28'\ 20''$ und für $c\ g\ \mathrm{Cos}\ F$, so wie für g die oben gefundenen Werthe, so erhält man $l = 50''.39$.

Eben so gibt der vorhergehende Ausdruck von ϑ' für 1750

$$\vartheta' = h - \frac{g}{1+g}\,c\,\mathrm{Cos}\,F,\ \text{oder}$$

$$h = 23°\ 28'\ 20'' - 1121''.1 = 23°.4716 - 0°.3114.$$

Substituirt man nun alle diese erhaltenen Werthe von $l, h, g, g', c, F \ldots$ in den vier vorhergehenden Gleichungen, so erhält man, wenn man alle Zahlen in Graden und deren Theilen ausdrückt,

$$\left.\begin{array}{l} \psi = 0°.014 + 3°.791\,\mathrm{Sin}(85°.715 + 0°.014t) \\ \qquad\qquad - 1.487\,\mathrm{Sin}\,0.004t - 6.416\,\mathrm{Cos}\,0.009t \\ \vartheta = 23°.4716 - 0.3114 - 1.621\,\mathrm{Cos}(85°715 + 0\ 014t) \\ \qquad\qquad + 0.432\,\mathrm{Cos}\,0.004t - 2496\,\mathrm{Sin}\,0.009t \\ \psi' = 0°.014 - 1.204\,\mathrm{Sin}\,0.004t - 2.636\,\mathrm{Cos}\,0.009t \\ \vartheta' = 23°.4716 - 0.3114 + 0.311\,\mathrm{Cos}\,0.004t - 0\ 879\,\mathrm{Sin}\,0.009t \end{array}\right\}\ \text{(III)}$$

und diese Gleichungen enthalten die säkulären Aenderungen der Länge des Aequinoctialpunkts und die Schiefe der Ekliptik, die von der Wirkung der Sonne und des Mondes auf die abgeplattete Erde entstehen. Die periodischen, von L, ν und ν' abhängenden Störungen, oder die Nutationen der Länge und die Schiefe der Ekliptik sind schon oben durch die Gleichungen II. §. 12 gegeben worden.

Mit Hülfe dieser Ausdrücke (III), die Laplace Mec. cel. Vol. III. p. 112 gegeben hat, wird man die Präcession und die Schiefe der Ekliptik zehn bis zwölf Jahrhunderte vor und nach der Epoche 1750 bestimmen, und sie selbst bis zu der ohnehin

noch sehr unvollkommenen Beobachtungen **Hipparchs** ausdehnen können. Sollen sich aber diese Ausdrücke nur auf Zeiträume von zwey oder drey Jahrhunderten erstrecken, so kann man ihnen durch Auflösung der trigonometrischen Funktionen in Reihen, die nach den Potenzen der Zeit fortgehen, eine zur Rechnung bequemere Gestalt geben. Man findet so, mit etwas veränderten Massen der Venus und des Mars (Mec. cel. Vol. III. p. 158) nahe die Th. I. p. 39 gegebenen Ausdrücke, nämlich

$$\psi = 50'' 34\, t - 0''.000122\, t^2$$

$$\vartheta = 23^\circ\ 28'\ 18'' + 0.0000098\, t^2$$

$$\psi' = 50''.176\, t + 0.0001221\, t^2$$

$$\vartheta' = 23^\circ\ 28'\ 18''.0 - 0.484\, t - 0.0000027\, t^2.$$

I. Wenn man den vorhergehenden Ausdruck von $\frac{d\psi'}{dt}$ von dem Werthe dieser Gröfse für $t = 0$, das heifst von

$$1 + c\, g \operatorname{Cos} F \left(\operatorname{Cotg} h + \frac{1}{1+g} \operatorname{tg} h\right)$$

subtrahirt, so erhält man die Vergröfserung x des **tropischen** Jahres, die seit der Epoche von 1750 Statt hat. Diese Vergröfserung ist also

$$x = c\, g \operatorname{Cos} F \left(\operatorname{Cotg} h + \frac{1}{1+g} \operatorname{tg} h\right) [1 - \operatorname{Cos}(g+l)\, t]$$

$$+ c\, g' \operatorname{Sin} F \left(\operatorname{Cotg} h + \frac{1}{1+g'} \operatorname{tg} h\right) \operatorname{Sin}(g'+lt)$$

Substituirt man in dieser Gleichung die vorhin gefundenen Werthe von $l\ g\ g'\ F \ldots$ so ist

$$x = -0''.2955\, (1 - \operatorname{Cos} 14''\, 12\, t) - 1''.495 \operatorname{Sin} 32''63\, t,$$

und um diese Raumsekunden in Theilen des Tages auszudrücken, wird man sie durch $\frac{365.25}{360.60.60} = 0.000282$ multipliciren, wodurch man für die gesuchte Zunahme des Jahres erhält

$$x = -0^{\text{Tage}}.0000833\, (1 - \operatorname{Cos} 14.12\, t) - 0^{\text{Tage}}.000422 \operatorname{Sin} 32''63\, t.$$

Für die Zeit **Hipparchs**, oder 100 Jahre vor Chr. G. ist $t = -1850$, und damit zeigt die letzte Gleichung, dafs das tropische Jahr zur Zeit **Hipparchs** nahe 10''.6 gröfser war, als das gegenwärtige. Während nämlich das wahre Jahr der Erde oder die siderische Revolution derselben (nach Kap. VII. §. 4) völlig unveränderlich ist, wird das tropische Jahr um die Zeit, welche die Erde braucht, mit ihrer mittleren Bewegung den

Bogen ψ' der Präcession zurückzulegen, kürzer seyn, als das siderische Jahr. Da aber dieser Bogen, wegen der Wirkung der Planeten auf die Lage der Ekliptik veränderlich ist, so ist auch die Länge des tropischen Jahres veränderlich. Um die Länge des mittleren tropischen Jahres zu finden, mufs man von seiner wahren oder beobachteten Länge den Theil der Präcession subtrahiren, welcher blofs von der Wirkung der Planeten entspringt. Dieser Theil beträgt jetzt $\psi - \psi' = 0''.164$, und diese Gröfse mit der vorhergehenden Zahl 0.000282 multiplicirt, gibt 0.00004648 Tage oder nahe 4 Zeitsekunden, oder das gegenwärtige tropische Jahr ist 4 Sekunden gröfser, als das mittlere.

§. 16.

Wir haben in Kap. IV. §. 4 gesehen, dafs der Sinus des Winkels, welchen die augenblickliche Rotationsaxe der Erde mit der dritten freyen Axe macht, gleich ist

$$\sqrt{\frac{q^2+r^2}{p^2+q^2+r^2}}.$$

Man sieht aber aus den Gleichungen (3) des §. 5, dafs die Gröfsen q und r immer ungemein klein sind, woraus folgt, dafs jener Winkel immer sehr nahe gleich Null ist, d. h. dafs die eigentliche Rotationsaxe der Erde immer sehr nahe mit der dritten freyen Axe derselben zusammenfällt, und dafs daher die Pole der Erde immer sehr nahe durch dieselben Punkte der Oberfläche der Erde gehen, was auch vollkommen mit den Beobachtungen übereinstimmt, nach welchen die Polhöhe jedes Beobachtungsortes keinen merkbaren Aenderungen unterworfen ist.

Die Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre Rotationsaxe ist, nach Kap. IV. §. 4, gleich

$$d\vartheta = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

also, da nach dem Vorhergehenden q und r sehr nahe gleich Null sind, $d\vartheta = p$. Wenn aber die Erde ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenes Sphäroid ist, so hat man nach §. 3 $p = D$, wo D eine constante Gröfse bezeichnet, also ist auch $d\vartheta$ eine constante Gröfse, d. h. die Rotation der Erde um ihre Axe ist, gleichförmig, und der Sterntag der Erde ist immer von derselben Länge.

Dafs eben so die Dauer des mittleren Tages, wie derselbe Vol. I. S. 96 bestimmt worden ist, unveränderlich sey, zeigen die durch die neueren Beobachtungen bestimmten siderischen Umlaufszeiten der Planeten, die nach dem Vorhergehenden keinen Veränderungen unterworfen sind, und die, in mittleren Tagen ausgedrückt, genau mit den Bestimmungen der Alten übereinkommen. Einen noch auffallenderen Beweis für die Unveränderlichkeit des mittleren Tages gibt aber die Kap. XII. §. 12 er-

klärte Säculargleichung der mittleren Bewegung des Mondes, deren erstes Glied wir gleich $10''3 t^2$ gefunden haben. Es ist durchaus unwahrscheinlich, daſs dieser Coefficient von t^2 um seinen fünften Theil oder um zwey Sekunden fehlerhaft seyn könne. Nehmen wir aber an, daſs die Dauer des mittleren Tages jetzt um eine ganze Zeitsekunde gröſser sey, als zur Zeit Hipparchs, der nahe ein Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung lebte. Dieses vorausgesetzt, würden auch hundert julianische Jahre oder 36525 Tage um $36525'' = 10^h\ 8'\ 45''$ gröſser seyn, als zur Zeit Hipparchs; und da in $10^h\ 8'\ 45''$ der Mond in seiner mittleren Bewegung einen Bogen von $5°\ 34'\ 13'' = 20053''$ beschreibt, so würde bloſs durch jene geringe Aenderung des Tages die gegenwärtige Säkulargleichung des Mondes um $20053''$ gröſser erscheinen müssen, als zur Zeit Hipparchs. Allein nach der vorhergehenden Theorie oder nach der Gleichung $10''.3\ t^2$ ist diese Säkulargleichung gegenwärtig um $10''.3\ (19^2 - 18^2) = 10''.3 (37) = 381''$ gröſser als in jener Epoche. Sollte sie daher, der obigen Voraussetzung gemäſs, um $20053''$ gröſser seyn, so müſste der vorhergehende Ausdruck $10''.3\ (37)$ in $542''\ (37) = 20053$ übergehen, oder das erste und gröſste Glied der Säkulargleichung des Mondes müſste nicht $10.3\ t^2$, sondern über 52mal gröſser, oder gleich $542\ t^2$ seyn. Da aber nach dem Vorhergehenden die Gröſse $10''.3$ gewiſs nicht um zwey Sekunden fehlerhaft seyn kann, so ist auch die Gröſse 542 gänzlich unwahrscheinlich, und wenigstens 266mal gröſser, als sie seyn soll, also ist auch die Voraussetzung, daſs der mittlere Tag gegenwärtig um eine Sekunde gröſser seyn soll, als zur Zeit Hipparchs, um wenigstens 266mal zu groſs, oder man darf höchstens annehmen, daſs die Dauer des Tages seit Hipparch um $\frac{1}{266}$, also nur um vier Tausendtheile einer Sekunde sich geändert hat, d. h. mit andern Worten, daſs die Aenderung der Länge des mittlern Tages, wenn sie überhaupt Statt hat, für uns gänzlich unmerklich ist.

Theorie und Beobachtung vereinigen sich also, die Unveränderlichkeit der Lage der Erdaxe und die Gleichförmigkeit der Bewegung der Erde um diese Axe, diese Grundpfeiler der gesammten Sternkunde, und die Unveränderlichkeit der Länge des mittleren Tages, dieser Basis unserer Chronologie, zu befestigen und über allen Zweifel zu erheben.

FÜNFZEHNTES KAPITEL.

Anziehung eines Ellipsoids.

§. 1.

Wir haben bereits (Kap. VII. §. 11) die Anziehung einer Kugel und einer Kugelschale auf einen gegebenen Punkt gefunden. Suchen wir nun auch die Anziehung eines Körpers von gegebener Gestalt, und vorzüglich die eines Ellipsoids zu bestimmen, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer beyden Axen entstanden ist.

Sind x y z die drey rechtwinklichten Coordinaten eines Elementes dM des Ellipsoids, dessen Dichte hier durchaus gleichförmig angenommen werden soll; sind a b c die den vorigen parallelen Coordinaten, welche die Lage eines gegebenen, von dem Ellipsoide angezogenen Punktes, gegen den Ort von d M bestimmen; sind endlich X Y Z die Anziehungen des Ellipsoids auf diesen Punkt parallel mit den Axen der x y z zerlegt, so ist

$$X = \iiint \frac{(a-x)\,dM}{r^3}$$

wo $r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$, oder da $dM = dx\,dy\,dz$ ist,

$$X = \iiint \frac{(a-x)\,dx\,dy\,dz}{r^3}$$

und eben so

$$Y = \iiint \frac{(b-y)\,dx\,dy\,dz}{r^3}$$

$$Z = \iiint \frac{(c-z)\,dx\,dy\,dz}{r^3}$$

Um diese Ausdrücke auf Polarcoordinaten zu bringen, sey p der Winkel, welchen die Entfernung r mit einer der x parallelen durch den angezogenen Punkt gehenden Linie macht, und

q der Winkel, welchen die auf der Ebene der y z projicirte Entfernung r mit der Axe der y bildet, so ist

$$a - x = r \operatorname{Cos} p$$
$$b - y = r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} q$$
$$c - z = r \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} q$$

und da, (nach Kap. I. §. 16.) das Element des Körpers

$dM = r^2\, dr\, dp\, dq \operatorname{Sin} p$ ist, so hat man

$$X = \int\!\!\int\!\!\int dr\, dp\, dq \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p$$
$$Y = \int\!\!\int\!\!\int dr\, dp\, dq \operatorname{Sin}^2 p \operatorname{Cos} q$$
$$Z = \int\!\!\int\!\!\int dr\, dp\, dq \operatorname{Sin}^2 p \operatorname{Sin} q$$

wo die dreyfachen Integrale dieser Ausdrücke auf die ganze Masse des Ellipsoids sich erstrecken müssen.

Ist der angezogene Punkt innerhalb des Ellipsoids, und diesen Fall wollen wir hier ausschliefsend näher betrachten, so wird die gerade Linie r, welche durch diesen Punkt geht, auch durch das ganze Ellipsoid gehen, und von demselben in zwey Theile getheilt werden, die wir r und r′ nennen wollen, so dafs man, nach der Integration jener Ausdrücke in Beziehung auf r, für die Anziehungen des ganzen Ellipsoids auf einen innern Punkt desselben hat

$$X = \int\!\!\int (r + r')\, dp\, dq \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p$$
$$Y = \int\!\!\int (r + r')\, dp\, dq \operatorname{Sin}^2 p \operatorname{Cos} q$$
$$Z = \int\!\!\int (r + r')\, dp\, dq \operatorname{Sin}^2 p \operatorname{Sin} q$$

wo die Integralien in Beziehung auf p und q von $p = q = 0$ bis $p = q = 180°$ genommen werden müssen.

Viel verwickelter ist auf diesem Wege die Bestimmung der Attractionen des Sphäroids auf einem aufser ihm gelegenen Punkt, welche wir hier übergehen, da wir sie weiter unten auf einem andern Wege vornehmen werden.

§. 2.

Sind k und $\frac{k}{\sqrt{m}}$ die halben Axen einer Ellipse, so ist die Gleichung des Ellipsoids, welches durch die Umdrehung dieser Ellipse um seine der x parallele Axe 2k entsteht

$$k^2 = x^2 + m(y^2 + z^2)$$

wo m positiv und kleiner als die Einheit ist. Die Rotationsaxe k dieses Ellipsoids ist mit der Abscissenaxe a parallel, und die Excentricität der erzeugenden Ellipse ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{k^2}{m} - k^2} = k \sqrt{\frac{1 - m}{m}},$$

so wie die Masse des ganzen Ellipsoids (Kap. I. §. 16)

$$M = \frac{4 \pi k^3}{3 m} . \varrho$$

wenn $\pi = 3.14159\ldots$ und ϱ die Dichte des Körpers bezeichnet.

Substituirt man in der letzten Gleichung die vorhergehenden Werthe von x y z in p q r, und setzt man der Kürze wegen

$$J = a \operatorname{Cos} p + m \operatorname{Sin} p (b \operatorname{Cos} q + c \operatorname{Sin} q)$$
$$L = \operatorname{Cos}^2 p + m \operatorname{Sin}^2 p$$
$$R = J^2 + [k^2 - a^2 - m(b^2 + c^2)] . L,$$

so erhält man

$$r^2 L - 2r . J = \frac{R - J^2}{L}, \text{ also auch}$$

$$r = \frac{J \pm \sqrt{R}}{L}$$

und da man die oben erwähnten zwey Theile von r, nämlich r und r′ erhält, wenn man von der Wurzelgröfse $\pm \sqrt{R}$ den oberen oder den unteren Ausdruck nimmt, so ist

$$r + r' = \frac{2 J}{L} \text{ und } r' - r = \frac{2 \sqrt{R}}{L}.$$

Substituirt man diesen Werth von r+r′ in den drey letzten Gleichungen des §. 1, so erhält man

$$X = 2 \int\int \frac{J}{L} \, dp \, dq \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p$$

$$Y = 2 \int\int \frac{J}{L} \, dp \, dq \operatorname{Sin}^2 p \operatorname{Cos} q$$

$$Z = 2 \int\int \frac{J}{L} \, dp \, dq \operatorname{Sin}^2 p \operatorname{Sin} q.$$

Da also, wie man sieht, die halbe Axe k in den Werthen von J und L, und daher auch in den Werthen von X Y Z nicht enthalten ist, so kann man die Lagen des Ellipsoids, welche über oder unter dem angezogenen inneren Punkt sind, nach Willkühr vermehren oder vermindern, ohne dafs dadurch die Anziehung des Ellipsoids auf diesen Punkt geändert wird, wenn nur m immer denselben Werth behält. Daraus folgt also, dafs ein Punkt innerhalb einer elliptischen Schale, deren innere und äufsere Fläche ähnlich und ähnlich liegend ist, von dieser Schale nach allen Seiten gleich stark angezogen wird. (Vergl. Kap. VII. §. 10.)

§. 3.

Wenn wir den Werth von X wieder vornehmen, so ist

$$X = 2\iint\frac{dp\,dq\,\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Cos}\,p}{\mathrm{Cos}^2 p + m\,\mathrm{Sin}^2 p}\,.\,[a\,\mathrm{Cos}\,p + m\,\mathrm{Sin}\,p(b\,\mathrm{Cos}\,q + c\,\mathrm{Sin}\,q)]$$

Da diese Integralien von p, q gleich Null bis p, q gleich 180° genommen werden sollen, so verschwindet der zweyte Theil des Zählers, und es ist

$$X = 2a\iint\frac{dp\,dq\,\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Cos}^2 p}{\mathrm{Cos}^2 p + m\,\mathrm{Sin}^2 p}.$$

Also wenn man zuerst in Beziehung auf q integrirt

$$X = 2aq\int\frac{dp\,\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Cos}^2 p}{\mathrm{Cos}^2 p + m\,\mathrm{Sin}^2 p} = \frac{2a\pi}{m}\int\frac{dp\,\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Cos}^2 p}{1 + \frac{(1-m)}{m}\mathrm{Cos}^2 p}$$

Sey $\mathrm{Cos}\,p = x$ und $\lambda^2 = \frac{1-m}{m}$ oder $m = \frac{1}{1+\lambda^2}$ und $F = \int\frac{x^2 dx}{1+\lambda^2 x^2}$ und die Masse des ganzen Ellipsoids $M = \frac{4\pi k^3}{3m}$ für eine gleichförmige Dichte desselben, oder für $\varrho = 1$, so ist der vorhergehende Ausdruck

$$X = \frac{3aMF}{k^3},$$ und eben so findet man

$$Y = \frac{3bM}{k^3}\left(\frac{d.\lambda F}{d\lambda}\right) \text{ und } Z = \frac{3cM}{k^3}\left(\frac{d.\lambda F}{d\lambda}\right)$$

Um die Gröſse F zu entwickeln, ist

$$\frac{1}{1+\lambda^2 x^2} = 1 - (\lambda x)^2 + (\lambda x)^4 - \ldots \text{ also auch}$$

$$\int\frac{x^2 dx}{1+\lambda^2 x^2} = \frac{1}{\lambda^3}\left(\frac{(\lambda x)^3}{3} - \frac{(\lambda x)^5}{5} + \frac{(\lambda x)^7}{7} - \right) = \frac{1}{\lambda^3}.(\lambda x - \mathrm{Arc\,tg}\,\lambda x)$$

und dieses Integral von $x = 0$, bis $x = 1$ genommen, gibt

$$F = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda - \mathrm{Arc\,tg}\,\lambda).$$

Weiter ist $dF = \frac{2d\lambda}{\lambda}\left(\frac{d.\lambda F}{d\lambda}\right) - 2F\left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)$, oder

$$\left(\frac{d.\lambda F}{d\lambda}\right)d\lambda = \tfrac{1}{2}\lambda.dF + Fd\lambda = \frac{1}{2\lambda}d.\lambda^2 F = \frac{1}{2\lambda}d.\frac{1}{\lambda}(\lambda - \mathrm{Arc\,tg}\,\lambda)$$

$$= \frac{d\lambda}{2\lambda} \left\{ -\frac{(\lambda - \text{Arc tg}\,\lambda)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{d\lambda}{2\lambda^3}\left(\text{Arc tg}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)$$

also sind auch die vorhergehenden Werthe von X Y Z

$$X = \frac{3\,a\,M}{k^3\,\lambda^3}(\lambda - \text{Arc tg}\,\lambda)$$

$$Y = \frac{3\,b\,M}{2\,k^3\,\lambda^3}\left(\text{Arc tg}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)$$

$$Z = \frac{3\,c\,M}{2\,k^3\,\lambda^3}\left(\text{Arc tg}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)$$

und da diese Ausdrücke der Attractionen eines durch Rotation um die Axe der x entstandenen Ellipsoids auf einen inneren Punkt desselben streng richtig sind, so klein auch die Entfernung dieses Punktes von der Oberfläche des Ellipsoids seyn mag, so gelten sie offenbar auch für jeden Punkt, der in der Oberfläche dieses Ellipsoids selbst liegt.

§. 4.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun die Gestalt einer flüssigen Masse suchen, die bey ihrer Umdrehung um eine ihrer Axen und bey der Wirkung äufserer auf sie wirkender Kräfte im Gleichgewichte ist.

Sind a b c die rechtwinklichten Coordinaten eines Punktes der Oberfläche dieses Körpers, und P Q R die Kräfte, welche parallel mit diesen Coordinaten auf ein Element dieses Körpers wirken, so wird man (nach Kap. I. §. 5) für das Gleichgewicht haben

$$P\,da + Q\,db + R\,dc = 0 \ldots. (A).$$

Nehmen wir an, dafs die gesuchte Gestalt des flüssigen Körpers die eines durch Umdrehung entstandenen Ellipsoids sey. Wenn die Kräfte P Q R, welche aus dieser Annahme entspringen, in die Gleichung (A) gesetzt, die Differentialgleichung der Oberfläche des Ellipsoids geben, so ist die obige Voraussetzung richtig, und die elliptische Gestalt thut dem Gleichgewichte Genüge.

Ist a die Umdrehungsaxe, so ist die Gleichung des Ellipsoids

$$k^2 = a^2 + m(b^2 + c^2).$$

Setzt man wieder $\lambda^2 = \frac{1-m}{m}$, so ist das Differential der letzten Gleichung

$$o = a\,da + \frac{b\,db + c\,dc}{1 + \lambda^2} \;\ldots.\; (B)$$

und die Masse M des Körpers, wenn ϱ die Dichte derselben bezeichnet (nach §. 2)

$$M = \frac{4\pi k^3}{3m}\varrho = \frac{4\pi k^3 \varrho}{3}(1 + \lambda^2).$$

$$\text{Sey } X' = \frac{4\pi\varrho(1 + \lambda^2)}{\lambda^3}(\lambda - \text{Arc tg}\,\lambda)$$

$$\text{und } Y' = \frac{4\pi\varrho}{2\lambda^3}[(1 + \lambda^2)\,\text{Arc tg}\,\lambda - \lambda],$$

so ist $P = aX'$, $Q = bY'$ und $R = cY'$.

Nennt man aber f die Centrifugalkraft in der Entfernung 1 von der Rotationsaxe, so ist f $\sqrt{b^2 + c^2}$ diese Centrifugalkraft in der Entfernung $\sqrt{b^2 + c^2}$ von der Rotationsaxe, und zerlegt man diese in ihre beyden Seitenkräfte, so hat man für die Centrifugalkraft des Punktes, dessen Entfernung von der Rotationsaxe gleich $\sqrt{b^2 + c^2}$ ist

$-fb$ nach der Richtung der y, und

$-fc$ nach der Richtung der z,

so dafs alle Kräfte, welche auf das Element des Ellipsoids wirken, sind

$P = aX'$ nach der Richtung der x

$Q = b(Y' - f)$ - - - - y

$R = c(Y' - f)$ – – z

Substituirt man diese Werthe von PQR in der Gleichung (A) des Gleichgewichtes, so hat man

$$o = a\,da + \frac{(Y' - f)}{X'}(b\,db + c\,dc)$$

und dieser Ausdruck mit der Gleichung (B) des Ellipsoids verglichen, gibt

$$X' = (1 + \lambda^2)\,.\,(Y' - f).$$

Substituirt man hierin die vorhergehenden Werthe von X' und Y', und setzt man der Kürze wegen $q = \frac{3f}{4\pi\varrho}$, so erhält man

$$o = \text{Arc tg}\,\lambda - \frac{9\lambda + 2q\lambda^3}{9 + 3\lambda^2} \;.\;.\;.\; (C).$$

Durch diese von abc unabhängige Gleichung wird man also die Gröſse λ so zu bestimmen suchen, daſs die Gleichung des Gleichgewichtes mit der Gleichung des Ellipsoids zusammen fällt. Die elliptische Figur des Körpers wird also mit dem Gleichgewichte bestehen, wenn die Bewegung der Rotation so beschaffen ist, daſs λ nicht imaginär ist.

Von unserem Ellipsoid $x^2 + m(y^2 + z^2) = k^2$, welches durch die Rotation einer Ellipse um die Axe der x entstanden ist, ist die erzeugende Ellipse $x^2 + my^2 = k^2$, wo der Anfang der Abscissen von dem Mittelpunkte der Ellipse genommen wurde. Nimmt man den Anfang der Abscissen x' von einem der Scheitel der groſsen Axe, so ist $x' = k - x$, und die Gleichung der erzeugenden Ellipse

$$y^2 = \frac{2k}{m} x' - \frac{x'^2}{m}$$

wo die eine halbe Axe, die der Axe der x parallel und zugleich die Rotationsaxe ist, gleich k und die andere gleich $\frac{k}{\sqrt{m}}$ ist. Diese Ellipse geht in eine Parabel über, wenn m unendlich groſs, d. h. wenn $\lambda^2 = \frac{1-m}{m} = -1$ und in eine Hyperbel, wenn m und k^2 negativ, d. h. wenn $\lambda^2 > -1$ ist. Für ein Paraboloid und für ein Hyperboloid kann also kein Gleichgewicht bestehen, da für beyde λ imaginär, oder da für das erste $\lambda^2 = -1$ und für das zweyte $\lambda^2 > -1$ ist. Ist endlich λ^2 negativ und kleiner als 1, so gehört die Gleichung für ein an den Polen verlängertes Ellipsoid.

I. Löſst man Arc tg λ in die bekannte Reihe $\lambda - \frac{1}{3}\lambda^3 + \frac{1}{5}\lambda^5 -$ auf, so gibt die Gleichung (C), wenn man die höhern Potenzen von λ vernachlässigt,

$$q = \tfrac{2}{5}\lambda^2 - \frac{12}{35}\lambda^4 \text{ oder } \lambda^2 = \tfrac{5}{2}q + \frac{75}{14}q^2.$$

§. 5.

Nennt man p die Schwere an der Oberfläche des Ellipsoids, so ist $p = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$ oder $p = \sqrt{a^2 X'^2 + (b^2 + c^2)(Y' - f)^2}$ oder da $X' = (1 + \lambda^2)(Y' - f)$ war

$$p = X' \sqrt{a^2 + \frac{b^2 + c^2}{(1 + \lambda^2)^2}}$$

oder endlich, da die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{b^2 + c^2}{1 + \lambda^2} = k^2 - a^2 \text{ ist, } p = X' \sqrt{\frac{a^2 \lambda^2 + k^2}{1 + \lambda^2}}.$$

Für den Aequator ist $a = o$ also $p' = \frac{X'k}{\sqrt{1+\lambda^2}}$: für den Pol ist $a = k$ also $p'' = X'.k$ und daher $\frac{p''}{p'} = \sqrt{1+\lambda^2} = \frac{1}{\sqrt{m}}$, oder die Schwere am Pol verhält sich zur Schwere am Aequator wie 1 zu $\sqrt{m}$, das heiſst, wie der Durchmesser des Aequators zur Rotationsaxe.

I. Die Gleichung der erzeugenden Ellipse ist $k^2 - a^2 = mb^2$, also die Normale t derselben $t = \frac{b\sqrt{da^2 + db^2}}{da}$, oder da $a\,da = -mb\,db$ ist, $t = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{m^2}} = \sqrt{(1+\lambda^2)(a^2\lambda^2 + k^2)}$ oder endlich, da $\sqrt{a^2\lambda^2 + k^2} = \frac{p}{X'} \cdot \sqrt{1+\lambda^2}$ ist, $p = \frac{X'.t}{1+\lambda^2}$, welche Gleichung zeigt, daſs die Schwere p der Normale t proportional ist.

II. Ist $90 - \varphi$ der Winkel, den t mit der Rotationsaxe bildet, also φ die geographische Breite, so ist

$$a = \frac{k \operatorname{Sin} \varphi}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi}} \text{ und daher } t = \frac{(1+\lambda^2)k}{\sqrt{1+\lambda^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi}},$$

$$\text{woraus folgt } p = \frac{X'.k}{\sqrt{1+\lambda^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi}}$$

oder, wenn man für X' seinen Werth aus §. 4 substituirt,

$$p = \frac{4\pi\varrho k(1+\lambda^2)(\lambda - \operatorname{Arc} \operatorname{tg}\lambda)}{\lambda^3(1+\lambda^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \dots (D)$$

und diese Gleichung gibt das Verhältniſs zwischen der Schwere und der geographischen Breite.

III. An dem Aequator ist $\varphi = 0$, also

$$p' = \frac{4\pi\varrho k(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda^3} (\lambda - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \lambda)$$

und daher, wenn man die vierten und höhern Potenzen der sehr kleinen Gröſse λ vernachlässiget,

$$\frac{p - p'}{p'} = \tfrac{1}{2}\lambda^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

oder der Zuwachs der Schwere von dem Aequator gegen den Pol verhält sich in einem von der Kugel wenig verschiedenem Ellipsoide, wie das Quadrat des Sinus der Breite.

Ist ein Punkt im Innern des Ellipsoids mit einem andern Punkt in der Oberfläche desselben in demselben Halbmesser, so ist für beyde Punkte der Werth von φ derselbe, also folgt aus der Gleichung D des Kap. II, dafs sich die Schwere dieser beyden Punkte verhalte, wie ihre Entfernungen von dem Mittelpunkte des Ellipsoids.

IV. Die Centrifugalkraft ist (Kap. VI. §. 11) $f = \frac{4\pi^2}{T^2}$, wo T die Umdrehungszeit des Ellipsoids bezeichnet, also ist auch

$$q = \frac{3f}{4\pi\varrho} = \frac{3\pi}{T^2\varrho}.$$

Ferner ist der Krümmungshalbmesser des elliptischen Meridians (Vol. I. Pag. 276) $R = \frac{(1+\lambda^2)k}{(1+\lambda^2 \operatorname{Cos}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$. Bezeichnet daher γ die Gröfse eines Meridiangrades unter der Breite φ, so ist $\gamma = \frac{R\pi}{180}$, also auch

$$\frac{4\pi\varrho(1+\lambda^2)k}{\sqrt{1+\lambda^2 \operatorname{Cos}^2\varphi}} = \frac{2160\gamma\pi}{qT^2}(1+\lambda^2 \operatorname{Cos}^2\varphi) \ldots (E)$$

und daher die Gleichung (D)

$$p = \frac{2160\gamma\pi}{\lambda^3 T^2 q}(1+\lambda^2 \operatorname{Cos}^2\varphi)(\lambda - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \lambda).$$

Ist aber l die Länge des Secundenpendels, so ist (Kap. VI. §. 5) $p = \pi^2 l$, und diese beyden Ausdrücke von p einander gleich gesetzt, geben

$$q = \frac{2160\gamma}{\pi l T^2 \lambda^3}(1+\lambda^2 \operatorname{Cos}^2\varphi)(\lambda - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \lambda).$$

Für $\varphi = 45^\circ$ ist $\operatorname{Cos}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{und } \frac{1}{\lambda^3}(1+\lambda^2 \operatorname{Cos}^2\varphi)(\lambda - \operatorname{Arc} \operatorname{tg}\lambda) = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}\lambda^2 + \frac{3}{70}\lambda^4,$$

also die vorletzte Gleichung

$$q = \frac{2160\gamma}{\pi l T^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{30}\lambda^2\right) \text{ oder da nahe } \lambda^2 = \frac{5}{2} q \text{ ist,}$$

$$q = \frac{2160\gamma}{\pi l T^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} q\right) = \frac{720\gamma}{\pi l T^2}\left(1 - \frac{1}{4} q\right) \text{ oder annähernd}$$

$$q = \left(\frac{720\gamma}{\pi l T^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{720\gamma}{\pi l T^2}\right)^2 \ldots \text{(F)}.$$

Nach den Beobachtungen ist für die Erde $\gamma = 57008$ Toisen, $= 0.5097$ Toisen, (Vol. I. Pag. 331 und 339) und $T = 23^h\ 56'\ 4''.1$ $= 86164''.1$ mittlere Zeit, also gibt die Gleichung (F)

$q = 0.00345$, und daraus folgt (§. 4. I.)

$$\lambda^2 = \frac{5}{2} q + \frac{75}{14} q^2 = 0.00868.$$

Die Abplattung der Erde ist

$$\frac{\frac{k}{\sqrt{m}} - k}{\frac{k}{\sqrt{m}}} = 1 - \sqrt{m} = \frac{1}{2}\lambda^2 = 0.00434 = \frac{1}{230.4}.$$

Ist so γ und λ bekannt, so erhält man die halbe Axe k des Poles durch die Gleichung (E). Da nämlich $\operatorname{Cos}\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varrho q T^2 = 3\pi$ ist, so gibt diese Gleichung

$$k = \frac{180\gamma}{\pi(1+\lambda^2)}(1 + \tfrac{1}{2}\lambda^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{180\gamma}{\pi}(1 - \tfrac{1}{4}\lambda^2)$$

Substituirt man darin die vorhergehenden Werthe von γ und λ^2, so erhält man

$k = 3259229$ Toisen,

und diese Werthe von λ^2 und k stimmen nahe genug mit den Beobachtungen (Vol. I. Kap. X). So kann man also die Abplattung und die Gröſse der Erde finden, wenn die Gröſsen γ, l und T bekannt sind.

Um die Abhängigkeit dieser Gröſsen λ l γ T einfacher darzustellen, hatte man die Gleichung

$$q = \frac{2160\gamma}{\pi l T^2 \lambda^3}(1 + \lambda^2 \operatorname{Cos}^2\varphi)(\lambda - \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\lambda).$$ Setzt man in ihr

$$q = \frac{2}{5}\lambda^2 - \frac{12}{35}\lambda^4, \text{ und } \lambda - \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\lambda = \frac{1}{3}\lambda^3 - \frac{1}{5}\lambda^5,$$

und endlich der Kürze wegen $h = \frac{2160\gamma}{\pi l T^2}$,

so erhält man, wenn man die vierten und höhern Potenzen von λ wegläſst,

$$h\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\lambda^2 \operatorname{Cos}^2\varphi-\frac{1}{5}\lambda^2\right)=\frac{2}{5}\lambda^2,$$

woraus für die Abplattung $\frac{1}{2}\lambda^2$ folgt

$$\tfrac{1}{2}\lambda^2=\frac{5h}{12+6h-10h\operatorname{Cos}^2\varphi}.$$

Setzt man, wie zuvor, $\gamma=57008^T$, $l=0.5097^T$, $T=86164''$, und $\varphi=45$, so ist $h=0.010358$ und daher durch die letzte Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\lambda^2=\frac{1}{231}, \text{ wie zuvor.}$$

V. Die Abplattung des Sphäroids ist also $\frac{1}{2}\lambda^2=\frac{5}{4}q=\frac{15}{4}\cdot\frac{\pi}{T^2\varrho}$.

Ist daher α T ϱ die Abplattung, Umdrehungszeit und Dichte eines gleichförmig dichten Ellipsoids, und werden dieselben Grössen für ein anderes Ellipsoid durch α' T' ϱ' bezeichnet, so ist

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{T^2\varrho}{T'^2\varrho'}.$$

Für die Erde ist $T=86164''$, $\varrho=1$, und (nach IV) $\alpha=\frac{1}{230}$. Für Jupiter ist $T'=35760$ und $\varrho'=0.231$, also nach der letzten Gleichung die Abplattung Jupiters

$$\alpha'=\frac{1}{230}\left(\frac{86164}{35760}\right)^2\cdot\frac{1}{0.231}=\frac{1}{9.2}$$

übereinstimmend mit den Beobachtnngen.

Für die Sonne ist $T'=2196000''$, $\varrho'=0.25$, also die Abplattung der Sonne $\alpha'=\frac{1}{37300}$ oder unmerklich, was ebenfalls mit den Beobachtungen übereinstimmt.

VI. Nach den drey letzten Gleichungen des §. 3 hat man, da

$$M=\frac{4\pi k^3}{3}(1+\lambda^2) \text{ ist,}$$

wenn man b gleich der halben grofsen Axe oder $b=k\sqrt{1+\lambda^2}$ setzt, für die Anziehung Y des Ellipsoids auf einen Punkt in dem Aequator

$$Y=\frac{2\pi b^3}{\lambda^3 k^2}\left(\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Setzt man aber $a=k$, so erhält man eben so für die Anziehung X des Ellipsoids auf einen Punkt im Pol

$$X = \frac{4\pi k(1+\lambda^2)}{\lambda^3}(\lambda - \mathrm{Arc\,tg}\,\lambda) = \frac{4\pi b^2}{\lambda^2 k}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\lambda\right)$$

Es sey nun α die Abplattung, oder $\alpha = \frac{b-k}{k}$, oder wenn man $b = k\sqrt{1+\lambda^2}$ substituirt, $\alpha = \sqrt{1+\lambda^2} - 1$, woraus folgt $\lambda^2 = 2\alpha + \alpha^2$.

Substituirt man also in den vorhergehenden Ausdrücken von X und Y, für b und λ^2 die letzten Werthe $k\sqrt{1+\lambda^2}$ und $2\alpha+\alpha^2$, so erhält man

$$Y = \frac{2\pi k(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^3}\left(\lambda - \frac{1}{3}\lambda^3 + \frac{1}{5}\lambda^5 \ldots - (\lambda - \lambda^3 + \lambda^5 - \ldots)\right)$$

$$= 2\pi k\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\lambda^4 - \frac{13}{140}\lambda^4\right)$$

oder

$$Y = \frac{4\pi k}{3}\left(1 + \frac{3\alpha}{5} - \frac{9}{35}\alpha^2\right), \text{ und eben so}$$

$$X = \frac{4\pi k}{3}\left(1 + \frac{4\alpha}{5} + \frac{2}{7}\alpha^2\right)$$

und diese Ausdrücke von X und Y bestimmen die Attraction unter dem Pol und unter dem Aequator bey der ruhenden Erde. Wir wollen nun dieselben Attractionen bey der rotirenden Erde, oder nachdem jene durch die Centrifugalkraft vermindert wurden, durch X′ und Y′ bezeichnen, so hat man nach §. 5

$\frac{X'}{Y'} = \sqrt{1+\lambda^2} = \frac{b}{k}$, oder da die Centrifugalkraft im Pol verschwindet, also $X' = X$ ist, $\frac{b}{k} = \frac{X}{Y'}$. Ist aber f die Centrifugalkraft am Aequator, und g die Schwere, so ist

$$Y' = Y\left(1 - \frac{f}{g}\right), \text{ also auch } \frac{b}{k} = \frac{X}{Y}\cdot\left(1 + \frac{f}{g}\right).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\frac{b}{k} = \sqrt{1+\lambda^2} = 1 + \alpha$, und substituirt man die vorhergehenden Werthe von X und Y, so erhält man, wenn man die höheren Potenzen von α vernachlässiget,

$$1 + \alpha = \left(1 + \frac{f}{g}\right)\frac{1 + \frac{4}{5}\alpha}{1 + \frac{3}{5}\alpha} \text{ oder } \alpha = \frac{5}{4}\cdot\frac{f}{g}\left(1 + \frac{f}{g}\right)$$

oder endlich, da auch $\frac{f}{g}$ eine sehr kleine Gröfse ist $\alpha = \frac{5}{4} \cdot \frac{f}{g}$.

Nach Kap. VI. §. 11. II. ist für die Erde $\frac{f}{g} = \frac{1}{290}$, also nach der letzten Gleichung $\alpha = \frac{1}{232}$.

Für Jupiter ist die Rotationszeit $T = 9^h\, 56' = 35760''$, also der Bogen ω, welchen ein Punkt des Aequators in einer Sekunde zurücklegt $\omega = \frac{360.60^2}{T}$ Sin $1'' = 0.0001757$.

Ferner ist der Halbmesser Jupiters $r = 216000000$ Fufs, also die Centrifugalkraft $f = \frac{r\omega^2}{2} = 3.334$ Fufs. Nach Kap. VII. §. 9 ist aber die Schwere auf der Oberfläche Jupiters $g = 40.71$ Fufs, also ist seine Abplattung

$$\alpha = \frac{5}{4} \cdot \frac{f}{g} = \frac{1}{9.8}$$

sehr nahe mit den Beobachtungen übereinstimmend.

§. 6.

Wenn die Gleichung (C) des §. 4 mehrere mögliche Wurzeln hätte, so würden derselben Umdrehungszeit mehrere Ellipsoiden entsprechen können, bey welchen das Gleichgewicht möglich wäre.

Sey $y = \frac{9\lambda + 2q\lambda^3}{9 + 3\lambda^2} - \text{Arc tg}\,\lambda$, so mufs, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, $y = 0$ seyn. Man denke sich eine Curve, deren Abscisse λ und Ordinate y ist, so wird, da $y = 0$ für $\lambda = 0$ ist, die Curve die Abscissenaxe schneiden, wenn $\lambda = 0$ ist. Von diesem Anfangspunkte an werden die Ordinaten zuerst positiv seyn, und bis zu einer gewissen Gränze wachsen, hierauf abnehmen und negativ werden, so dafs die Abscissenaxe von der Curve noch einmahl in einem Punkte geschnitten wird, der also einen Werth von λ für das Gleichgewicht gibt. Da aber für $\lambda = \infty$ die Ordinate y wieder positiv wird, so mufs die Abscissenaxe von der Curve noch in einem dritten Punkte geschnitten werden, wodurch also ein zweyter Werth von λ für das Gleichgewicht bestimmt wird. Man sieht daraus, dafs für einen gegebenen Werth von q, das heifst für eine gegebene Umlaufszeit, wenigstens zwey Ellipsoiden möglich sind, bey welchen das Gleichgewicht bestehen kann.

Um die Anzahl dieser Ellipsoiden näher zu bestimmen, so hat man, wenn man die letzte Gleichung differentiirt

$$dy = \frac{6\lambda^2 d\lambda . [q\lambda^4 + (10q - 6) . \lambda^2 + 9q]}{(3\lambda^2 + 9)^2 . (1 + \lambda^2)}$$

Die Voraussetzung $dy = o$ gibt daher

$$o = q\lambda^4 + (10q - 6)\lambda^2 + 9q;$$

woraus folgt, wenn man nur auf die positiven Werthe von λ sieht

$$\lambda^2 = \frac{3}{q} - 5 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{q} - 5\right)^2 - 9}.$$

Diese Werthe von λ gehören also zu den gröſsten oder kleinsten Ordinaten y, und da es, nach der letzten Gleichung, auf der Seite der positiven Abscissen nur zwey solche Werthe gibt, so wird also auch die Abscissenaxe von der Curve auf der Seite der positiven Abscissen, auſser dem Punkte $\lambda = o$, nur noch in zwey andern Punkten geschnitten, d. h. es gibt nur zwey Ellipsoiden, für welche bey derselben Umlaufszeit das Gleichgewicht möglich ist.

Da diese Curve auf der Seite der negativen Abscissen einen ganz ähnlichen Ast hat, nur mit dem Unterschiede, daſs hier die Ordinaten das entgegengesetzte Zeichen haben, so schneidet sie auch die negative Abscissenaxe auſser dem Anfangspunkte $\lambda = o$ in noch zwey andern Punkten, für welche die beyden Werthe von λ, bis auf die Zeichen, dieselben wie vorher sind, so geben sie auch wieder dieselben zwey Ellipsoiden, so daſs es unnöthig ist, diesen zweyten Ast der Curve besonders zu betrachten.

I. Wenn man q sehr klein voraussetzt, wie dieses z. B. bey der Erde der Fall ist, so kann man der Gleichung (C) durch zwey Werthe von λ^2 genug thun, von welchen der eine sehr klein und der andere sehr groſs ist. Für den ersten hat man (nach §. 4. I.)

$$\lambda^2 = \frac{5}{2} q + \frac{75}{14} q^2.$$

Um den zweyten Werth von λ zu erhalten, sey $\lambda = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, also x sehr klein. Es ist aber $\lambda = \text{Cotg}\, x$

$$\text{und } x = \text{Arc tg} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{3\lambda^3} + \frac{1}{5\lambda^5} - \ldots .$$

$$\text{also auch Arc tg}\,\lambda = \tfrac{1}{2}\pi - x = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda^3} - \frac{1}{5\lambda^5} + \ldots$$

welche Reihe desto schneller convergirt, je gröſser λ ist. Sub-

stituirt man diesen Werth von Arc tg λ in der Gleichung (C), so erhält man durch Umkehrung der Reihe

$$\lambda = \frac{3\pi}{4q} - \frac{8}{\pi} + \frac{4q}{\pi}\left(1 - \frac{64}{3\pi^2}\right), \text{ oder}$$

$$\lambda = \frac{2.35619}{q} - 2.54648 - 1.47888q.$$

Für die Erde war $q = 0.00345$ (§. 5. IV.), also ist der kleinste Werth von λ gleich 0.09316 und der gröſste 680.5, also auch das Verhältniſs der Axe des Aequators zu dem des Poles, welches Verhältniſs überhaupt gleich $\frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{1+\lambda^2}$ ist, im ersten Fall gleich 1.00433, und im zweyten gleich 680.5, und daher die Abplattung $= \sqrt{1+\lambda^2} - 1$ im ersten Falle gleich $\frac{1}{231}$, und im zweyten gleich $\frac{1}{0.001472}$. Wenn daher die Erde flüssig und gleichförmig dicht wäre, so könnte bey der gegenwärtigen Geschwindigkeit ihrer Rotation das Gleichgewicht ihrer Theilchen in den zwey Fällen bestehen, wo der Durchmesser ihres Aequators sich zu ihrer Rotationsaxe verhält, entweder wie 1.00433 zu 1, oder auch wie 680.5 zu 1. Der erste Fall ist der der Natur, für welchen, wenn der Halbmesser des Aequators 860 geogr. Meilen hat, die halbe Rotationsaxe 856.3 Meilen, also die Abplattung nur 3.7 Meilen beträgt, während für den zweyten Fall die Erde ein sehr stark abgeplattetes Ellipsoid seyn würde, deren halbe Rotationsaxe nur $\frac{860}{680.5} = 1.264$ Meilen, also die Abplattung 678.736 Meilen betragen würde.

II. Der Werth von q hat eine Gränze, über welche hinaus das Gleichgewicht nicht mehr mit einer elliptischen Gestalt des Körpers bestehen kann. Wenn nämlich die oben betrachtete Curve die Abscissenaxe auſser dem Anfangspunkte, wo $\lambda = 0$ ist, sonst nirgends schneidet, sondern sie bloſs in irgend einem Punkte berührt, so hat man für diesen Berührungspunkt die Gleichungen $y = 0$ und $dy = 0$, weil hier die Tangente der Curve mit der Abscissenaxe zusammenfällt. Dieser Berührungspunkt, in welchen hier jene zwey Durchschnittspunkte gleichsam zusammenflieſsen, so daſs jetzt für positive Abscissen λ die Ordinaten y nie mehr negativ seyn können, wird daher den Werth von q geben, über welchen hinaus das Gleichgewicht bey der elliptischen Figur unmöglich ist. Die Gleichung $dy = 0$ gibt aber

$$q\lambda^4 + (10q - 6)\lambda^2 + 9q = 0, \text{ oder } q = \frac{6\lambda^2}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)},$$

und dieser Werth von q, in der Gleichung (C) substituirt, gibt

$$\text{Arc tg}\,\lambda = \frac{7\lambda^5 + 30\lambda^3 + 27\lambda}{(1+\lambda^2)(3+\lambda^2)(9+\lambda^2)},$$

und dieser letzten Gleichung thut der Werth $\lambda = 2.5292$ genug, woraus durch die vorletzte Gleichung $q = 0.33701$ gefunden wird, und daher das Verhältniſs der Axe des Aequators zu der des Poles $= \sqrt{1+\lambda^2} = 2.7197$.

III. Es war $q = \frac{3\pi}{T^2\varrho}$ (§. 5. IV.) und für ein anderes Ellipsoid $q' = \frac{3\pi}{T'^2\varrho'}$, also ist

$$\frac{q}{q'} = \frac{T'^2\varrho'}{T^2\varrho}.$$

Für die Erde war $q' = 0.00345$ und $T' = 0.99727$ Tage (§. 5 IV.) also ist für ein mit der Erde gleich dichtes Ellipsoid, wo $\varrho = \varrho'$ die Umdrehungszeit, welche dem Gränzwerthe von $q = 0.33701$ entspricht,

$$T = T' \sqrt{\frac{q'}{q}} = 0^T . 1009.$$

Sind aber bey zwey Ellipsoiden die Werthe von q gleich; so ist $\frac{T'}{T} \sqrt{\frac{\varrho}{\varrho'}}$, also auch die Umdrehungszeit T′ dieses Ellipsoids, bey welchem das Gleichgewicht aufhört, möglich zu seyn

$$T' = 0^T . 1009 \sqrt{\frac{\varrho}{\varrho'}}.$$

Für die Sonne z. B. ist $\varrho' = 0.25\varrho$, also $T' = 0^T . 2018$. Für Jupiter ist $\varrho' = 0.23\varrho$, also $T' = 0^T . 2104$, und da sich diese Körper viel langsamer um ihre Axen drehen, als die gefundenen Gränzwerthe von T′ anzeigen, so ist bey ihrer elliptischen Gestalt das Gleichgewicht noch möglich. Wäre die Dichte der Erde nur der 97.68ste Theil der gegenwärtigen Dichte derselben, so gäbe die letzte Gleichung für

$$\varrho' = \frac{\varrho}{97.68}\; T' = 0^T\, 1009 \sqrt{97.68}, \text{ oder } T' = 0^T .99727,$$

oder dann würde die Gestalt der Erde, die sie bey ihrer gegenwärtigen Umlaufszeit annehmen müſste, die Gränze aller elliptischen Gestalten seyn, für welche das Gleichgewicht noch bestehen kann.

IV. Uebrigens ist diese Gränze von q nicht diejenige, bey welcher der flüssige Körper wegen einer zu geschwinden Axendrehung anfangen würde, sich zu zerstreuen. Denn nach §. 5 ist

$$\frac{\text{Schwere am Pol}}{\text{Schwere am Aequator}} = \sqrt{1+\lambda^2} = \frac{\text{Axe des Aequators}}{\text{Axe des Pols}} \quad (§. 6. I),$$

und dieses Verhältniſs haben wir oben (§. 6. II) für die hier zu betrachtende Gränze gleich 2.7197 gefunden, so daſs also selbst an dieser Gränze die Schwere am Aequator noch immer gröſser ist, als die aus der Rotation entstehende Schwungkraft, und daſs daher bloſs wegen dieser Schwungkraft die unter dem Aequator liegenden Theilchen sich noch nicht zerstreuen können. Auch haben wir Kap. VI. §. 11. II gesehen, daſs die Körper am Aequator wegen der durch eine schnellere Rotation vergröſserten Schwungkraft erst dann anfangen würden, sich von der Erde zu entfernen, wenn die Umdrehungszeit der Erde gleich 5060 Secunden oder 0.0586 Tage wäre, während nach dem Vorhergehenden das Gleichgewicht schon bey einer Umdrehungszeit von 0.1009 Tagen anfängt unmöglich zu werden, weil bey einer schnelleren Rotation es unmöglich ist, der flüssigen Masse eine elliptische Gestalt zu geben, so daſs die aus der Attraction des Ellipsoids und aus der Schwungkraft zusammengesetzte Kraft noch senkrecht auf der Oberfläche des Ellipsoids werde.

V. In dem Vorhergehenden wurde die Gröſse λ^2 positiv angenommen, d. h. das Ellipsoid an den Polen abgeplattet vorausgesetzt. Für solche Ellipsoiden, die an den Polen verlängert sind, muſs λ^2 negativ und kleiner als 1 seyn (§. 4). Sey also $\lambda^2 = -\lambda'^2$, so muſs für die letzte Gattung von Ellipsoiden λ'^2 positiv und kleiner als 1 seyn.

Nach §. 6 ist aber

$$dy = \frac{6\lambda^2 d\lambda [q\lambda^4 + (10q-6)\lambda^2 + 9q]}{(3\lambda^2+9)^2 . (1+\lambda^2)}$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke statt λ die Gröſse $\lambda'\sqrt{-1}$, so erhält man

$$dy = \sqrt{-1} . \frac{6\lambda'^2 d\lambda' [q(1-\lambda'^2)(9-\lambda'^2) + 6\lambda'^2]}{(9-3\lambda'^2)^2 . (1-\lambda'^2)}$$

und man sieht, daſs der Werth dieser Gröſse $\frac{dy}{\sqrt{-1}}$ von $\lambda'^2 = 0$ bis $\lambda'^2 = 1$ immer positiv bleibt oder sein Zeichen nicht ändert, woraus folgt, daſs der Werth von y zwischen denselben Gröſsen nicht gleich Null werden kann, d. h. daſs bey einem an den Polen verlängerten Ellipsoid das Gleichgewicht unmöglich ist.

Wenn übrigens bey den an den Polen abgeplatteten Ellipsoiden die Rotation noch schneller ist, als diejenige, welche das Gleichgewicht noch möglich macht, so folgt daraus noch

nicht, daſs der rotirende Körper nie zum Gleichgewichte kommen kann. Denn durch diese schnellere Rotation wird sich die flüssige Masse unter den Polen noch mehr abplatten, und unter dem Aequator erhöhen, so daſs die unter dem Aequator liegenden Theilchen mit ihrer vorigen Geschwindigkeit jetzt gröſsere Kreise beschreiben, und die Umlaufszeiten dadurch allmählich wachsen werden, wodurch endlich nach vielen Oscillationen die flüssige Masse wegen ihrer Zähigkeit in das Gleichgewicht kommen, und diejenige Gestalt annehmen wird, bey welcher vermöge der gröſseren Umlaufszeit die Bedingung des Gleichgewichtes eines Ellipsoids erfüllt werden kann.

§. 7.

Noch ist die Bestimmung der Attraction des Ellipsoids auf einen äuſseren Punkt übrig, die, wie wir bereits zu Ende des §. 1 erwähnt haben, wenigstens auf dem dort betretenen Wege groſse Schwierigkeiten darbiethet. Von dieser Aufgabe, welche früher, unter mehreren sie erleuchternden Beschränkungen, von Newton, Mac-Laurin, Lagrange, Legendre u. a. aufgelöst wurde, gab zuerst Gauſs in den Comment. Gotting. folgende alle andern übertreffende und vollständige Auflösung.

Die Gleichung eines Ellipsoids; dessen den Coordinaten x, y, z parallelen Halbaxen A, B, C sind, ist bekanntlich

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1.$$

Behält man die Bezeichnungen des Kap. VII. §. 13 bey, so ist

$$P=\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{C^2 x}{A^2 z},\quad Q=\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{C^2 y}{B^2 z}$$

$$\text{und } R=\sqrt{1+P^2+Q^2}=\frac{C^2 . W}{z}$$

$$\text{wo der Kürze wegen } W=\sqrt{\frac{x^2}{A^4}+\frac{y^2}{B^4}+\frac{z^2}{C^4}} \text{ ist.}$$

Ferner hat man eben daselbst

$$\operatorname{Cos} QX=\frac{x}{A^2 W}\cdot\quad \operatorname{Cos} QY=\frac{y}{B^2 W}\quad \operatorname{Cos} QZ=\frac{z}{C^2 W} \text{ und}$$

$$\operatorname{Cos} QM=\frac{1}{rW}\cdot\left\{\frac{(a-x)x}{A^2}+\frac{(b-y)y}{B^2}+\frac{(c-z)z}{C^2}\right\}$$

Um nun zuerst die Oberfläche dieses Ellipsoids zu bestimmen, wollen wir nach Kap. I. §. 16. II die zwey willkührlichen Gröſsen p und q so annehmen, daſs man hat

$$x=A \operatorname{Cos} p \qquad y=B \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} q \qquad z=C \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} q.$$

Da durch diese Annahme der gegebenen Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

genug geschieht, so sind dadurch die drey Gröfsen x y z auf zwey p q zurückgebracht. Nimmt man nun, wie in dem angeführten Orte an,

$$dx = \alpha\, dp + \beta\, dq, \quad dy = \alpha'\, dp + \beta'\, dq, \quad dz = \alpha''\, dp + \beta''\, dq$$

so erhält man

$$\alpha = -A \operatorname{Sin} p \qquad \alpha' = B \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} q \qquad \alpha'' = C \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} q$$

$$\beta = 0 \qquad \beta' = -B \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} q \qquad \beta'' = C \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} q$$

also auch

$$\alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = \frac{BC}{A} x \operatorname{Sin} p,$$

$$\alpha''\beta - \alpha\beta'' = \frac{AC}{B} y \operatorname{Sin} p, \quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = \frac{AB}{C} z \operatorname{Sin} p$$

und daher das gesuchte Element der Oberfläche des Ellipsoids

$$ds = ABC . W . dp\, dq \operatorname{Sin} p,$$

welcher Ausdruck also zweymahl, zuerst nach p von $p = 0$ bis 180, und dann nach q von $q = 0$ bis 360° zu integriren ist. Vergl. Kap. VII. §. 11. Kennt man so ds, so ist das Volum des Ellipsoids (Kap. VII. §. 14. V. Nro. 2)

$$K = \iint x\, ds \operatorname{Cos} QX = \iint \frac{BC}{A} x^2 . dp\,dq \operatorname{Sin} p = \iint ABC . dp\,dq \operatorname{Cos}^2 p \operatorname{Sin} p$$

Integrirt man diesen Ausdruck zuerst nach q, so erhält man

$$K = 2\pi . ABC \int dp \operatorname{Cos}^2 p \operatorname{Sin} p = \frac{\pi}{2} . ABC \int dp (\operatorname{Sin} p + \operatorname{Sin}^3 p)$$

und dessen Integral in Beziehung auf p von $p = 0$ bis $p = 180$

$$K = \frac{4\pi}{3} . ABC$$

welches der bekannte Ausdruck des Volums des Ellipsoids ist.

I. Es sey nun X die Anziehung dieses Ellipsoids auf irgend einen Punkt M, dessen Coordinaten a b c sind, nach der Richtung der Coordinatenaxe x, und der Kürze wegen $\xi = \frac{X}{ABC}$, so hat man nach Nro. 3 des angeführten Ortes $X = -\int Fr . ds . \operatorname{Cos} QX$, also auch, wenn das Gesetz der Anziehung

$$f\,r = \frac{1}{r^2} \text{ und } F\,r = \int f\,r\,d\,r = -\frac{1}{r}$$

ist, und wenn man für d s und Cos Q X die vorhergehende Werthe substituirt

$$\xi = \frac{1}{A}\iint \frac{d\,p\,d\,q\,\mathrm{Cos}\,p\,\mathrm{Sin}\,p}{r} \;\ldots (1)$$

Nach derselben Nro. ist aber auch

$$X = -\int \frac{\varphi\,r\,.\,d\,s}{r^2}\,\mathrm{Cos}\,Q\,M\,\mathrm{Cos}\,M\,X$$

und da $\varphi\,r = \int r^2\,fr\,.\,dr = r$ und $\mathrm{Cos}\,M\,X = \frac{a-x}{r}$ ist, so hat man

$$\xi = -\iint \frac{dpdq\mathrm{Sin}p}{r^3}.(a-x)\left(\frac{(a-x)x}{A^2} + \frac{(b-y)y}{B^2} + \frac{(c-z)z}{C^2}\right) \ldots (2)$$

wobey man nach Nro. 3 des a. O. bemerken mufs, dafs die Gröfse $\int \frac{d\,s}{r^2}\,\mathrm{Cos}\,M\,Q$ das heifst, dafs die Gröfse

$$\iint \frac{d\,p\,d\,q\,\mathrm{Sin}\,p}{r^3}\left(\frac{(a-x)x}{A^2} + \frac{(b-y)y}{B^2} + \frac{(c-z)z}{C^2}\right) \ldots (3)$$

entweder gleich o oder gleich $-\frac{4\pi}{ABC}$ je nachdem der angezogene Punkt M entweder aufser- oder innerhalb des Körpers liegt.

II. Wir wollen nun die drey Gröfsen A, B, C als die besonderen Werthe der drey veränderlichen Gröfsen $\alpha\,\beta\,\gamma$ ansehen, deren Natur so beschaffen ist, dafs $\alpha^2 - \beta^2$ und $\alpha^2 - \gamma^2$ immer constante Gröfsen sind. Diese Gröfsen $\alpha\,\beta\,\gamma$ sind also die drey Halbaxen aller der Ellipsoiden, deren drey Hauptdurchschnitte mit den coordinirten Ebenen der xy, xz und yz immer aus denselben Brennpunkten beschriebene Ellipsen sind.

Wird nun die Gleichung (1) so dargestellt

$$\alpha\,\xi = \iint \frac{d\,p\,d\,q}{r}\,\mathrm{Cos}\,p\,\mathrm{Sin}\,p$$

und differentiirt man sie nach der Characteristik δ, so erhält man

$$\alpha\,\delta\xi + \xi\,\delta\alpha = -\iint \frac{d\,p\,d\,q\,\mathrm{Cos}\,p\,\mathrm{Sin}\,p\,.\,\delta\,r}{r^2}.$$

Es ist aber

$$-r\,\delta r = (a-x)\,\delta x + (b-y)\,\delta y + (c-z)\,\delta z$$
$$= (a-x)\mathrm{Cos}p\,\delta\alpha + (b-y)\mathrm{Sin}p\,\mathrm{Cos}\,q.\delta\beta + (c-z)\mathrm{Sin}p\mathrm{Sin}q.\delta\gamma$$

oder da $\alpha\delta\alpha - \beta\delta\beta = o$ und $\alpha\delta\alpha - \gamma\delta\gamma = o$ ist

$$-r\delta r = -\alpha\delta\alpha\left((a-x)\frac{x}{\alpha^2} + (b-y)\frac{y}{\beta^2} + (c-z)\frac{z}{\gamma^2}\right)$$

und daher die vorhergehende Gleichung

$$\alpha\delta\xi + \xi\delta\alpha$$

$$= \delta\alpha\iint\frac{dpdq\,.\,x\operatorname{Sin}p}{r^3}\left((a-x)\frac{x}{\alpha^2} + (b-y)\frac{y}{\beta^2} + (c-z)\frac{z}{\gamma^2}\right)$$

Wird davon, nach Verwandlung von A, B, C in α, β, γ die durch $\delta\alpha$ multiplicirte Gleichung (2) abgezogen, so erhält man

$$\alpha\delta\xi = \delta\alpha\iint\frac{dpdq\,.\,a\operatorname{Sin}p}{r^3}\left((a-x)\frac{x}{\alpha^2} + (b-y)\frac{y}{\beta^2} + (c-z)\frac{z}{\gamma^2}\right)$$

und dieser Ausdruck von $\alpha\delta\xi$ wird nach der Gleichung (3) entweder $= o$ oder $= -\frac{4\pi a\delta\alpha}{\alpha\beta\gamma}$, je nachdem der angezogene Punkt M außer- oder innerhalb des Körpers liegt. Man hat daher für einen äußeren Punkt $\delta\xi = o$... (4)

und für einen inneren $\delta\xi = -\frac{4\pi a\delta\alpha}{\alpha^2\beta\gamma}$... (5).

§. 8.

Wir wollen zuerst die Anziehung des Ellipsoids auf einen inneren Punkt suchen.

Es ist $\beta^2 = \alpha^2 + B^2 - A^2$, und $\gamma^2 = \alpha^2 + C^2 - A^2$. Nehmen wir an $\alpha t = A$, und substituiren diese Werthe von α, β, γ in der Gleichung (5), so ist

$$d\xi = \frac{4a\pi.t^2dt}{A^3.H}, \text{ wo } H = \sqrt{\left[1-\left(1-\frac{B^2}{A^2}\right)t^2\right].\left[1-\left(1-\frac{C^2}{A^2}\right)t^2\right]}$$

ist.

Stellt man also die Characteristik d wieder her und integrirt, so hat man $\xi = \frac{4a\pi}{A^3}\int\frac{t^2dt}{H}$, oder endlich da $\xi.ABC = X$ ist, so ist die gesuchte Anziehung des Ellipsoids auf irgend einen innern Punkt desselben, nach der Richtung der x,

$$X = \frac{4a\pi BC}{A^2}\int\frac{t^2\,dt}{H}$$

wo das Integral von t=o bis t=1 zu nehmen ist. Aendert man in diesem Ausdrucke von H und X die Größen X ABC a in YBACb,

oder in ZCBAc, so erhält man die Anziehung Y oder Z des Körpers nach der Richtung der y oder der z.

Diese Werthe von XYZ sind also die gesuchten Attractionen des Ellipsoids auf alle innerhalb desselben gelegenen Punkte, und da diese Ausdrücke für jeden der Oberfläche des Ellipsoids auch noch so nahen Punkt streng genau sind, so gelten sie auch zugleich für die in dieser Oberfläche selbst gelegenen Punkte.

I. Für ein dem Vorhergehenden ähnliches Ellipsoid sind die drey Halbaxen $A' = mA$, $B' = mB$, $C' = mC$, also ist die Attraction dieses neuen Ellipsoids auf einen innern Punkt dasselbe nach der Richtung der x

$$X' = \frac{4a\pi B'C'}{A'^2}\int\frac{t^2dt}{H'},$$

$$\text{wo } H' = \sqrt{\left[1-\left(1-\frac{B'^2}{A'^2}\right)t^2\right]\cdot\left[1-\left(1-\frac{C'^2}{A'^2}\right)t^2\right]}$$

oder, wenn man die vorhergehenden Werthe von $A'\,B'\,C'$ substituirt

$$H' = H \text{ und } X' = X, \text{ und eben so } Y' = Y \text{ und } Z' = Z,$$

woraus folgt, daſs für innere Punkte die Attraction aller ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden ganz dieselbe ist. Denkt man sich ein solches Ellipsoid in mehrere Schalen zerlegt, deren Oberfläche der äuſsern Oberfläche des Ellipsoids ähnlich und ähnlich liegend sind, so werden also alle, den angezogenen Punkt äuſserlich umgebenden Schalen keinen Einfluſs auf ihn haben, und es wird bloſs die Attraction des innern Kernes, in dessen Oberfläche der Punkt liegt, wirksam bleiben.

II. Die Integration der drey gegebenen Werthe von X Y und Z kann in ihrer ganzen Allgemeinheit nur durch Reihen erhalten werden, die desto schneller convergiren, je weniger das Ellipsoid von einer Kugel abweicht. Sind aber zwey der Gröſsen ABC einander gleich, etwa $C = B$, in welchem Falle der Körper durch die Rotation einer Ellipse, deren halbe Axen A und B sind, von der Axe der A entstanden ist, so hat man

$$X = \frac{4a\pi B^2}{A^2}\int\frac{t^2\,dt}{1-\left(1-\frac{B^2}{A^2}\right)t^2}$$

Ist $A < B$ und $\frac{A}{B} = \operatorname{Cos}\varphi$, so ist dieses Integral von $t = 0$ bis $t = 1$ genommen

$$X = \frac{4a\pi \operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi}(\operatorname{tg}\varphi - \varphi)$$

und für A > B hat man

$$X = \frac{4 a \pi A B^2}{(A^2 - B^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \log \frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{B} - \frac{4 a \pi B^2}{A^2 - B^2}$$

Eben so ist für A < B und $\frac{A}{B} = \text{Cos}\,\varphi$

$$Y = 4 b \pi \text{Cos}\varphi \left(- \frac{t\sqrt{1 - t^2 \text{Sin}^2\varphi}}{2\,\text{Sin}^2\varphi} + \frac{1}{2\,\text{Sin}^3\varphi} \cdot \text{Arc tg} \frac{t\,\text{Sin}\,\varphi}{\sqrt{1 - t^2\,\text{Sin}^2\varphi}} \right)$$

also von t = o bis t = 1 genommen

$$Y = \frac{2 b \pi \text{Cos}\,\varphi}{\text{Sin}^3\varphi} (\varphi - \tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\,2\varphi)$$

Ist aber A > B und $\frac{A^2 - B^2}{B^2} = D^2$, so ist das Integral

$$Y = \frac{4 b \pi A}{B} \left(\frac{t\sqrt{D^2 t^2 + 1}}{2 D^2} - \frac{1}{2 D^3} \log [Dt + \sqrt{D^2 t^2 + 1}] \right)$$

also von t = o bis t = 1 genommen

$$Y = \frac{2 b \pi A^2}{A^2 - B^2} - \frac{2 b \pi A B^2}{(A^2 - B^2)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{B}$$

Verwandelt man endlich in diesen Ausdrücken von Y die Gröſse b in c, so erhält man die Attraction Z nach der Richtung der z, also

$$Z = \frac{2 \pi c\,\text{Cos}\varphi}{\text{Sin}^3\varphi} (\varphi - \tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\,2\varphi) \text{ für } A < B \text{ und } \frac{A}{B} = \text{Cos}\,\varphi \text{ und}$$

$$Z = \frac{2 \pi c A^2}{A^2 - B^2} - \frac{2 b \pi A B^2}{(A^2 - B^2)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{B} \text{ für } A > B.$$

Für die Kugel endlich ist A = B = C, und daher

$$X = 4 a \pi \int t^2\,dt = \frac{4 a \pi t^3}{3},$$

also das Integral von t = o bis t = 1 genommen

$$X = \tfrac{4}{3} a \pi, \text{ und eben so } Y = \tfrac{4}{3} b \pi, \; Z = \tfrac{4}{3} c \pi,$$

das heiſst, die Attraction der Kugel auf einen innern Punkt derselben ist identisch mit jener, die Statt finden würde, wenn die Masse der ganzen Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre, woraus folgt, daſs auch alle äuſsern Punkte von einer Kugel eben so angezogen werden, als ob die Masse der ganzen Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. (Vergl. Kap. VII. §. 10.)

Die vorhergehenden Ausdrücke von XYZ für innere Punkte sind identisch mit jenen, welche wir oben (§. 6) gefunden haben. Denn ist $A = k$, $\frac{A}{B} = \sqrt{m}$, und $\lambda^2 = \frac{B^2 - A^2}{A^2} = \frac{1-m}{m}$, also auch $m = \frac{1}{1+\lambda^2}$, so ist das Volum des Ellipsoids

$$M = \frac{4\pi}{3} AB^2 = \frac{4\pi k^3}{3m}.$$

Ferner ist für $A < B$ auch $\cos\varphi = \sqrt{m}$, oder $\operatorname{tg}\varphi = \lambda$, also $\varphi = \operatorname{Arc\,tg}\lambda$, und $\frac{1}{2}\sin 2\varphi = 2\sqrt{m - m^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Substituirt man diese Werthe in den vorhergehenden Ausdrücken von XYZ, so erhält man

$$X = \frac{3aM}{k^3\lambda^3}(\lambda - \operatorname{Arc\,tg}\lambda)$$

$$Y = \frac{3bM}{2k^3\lambda^3}\left(\operatorname{Arc\,tg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)$$

$$Z = \frac{3cM}{2k^3\lambda^3}\left(\operatorname{Arc\,tg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)$$

wie an dem angezeigten Orte.

§. 9.

Für die Attraction des Ellipsoids auf einen aufser demselben gelegenen Punkt folgt aus der Gleichung (4) dafs die Attraction X in allen Ellipsoiden, in welchen $\alpha^2 - \beta^2$ und $\alpha^2 - \gamma^2$ constante Gröfsen sind, der Masse des Ellipsoids proportional ist, und da dieses Resultat auch für die kleinste Entfernung des angezogenen Punktes von der Oberfläche des Körpers gilt, so läfst er sich auch auf das Ellipsoid ausdehnen, in dessen Oberfläche der angezogene Punkt selbst liegt.

Wir wollen also zuerst ein dem gegebenen ähnliches und aus denselben Brennpunkten beschriebenes Ellipsoid suchen. Sind die noch unbekannten halben Axen desselben m A, m B und m C, so ist die Gleichung dieses neuen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = m^2.$$

Da dieses Ellipsoid durch den angezogenen Punkt M gehen soll, dessen Coordinaten a b c sind, so ist

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} + \frac{c^2}{C^2} = m^2$$

und da es mit dem gegebenen Ellipsoide dieselben Brennpunkte haben soll, so ist

$$A^2 - B^2 = D^2 \text{ und } A^2 - C^2 = E^2$$

wo m, D und E constante Gröſsen sind. Eliminirt man aus den drey letzten Gleichungen die Gröſsen B und C, so hat man

$$A^6 - A^4\left(D^2 + E^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{m^2}\right)$$

$$+ A^2\left(D^2E^2 + \frac{(a^2+c^2)D^2+(a^2+b^2)E^2}{m^2}\right) - \frac{a^2D^2E^2}{m^2} = 0$$

und da diese Gleichung in Beziehung auf A^2 des dritten Grades ist, so gibt sie immer einen möglichen Werth von A^2. Kennt man so A^2, so findet man B^2 und C^2 aus $B^2 = A^2 - D^2$ und $C^2 = A^2 - E^2$, und wenn man diese Werthe von A B C in der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = m^2$$

substituirt, so erhält man die Gleichung des gesuchten Ellipsoids, welches mit dem gegebenen dieselben Brennpunkte hat, und welches überdieſs durch den angezogenen Punkt M geht. Sucht man dann, nach §. 2, die Attractionen X Y Z dieses neuen Ellipsoids auf den in seiner Oberfläche gelegenen Punkt, so hat man dadurch auch die Attractionen des gegebenen Ellipsoids auf einen auſser ihm gelegenen Punkt M, und dadurch ist also die Aufgabe vollständig aufgelöſst.

SECHZEHNTES KAPITEL.

Refraction.

§. 1.

Wenn man die die Erde umgebende Atmosphäre als aus concentrischen Schichten bestehend annimmt, deren Dichte nach einem gewissen Gesetze veränderlich ist, so wird ein Lichtstrahl, wenn er einer dieser Schichten sehr nahe kömmt, von derselben in einer Richtung angezogen werden, welche auf der Oberfläche dieser Schichte in dem Punkte, in welchem das Licht der Schichte begegnet, senkrecht steht, weil die Wirkung der Körper auf das Licht nur in sehr kleinen Entfernungen merkbar angenommen wird. Sind daher x und y die senkrechten Coordinaten eines Lichtstrahls, wodurch die Entfernung desselben von einer der Schichten der Atmosphäre ausgedrückt wird, und nimmt man die Axe der x parallel mit der die Schichte in dem Einfallspunkte berührenden Ebene, und die Ebene der xy als diejenige an, welche durch die Normale der Schichte in jenem Punkte und durch die Richtung des Lichtstrahles geht, so hat man, da der vorhergehenden Annahme gemäſs, das Licht von der Schichte in einer auf diese Schichte senkrechten Richtung angezogen wird, nach den ersten Gründen der Mechanik (Kap. II. §. 3) folgende zwey Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = P$$

wo P die unbekannte Kraft ist, mit welcher das Licht in der Richtung der y von der Schichte angezogen wird, und wo dt das constante Element der Zeit bezeichnet. Die Verbindung dieser zwey Gleichungen gibt

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \text{Const} + 2\int P\, dy,$$

wo die Constante die Geschwindigkeit des Lichtes in der Entfernung von der Schichte ausdrückt, in welcher die Wirkung der Schichte auf das Licht noch nicht angefangen hat, oder für welche $t=0$ ist. Nennt man also c die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume, und v die Geschwindigkeit desselben an irgend einem Punkte der Atmosphäre, so läſst sich die letzte Gleichung auch so darstellen

$$v^2 = c^2 + 2\int P\,dy$$

wo das Integral $\int P\,dy$ irgend eine Funktion der Dichte ϱ der Luft seyn wird, daher wir dieses Integral durch $2k\varrho$ vorstellen wollen, wo k ein noch zu bestimmender Faktor ist, so daſs man hat

$$v^2 = c^2 + 4k\varrho.$$

§. 2.

Sey u das Loth aus dem Mittelpunkte der Erde auf der Tangente der Curve, welche das Licht in der Atmosphäre beschreibt. Da sich bey allen Bewegungen, welche durch Centralkräfte entstehen, die Geschwindigkeiten verkehrt, wie die Lothe aus dem Centralpunkte auf die Tangente der Bahn verhalten, (Kap. VII. §. 2), so ist

$$u = \frac{S}{v} \text{ oder } u = \frac{S}{\sqrt{c^2 + 4k\varrho}}$$

wo S eine Constante bezeichnet. Um diese Constante zu bestimmen, sey z die scheinbare Zenithdistanz des Sternes, so ist, wenn der Lichtstrahl die Erde berührt, $u = a \operatorname{Sin} z$ und $\varrho = 1$, wenn a den Halbmesser der Erde bezeichnet, und die Dichte der Atmosphäre an der Oberfläche der Erde für die Einheit der Dichtigkeiten angenommen wird. Also ist auch $S = a \operatorname{Sin} z . \sqrt{c^2 + 4k}$ oder, wenn man den Halbmesser der Erde auch für die Einheit der Entfernungen annimmt, $S = \operatorname{Sin} z . \sqrt{c^2 + 4k}$, und daher die vorhergehende Gleichung

$$u = \frac{\operatorname{Sin} z . \sqrt{1 + \frac{4k}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{4k\varrho}{c^2}}}$$

Nennt man aber dr den Winkel, welchen zwey nächste Tangenten jener Curve nnter einander bilden, so hat man aus bekannten geometrischen Gründen

$$dr = \frac{du}{\sqrt{(1+x)^2 - u^2}}$$

wo $(1+x)$ die Entfernung des Punktes der Curve von dem Mittelpunkte der Erde, und dr das Element der Krümmung jener Curve, also auch das Element der gesuchten Refraction bezeichnet. Substituirt man in der letzten Gleichung den vorhergehenden Werth von u, so hat man, da

$$du = -\frac{2ku\,d\varrho}{c^2\left(1+\frac{4k\varrho}{c^2}\right)} \text{ ist,}$$

$$dr = \frac{-\frac{2k}{c^2}\,d\varrho\,.\,\text{Sin}\,z\,.\sqrt{1+\frac{4k}{c^2}}}{\left(1+\frac{4k\varrho}{c^2}\right)\cdot\sqrt{(1+x)^2\,.\left(1+\frac{4k\varrho}{c^2}\right)-\left(1+\frac{4k}{c^2}\right)\text{Sin}^2 z}}$$

und das Integral dieser Gleichnng wird die gesuchte Refraction r geben.

§. 3.

Um die letzte Gleichung leichter zu integriren, wollen wir sie zuerst, ohne ihrem Werthe merkbar Eintrag zu thun, einfacher auszudrücken suchen.

Zu dieser Absicht sey

$$\frac{1}{1+x} = 1 - s \text{ und } \frac{2k}{c^2+4k} = \alpha \text{ oder } \frac{4k}{c^2} = \frac{2\alpha}{1-2\alpha},$$

so erhält man

$$dr = \frac{-\frac{\alpha}{1-2\alpha}\,.\,d\varrho\,\text{Sin}\,z\sqrt{1+\frac{2\alpha}{1-2\alpha}}}{\left(1+\frac{2\alpha\varrho}{1-2\alpha}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{(1-s)^2}\cdot\left(1+\frac{2\alpha\varrho}{1-2\alpha}\right)-\left(1+\frac{2\alpha}{1-2\alpha}\right)\text{Sin}^2 z}}$$

oder wenn man Zähler und Nenner durch $(1-s)\sqrt{1-2\alpha}$ multiplicirt,

$$dr = \frac{-\alpha\,d\varrho\,(1-s)\,\text{Sin}\,z}{(1-2\alpha+2\alpha\varrho)\,.\sqrt{1-2\alpha+2\alpha\varrho-(1-s)^2\,\text{Sin}^2 z}}.$$

und auch dieser Ausdruck ist noch ohne alle Abkürzung. Da aber die Gröſse α gegen die Einheit sehr klein ist, so ist von $(1-2\alpha+2\alpha\varrho)$ der gröſste Werth gleich 1 für $\varrho = 1$, und der kleinste Werth gleich $1-2\alpha$ für $\varrho=0$, so daſs man statt dieser Gröſse $(1-2\alpha+2\alpha\varrho)$ ohne merklichen Fehler das Mittel aus jenen beyden Werthen,

oder die Gröſse $(1-\alpha)$ annehmen kann. Da endlich auch s, so wie α sehr klein ist, so wird man die Gröſsen αs und s^2 vernachlässigen, und daher statt der letzten Gleichung die folgende erhalten

$$dr = \frac{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\, d\varrho . \operatorname{Sin} z}{\sqrt{1-2\alpha+2\alpha\varrho-(1-2s)\operatorname{Sin}^2 z}} \quad \text{oder}$$

$$dr = \frac{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\, d\varrho . \operatorname{Sin} z}{\sqrt{2s-2\alpha(1-\varrho)+(1-2s)\operatorname{Cos}^2 z}}.$$

§. 4.

Um die letzte Gleichung zu integriren, muſs man vor allem das Gesetz kennen, nach welchem die Dichte ϱ der Luft von der Höhe x derselben über der Erdoberfläche abhängt. Da aber dieses Gesetz unbekannt ist, so muſs man zu irgend einer Hypothese Zuflucht nehmen. Die einfachste und vielleicht auch die wahrscheinlichste ist die, daſs die Dichtigkeiten der Luftschichten in gleichem Verhältnisse mit den Tiefen dieser Schichten unter der obersten Gränze der Atmosphäre zunehmen. Sind also ϱ und ϱ' die Dichtigkeiten zweyer Schichten, und x x' die Höhen dieser Schichten über der Oberfläche der Erde, und ist β die Höhe der ganzen Atmosphäre über der Erdoberfläche, so ist jener Annahme gemäſs

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\beta - x}{\beta - x'}.$$

Bezeichnet daher ϱ' die Dichte der Atmosphäre an der Erdoberfläche, so ist $\varrho' = 1$ für $x' = o$, und daher die letzte Gleichung

$$x = \beta(1-\varrho).$$

Da ferner nach dem Vorhergehenden $x = \frac{s}{1-s}$ ist, und da wir, wie bereits erwähnt wurde, die zweyten und höheren Potenzen von s nicht mehr berücksichtigen, so ist $x = s$, und daher auch $s = \beta(1-\varrho)$. Substituirt man diesen Werth von s in der letzten Gleichung des §. 3, so ist

$$dr = \frac{-\frac{\alpha\, d\varrho}{1-\alpha}\operatorname{Sin} z}{\sqrt{2\beta(1-\varrho)-2\alpha(1-\varrho)+[1-2\beta(1-\varrho)]\operatorname{Cos}^2 z}}, \text{ oder}$$

$$dr = \frac{-\frac{\alpha\, d\varrho}{1-\alpha}\,\text{Sin}\, z}{\sqrt{\text{Cos}^2 z + [2\beta\,\text{Sin}^2 z - 2\alpha](1-\varrho)}}.$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach der bekannten Formel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A - Bx}} = -\frac{2}{B}\sqrt{A - Bx}$$

so erhält man

$$r = \text{Const} + \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\text{Sin}\, z}{\beta\,\text{Sin}^2 z - \alpha} \cdot \sqrt{\text{Cos}^2 z + 2\beta\,\text{Sin}^2 z - 2\alpha - (2\beta\,\text{Sin}^2 z - 2\alpha)\varrho}$$

Es ist daher das gesuchte Integral zwischen den beyden Gränzen $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$

$$r = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\text{Sin}\, z}{\beta\,\text{Sin}^2 z - \alpha} \cdot \sqrt{\text{Cos}^2 z + 2\beta\,\text{Sin}^2 z - 2\alpha}$$

$$- \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\text{Sin}\, z}{\beta\,\text{Sin}^2 z - \alpha} \cdot \sqrt{\text{Cos}^2 z + 2\beta\,\text{Sin}^2 z - 2\alpha - (2\beta\,\text{Sin}^2 z - 2\alpha)}$$

das heifst

$$r = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\text{Sin}\, z}{\beta\,\text{Sin}^2 z - \alpha}\left(\sqrt{\text{Cos}^2 z + 2\beta\,\text{Sin}^2 z - 2\alpha} - \text{Cos}\, z\right) \text{ oder}$$

$$r = \frac{\frac{2\alpha}{1-\alpha}\,\text{Sin}\, z}{\text{Cos}\, z + \sqrt{\text{Cos}^2 z + 2\beta\,\text{Sin}^2 z - 2\alpha}}; \text{ oder endlich}$$

$$r = \frac{\frac{2\alpha}{1-\alpha}\,\text{Sin}\, z}{\text{Cos}\, z + \sqrt{2\beta - 2\alpha + (1-2\beta)\,\text{Cos}^2 z}}.$$

§. 5.

Um diese Gleichung anznwenden, müssen wir zuvor die Werthe der Gröfse α und β bestimmen.

Nennt man ϑ den Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Normale der brechenden Fläche in dem Einfallspunkt bildet, und ϑ' den Winkel des gebrochenen Strahles mit derselben Normale, so ist bekannt, dafs die Sinus dieser Winkel für das-

selbe brechende Mittel ein constantes Verhältnifs haben, und dafs dieses Verhältnifs gleich dem der beyden Geschwindigkeiten ist, welche der Strahl vor und nach der Brechung hat. Um dieses auf eine sehr einfache Art zu beweisen, sey wie zuvor c die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume, und v die Geschwindigkeit desselben in irgend einem Punkte der Atmosphäre, die hier von gleicher Dichte angenommen wird. Zerlegt man die erste Geschwindigkeit c in zwey andere unter sich senkrechte, deren eine c' parallel mit der brechenden Fläche, und die andere c'' auf dieser Fläche senkrecht ist, so hat man $c' = c \operatorname{Sin} \vartheta$ und $c'' = c \operatorname{Cos} \vartheta$. Zerlegt man eben so die zweyte Geschwindigkeit v in zwey andere, deren eine v' wieder mit der brechenden Fläche parallel, und die andere v'' darauf senkrecht ist, so ist auch hier $v' = v \operatorname{Sin} \vartheta'$ und $v'' = v \operatorname{Cos} \vartheta'$. Da aber die Anziehung der brechenden Fläche blofs die auf diese Fläche senkrechte Geschwindigkeit ändert, die mit dieser Fläche parallele Geschwindigkeit aber ungeändert läfst, so ist $v' = c'$, oder wenn man die vorhergehenden Werthe dieser Gröfse substituirt,

$$\frac{\operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin} \vartheta'} = \frac{v}{c},$$

welche Gleichung den oben aufgestellten Satz enthält. Nach §. 1 ist aber auch $v^2 = c^2 + 4 k \varrho$, also hat man, wenn man der Kürze wegen die Gröfse $\frac{\operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin} \vartheta'}$ durch ω bezeichnet, wo die Gröfse ω für jeden brechenden Körper durch Versuche bestimmt werden kann,

$$k = \frac{c^2}{4\varrho} (\omega^2 - 1),$$

durch welche Gleichung man daher den Werth des oben (§. 1) angenommenen Faktors k für jede brechende Fläche, deren Dichte ϱ und deren Brechungsverhältnifs ω ist, bestimmen kann.

Nach den Versuchen der Physiker ist das Verhältnifs des Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des gebrochenen Winkels bey dem Uebergange des Lichtes aus dem leeren Raume in die atmosphärische Luft gleich $\omega = 1.0002914$, vorausgesetzt, dafs diese Luft eine Dichte habe, welche der Barometerhöhe von 28 Par. Zoll und der Temperatur von 0° Therm. Réaumur entspricht. Dieses angenommen, gibt die letzte Gleichung

$$\frac{4k}{c^2} = \omega^2 - 1 = 0.0005829.$$

Nach §. 3 ist aber $\alpha = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4k}{c^2}}{1 + \frac{4k}{c^2}}$

also auch, wenn man den gefundenen Werth von $\frac{4k}{c^2}$ substituirt,

$$\alpha = 0.00029128$$

in Theilen des Halbmessers, und daher die Größe $\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ oder vielmehr, da wir diese Größe nicht in Theilen des Halbmessers, sondern in Bogen ausgedrückt brauchen,

$$\frac{2\alpha}{(1-\alpha)\,\text{Sin}\,1''} = 120''.19$$

wofür wir der Kürze wegen 120″.2 setzen wollen.

Ueber die Größe β, oder die Höhe der Atmosphäre über der Erdoberfläche, in Theilen des Halbmessers der Erde ausgedrückt, haben wir keine genauen Bestimmungen. Nimmt man an, daſs die Dämmerung anfängt oder aufhört, wenn die Sonne 7° 45′ unter dem Horizonte ist, so folgt daraus

$$\frac{1}{1+\beta} = \text{Cos}\,3°\,52'\,30'', \text{ oder } \beta = 0.00229, \text{ und daher}$$

$$2(\beta-\alpha) = 0.003997,$$

wofür wir der Kürze wegen 0.004 annehmen wollen.

§. 6.

Nach diesen Bestimmungen der Größe α und β wird also die letzte Gleichung des §. 4

$$r = \frac{120''.2\,\text{Sin}\,z}{\text{Cos}\,z + \sqrt{0.004 + 0.99542\,\text{Cos}^2\,z}} \text{ oder}$$

$$r = \frac{120''.2\,\text{Sin}\,z}{\text{Cos}\,z + \sqrt{0.004 + \text{Cos}^2 z - 0.00458\,\text{Cos}^2 z}},$$

wofür man noch ohne merklichen Fehler setzen kann

$$r = \frac{120''.2\,\text{Sin}\,z}{\text{Cos}\,z + \sqrt{0.004\,\text{Sin}^2\,z + \text{Cos}^2\,z}} \;...\; (1).$$

Selbst dieser letzte Ausdruck läſst sich noch, ohne der Genauigkeit zu schaden, auf den folgenden einfacheren bringen

$$r = \frac{120''.2\,\text{Sin}\,z}{\text{Cos}\,z + \sqrt{0.004 + \text{Cos}^2 z}} \;...\; (2).$$

In der That ist die Differenz dieser beyden Werthe von r*, wie

sie aus den Gleichungen (1) und (2) folgt, für die verschiedenen Zenithdistanzen

z	20°	40°	50°	60°	70°	80°	85°	87°	89°	90°
Differenz	0''.0	0''.1	0''.1	0''.2	0''.2	0''.2	0''.2	0''.3	0''.1	0''.0

also unmerklich, wovon sich die Ursache leicht finden läſst.

Für die Berechnung einer Tafel von r aber ist die erste Form (1) sogar noch etwas bequemer. Führt man nämlich eine Hülfsgröſse φ ein, so daſs man hat

$$\text{tg}\,\varphi = \sqrt{0.004}.\ \text{tg}\ z,$$

so gibt die Gleichung (1)

$$r = \frac{120''.2}{\sqrt{0.004}}\ .\ \text{tg}\ \frac{\varphi}{2}\ .\ .\ .\ (\text{I})$$

Ist eben so $\text{tg}\,\psi = \frac{\sqrt{0.004}}{\text{Cos}\ z}$

so gibt die Gleichung (2)

$$r = \frac{120''2}{\sqrt{0.004}}\ .\ \text{Sin}\ z\ \text{tg}\ \frac{\psi}{2}\ .\ .\ .\ (\text{II}).$$

Die am Ende folgende Tafel ist bis $z = 85°$ nach der Gleichung (II) berechnet worden, wo man hat

$$\log\ \sqrt{0.004} = 8.80103 \text{ und } \log\ \frac{120.2}{\sqrt{0.004}} = 3.27887.$$

§. 7.

Die Gleichung (2) war

$$r = \frac{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)\ \text{Sin}\,1''}\ .\ \text{Sin}\ z}{\text{Cos}\ z + \sqrt{2(\beta-\alpha) + \text{Cos}^2 z}}\ ,\ \text{oder auch}$$

$$r = \frac{\alpha\ \text{Sin}\ z}{(1-\alpha)(\beta-\alpha)\ \text{Sin}\ 1''}\ .\ \left[\sqrt{2(\beta-\alpha)+\text{Cos}^2 z} - \text{Cos}\ z\right]$$

oder endlich

$$r = \frac{\alpha\,\text{Sin}\ z.\sqrt{2}}{(1-\alpha)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{2}}.\text{Sin}\,1''}\ .\ \left[\sqrt{1 + \frac{\text{Cos}^2 z}{2(\beta-\alpha)}} - \frac{\text{Cos}\ z}{\sqrt{2(\beta-\alpha)}}\right]$$

und dieses ist der Ausdruck der mittleren Refraction, d. h.

derjenigen, welche für den angenommenen Normalzustand der Atmosphäre angenommen wurde, wo das Barometer $B = 28$ Par. Zoll, und das Thermometer o Grade Réaumur zeigt.

Wir wollen nun sehen, welches die Refraction r' für einen anderen Zustand der Atmosphäre ist, für welchen das Barometer überhaupt b Par. Zolle und das Thermometer t Grade R. zeigt.

Nimmt man an, daſs die Ausdehnung eines Volums atmosphärischer Luft für jeden Grad Réaum. gleich $m = 0.004555$ betrage, so muſs man in dem letzten Ausdrucke von r die Gröſse β in $\beta\,(1 + m\,t)$, und die Gröſse α in $\frac{\alpha b}{(1 + m\,t)\,B}$ verwandeln, um die gesuchte verbesserte Refraction r' für den neuen Zustand der Atmosphäre zu erhalten. (Vergl. Vol. I. S. 69). Bringt man die letzte Aenderung, da sie sehr klein ist, nur in dem ersten Gliede von $\frac{\alpha}{1 - \alpha} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \ldots$ an, und läſst man sie unter dem Wurzelzeichen, wo sie unmerkbar wird, weg, so erhält man

$$r' = \frac{2\,\alpha b \,\mathrm{Sin}\, z}{(1 - \alpha)(1 + mt)\,B\,\mathrm{Sin}\,1'' \sqrt{2\,\beta\,(1 + mt) - 2\alpha}} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \frac{\mathrm{Cos}^2 z}{2\beta(1 + mt) - 2\alpha}} - \frac{\mathrm{Cos}\, z}{\sqrt{2\beta(1 + mt) - 2\alpha}} \right\}$$

oder annähernd

$$r' = \frac{2\,\alpha\, b\,\mathrm{Sin}\, z}{(1 - \alpha)(1 + mt)^{\frac{3}{2}}.\,B\,\mathrm{Sin}\,1'' \sqrt{2\,(\beta - \alpha)}} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \frac{\mathrm{Cos}^2 z}{2(1 + mt(\beta - \alpha)}} - \frac{\mathrm{Cos}\, z}{\sqrt{2\,(1 + m\,t)\,(\beta - \alpha)}} \right\}$$

oder endlich

$$r' = \frac{2\,\alpha\, b\,\mathrm{Sin}\, z}{(1 - \alpha)(1 + m\,t)^2.\,B\,\mathrm{Sin}\,1'' \sqrt{2\,(\beta - \alpha)}} \cdot \left\{ \sqrt{1 + m\,t + \frac{\mathrm{Cos}^2 z}{2(\beta - \alpha)}} - \frac{\mathrm{Cos}\, z}{\sqrt{2\,(\beta - \alpha)}} \right\}$$

Es war aber

$$\frac{2\,\alpha}{(1 - \alpha)\,\mathrm{Sin}\,1''} = 120''.2, \text{ und } \frac{1}{\sqrt{2\,(\beta - \alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{0.004}} = 15.8114,$$

also ist auch

$$r' = \frac{(1900''.53) b \operatorname{Sin} z}{(1+mt)^2 . B} \cdot \left(\sqrt{1+mt+(15.8114 \operatorname{Cos} z)^2} - 15.8114 \operatorname{Cos} z\right) \ldots (3)$$

und dieses ist der Ausdruck der corrigirten Refraction r'. Setzt man in ihm $b = B$ und $t = o$, so erhält man für die mittlere Refraction r wieder die Gleichung (2).

§. 8.

Da aber der letzte Ausdruck von r' in der Gleichung (3) zur Berechnung beschwerlich ist, so wollen wir ihm eine zu diesem Zwecke bequemere Gestalt geben.

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze hat man

$$r' = r + t . \frac{dr}{dt} + (b - B) . \frac{dr}{db} + \text{ oder}$$

$$r' = r + t . \frac{dr}{dt} + B \left(\frac{b}{B} - 1\right) . \frac{dr}{db} +$$

Setzt man diesen Ausdruck zur bequemeren Berechnung durch Logarithmen gleich

$$r' = \frac{r}{(1+mt)^n} . \left(\frac{b}{B}\right)^{n'}$$

so wird man die Werthe der beyden Exponenten n und n' auf folgende Art bestimmen.

Es ist $(1+mt)^{-n} = 1 - nmt +$ und eben so

$$\left(\frac{b}{B}\right)^{n'} = 1 + n' \left(\frac{b}{B} - 1\right) +$$

also ist auch der letzte Ausdruck

$$r' = r (1 - nmt) \left[1 + n' \left(\frac{b}{B} - 1\right)\right]$$

oder wenn man multiplicirt

$$r' = r - mnrt + rn' \left(\frac{b}{B} - 1\right).$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden

$$r' = r + r . \frac{dr}{dt} + B \left(\frac{b}{B} - 1\right) . \frac{dr}{db}$$

so erhält man

$$n = -\frac{1}{mr} . \frac{dr}{dt} \text{ und } n' = \frac{B}{r} . \frac{dr}{db}.$$

Es ist daher nur noch übrig, die Werthe von $\frac{dr}{db}$ und von $\frac{dr}{dt}$ zu suchen. Zu diesem Zwecke gibt die letzte Gleichung des §. 7, wenn man sie in Beziehung auf r′, b und t differentiirt,

$$\frac{dr'}{db} = \frac{r'}{b} \text{ und}$$

$$\frac{dr'}{dt} = -\frac{2mr'}{1+mt} + \frac{1900.53\, m b \operatorname{Sin} z}{2(1+mt)^2 . B \sqrt{1+mt+(15.8114 \operatorname{Cos} z)^2}}$$

also auch, wenn man in diesen beyden Ausdrücken t = o und b = B und daher r′ = r setzt,

$$\frac{dr}{db} = \frac{r}{B} \text{ und}$$

$$\frac{dr}{dt} = -2mr + \frac{1900.53\, m \operatorname{Sin} z}{2\sqrt{1+(15.8114 \operatorname{Cos} z)^2}}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\frac{dr}{db}$ und $\frac{dr}{dt}$ in den vorhergehenden Ausdrücken von n und n′, so erhält man

$$n = 2 - \frac{950 \operatorname{Sin} z}{r\sqrt{1+(15.8114 \operatorname{Cos} z)^2}}$$

$$\text{und } n' = 1$$

und wenn man so die Gröſse n kennt, so ist die gesuchte verbesserte Refraction

$$r' = r . \left(\frac{b}{B}\right) (1+mt)^{-n}$$

§. 9.

Sammelt man alles Vorhergehende, so ist die mittlere Refraction

$$r = \frac{120''.2 \operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos} z + \sqrt{0.004 + \operatorname{Cos}^2 z}}$$

oder zur bequemeren Berechnung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sqrt{0.004}}{\operatorname{Cos} z}, \quad r = \frac{120''.2}{\sqrt{0.004}} . \operatorname{Sin} z \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$$

Kennt man dann die Gröſse n aus

$$n = 2 - \frac{950 \operatorname{Sin} z}{r\sqrt{1 + (15.8114 \operatorname{Cos} z)^2}}$$

so ist der Logarithmus der corrigirten Refraction

$$\log r' = \log r + \log \frac{b}{B} - n \log (1 + m\,t)$$

wo $m = 0.004555$ und $B = 28$ Par. Zoll, und wo b das Barometer in Par. Zollen und t das äuſsere Therm. Reaum. bezeichnet.

Noch muſs bemerkt werden, daſs die Höhe b des Barometers durch die von dem an seiner Scale hängenden, oder durch die von dem innern Thermometer abhängende Correction auf die Temperatur des schmelzenden Eises gebracht werden muſs, indem man die Gröſse b durch $\frac{1}{1+0.000225\,t'}$ multiplicirt, wo t′ die Höhe des inneren Thermometers R ist. Setzt man $m' = 0.000225$, so ist daher der vorhergehende Ausdruck

$$\log r' = \log r + \log \frac{b}{B\,(1 + m' t')} + n \log \frac{1}{1 + m\,t}$$

Die Tafel am Ende dieses Kap. gibt die Werthe von n nach dem vorhergenden Ausdrucke von $z = 0$ bis $z = 90°$, und die drey folgenden kleineren Tafeln geben

für jeden Werth des Barometers b die Gröſse $\log \frac{b}{B}$

des innern Thermometers t′ die Gröſse $\log \frac{1}{1+m't'}$

des äussern Thermometers t die Gröſse $\log(1+mt)$

Den Gebrauch derselben zeigt folgendes Beyspiel

$z = 76°\ 45'\ 0''$
$b = 26\ 7$ Par. Zoll
$t' = +\ 20°$. R
$t = +\ 25°$. R

z gibt log r = 2 . 3989 und n = 1.020
b gibt $\log \frac{b}{B}$ - - - 9 . 9794 t gibt — 0 . 0468
t′ . . . $\log \frac{1}{1+m't'}$ - - 9 . 9980 —(0.0468)n = —0.0477
t - - - - - - - — 0 . 0477

$\log r' = 2.3286$
$r = 213''.1 = 3'\ 33''\ 1$

§. 10.

Die Gleichungen des §. 9 sind mit Ausnahme der Constanten, welche nach den neuesten Bestimmungen gewählt wurden, im Grunde dieselben, welche T o b. M a y e r (Tabulae motuum solis et lunae. Lond. 1770) gegeben hat. Es läſst sich auch leicht zeigen, daſs dieselben Ausdrücke noch mit jenen identisch sind, welche S i m p s o n und B r a d l e y (Vol. I. p. 71) gegeben haben. Setzt man nämlich in der ersten Gleichung des §. 7 statt $\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ die Gröſse $\frac{1-M^2}{MN}$, und statt $2(\beta-\alpha)$ die Gröſse $\frac{1-M^2}{M^2}$, das heiſst, nimmt man an

$$M^2 = \frac{1}{2(\beta-\alpha)+1} \text{ und } N = \frac{(1-\alpha)(\beta-\alpha)}{\alpha\sqrt{2(\beta-\alpha)+1}}$$

so wird jene Gleichung in folgende übergehen

$$N\,r\,\mathrm{Sin}\,1'' = \frac{\frac{1-M^2}{M}\,.\,\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Cos}\,z + \sqrt{\frac{1-M^2}{M^2} + \mathrm{Cos}^2\,z}}$$

$$\text{oder } \mathrm{Sin}\,N\,r = \frac{(1-M^2)\,\mathrm{Sin}\,z}{M\,\mathrm{Cos}\,z + \sqrt{1-M^2\,\mathrm{Sin}^2\,z}}$$

$$= -M\,\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Cos}\,z + \mathrm{Sin}\,z\,.\,\sqrt{1-M^2\,\mathrm{Sin}^2\,z}$$

also auch

$$\mathrm{Cos}^2\,N\,r = 1 - \mathrm{Sin}^2\,N\,r = \mathrm{Cos}^2\,z\,.\,(1-M^2\,\mathrm{Sin}^2\,z)$$

$$+ M^2\,\mathrm{Sin}^4\,z + 2\,M\,\mathrm{Sin}^2\,z\,\mathrm{Cos}\,z\,.\,\sqrt{1-M^2\,\mathrm{Sin}^2\,z}$$

oder wenn man die Wurzel auszieht,

$$\mathrm{Cos}\,N\,r = \mathrm{Cos}\,z\,.\,\sqrt{1-M^2\,\mathrm{Sin}^2\,z} + M\,\mathrm{Sin}^2\,z.$$

Es war aber auch

$$\mathrm{Sin}\,N\,r\,\mathrm{Cotg}\,z = \mathrm{Cos}\,z\,\sqrt{1-M^2\,\mathrm{Sin}^2\,z} - M\,\mathrm{Cos}^2\,z$$

und daher der beyden letzten Gleichungen Differenz

$$\mathrm{Cos}\,N\,r - \mathrm{Sin}\,N\,r\,\mathrm{Cotg}\,z = M \text{ oder}$$

$$\mathrm{Sin}\,(z - N\,r) = M\,\mathrm{Sin}\,z$$

welches die bekannte Form S i m p s o n's ist, die man auch so ausdrücken kann,

$$\mathrm{Sin}\,z : \mathrm{Sin}\,(z - N\,r) = 1 : M, \text{ also auch}$$

$$\mathrm{Sin}\,z + \mathrm{Sin}\,(z - N\,r) : \mathrm{Sin}\,z - \mathrm{Sin}\,(z - N\,r) = 1 + M : 1 - M$$

oder endlich

$$\mathrm{tg}\left(z-\frac{N}{2}.r\right)=\frac{1+M}{1-M}.\mathrm{tg}\,\frac{N}{2}.r$$

welches die Form ist, die zuerst Bradley gegeben hat. Nimmt man nach §. 5 an

$$\alpha=0.00029128 \text{ und } \beta=0.00229, \text{ so ist}$$
$$M=0.99801 \qquad \text{und } N=6.85046$$

§. 11.

Die letzte Gleichung des §. 3 läſst sich auch noch in dem Falle

$$1-s=[1-2\alpha(1-\varrho)]^m$$

vollständig integriren, wo m irgend eine willkührliche Gröſse ist. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$[1-2\alpha(1-\varrho)]^{\frac{2m-1}{2}}\,\mathrm{Sin}\,z=\omega$$

so geht jene Gleichung in folgende über

$$dr=\frac{-d\omega}{(2m-1).\sqrt{1-\omega^2}}$$

Integrirt man diesen Ausdruck von $\varrho=0$ bis $\varrho=1$ oder von $\omega=\mathrm{Sin}\,z$ bis

$$\omega=\frac{\mathrm{Sin}\,z}{\left(1+\frac{2\alpha}{1-2\alpha}\right)^{\frac{2m-1}{2}}}=(1-2\alpha)^{\frac{2m-1}{2}}.\mathrm{Sin}\,z,$$

so erhält man

$$r=\frac{1}{2m-1}\left(z-\mathrm{Arc\,Sin}\left[(1-2\alpha)^{\frac{2m-1}{2}}.\mathrm{Sin}\,z\right]\right), \text{ oder}$$

$$\mathrm{Sin}\,[z-(2m-1)r]=(1-2\alpha)^{\frac{2m-1}{2}}\,\mathrm{Sin}\,z$$

also wieder die von Simpson gegebene Form, die daher, so wie die in §. 9 gegebenen Ausdrücke, nicht bloſs der in §. 4 angenommenen Hypothese $s=\beta(1-\varrho)$, sondern auch noch allen denjenigen Voraussetzungen zwischen s und ϱ entspricht, welche der Gleichung

$$1-s=[1-2\alpha(1-\varrho)]^m$$

genug thun.

§. 12.

Die Angemessenheit der einfachen Annahme $s = \beta(1-\varrho)$, von welcher wir oben ausgegangen sind, wird auch noch durch folgende Bemerkung bestätiget. Die Gleichung (2) des §. 6

$$r = \frac{\frac{2\alpha}{1-\alpha}\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos} z + \sqrt{2(\beta-\alpha) + \operatorname{Cos}^2 z}}$$

kann man auch so ausdrücken

$$r = \frac{\frac{2\alpha}{1-\alpha}\cdot \operatorname{tg} z}{1 + \sqrt{1 + 2(\beta-\alpha)(1+\operatorname{tg}^2 z)}}$$

oder da $(\beta-\alpha)$ sehr klein ist,

$$r = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot \operatorname{tg} z}{1 + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(1+\operatorname{tg}^2 z)}, \text{ oder endlich}$$

$$r = \alpha \operatorname{tg} z.\left(1 + \alpha + \frac{\alpha-\beta}{2\operatorname{Cos}^2 z}\right) \ldots . (4).$$

I. Wenn man aber in dem zweyten Ausdrucke von dr des §. 3, welcher noch von aller Hypothese über die Gröſsen s und ϱ unabhängig ist, die Gröſse unter dem Wurzelzeichen auflöſst, und die dritten und höhern Dimensionen der sehr kleinen Gröſse α und s vernachlässiget, so erhält man

$$dr = -\frac{\alpha d\varrho(1-s)\operatorname{tg} z}{1-2\alpha+2\alpha\varrho}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha-2\alpha\varrho}{\operatorname{Cos}^2 z} - (2s-s^2)\operatorname{tg}^2 z\right)\right\}$$

$$= -\alpha d\varrho(1-s)\operatorname{tg} z.[1+2\alpha-2\alpha\varrho].\left(1+\frac{\alpha(1-\varrho)}{\operatorname{Cos}^2 z} - s\operatorname{tg}^2 z\right)$$

$$= -\alpha d\varrho \operatorname{tg} z.\left(1 - \frac{s}{\operatorname{Cos}^2 z} + \alpha(1-\varrho)\frac{(2\operatorname{Cos}^2 z+1)}{\operatorname{Cos}^2 z}\right)$$

Integrirt man diesen Ausdruck, so ist

$$r = \alpha \operatorname{tg} z\left(\varrho + \alpha(\varrho - \tfrac{1}{2}\varrho^2)\frac{2\operatorname{Cos}^2 z+1}{\operatorname{Cos}^2 z} - \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 z}\cdot\int s\, d\varrho\right)$$

also das Integral zwischen den Gränzen $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$

$$r = \alpha \operatorname{tg} z\left\{1 + \tfrac{1}{2}\alpha.\left(\frac{2\operatorname{Cos}^2 z+1}{\operatorname{Cos}^2 z}\right) - \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 z}.\int s\, d\varrho\right\}$$

Es ist also noch übrig, das Integral

$$\int s\,d\varrho = s\varrho - \int \varrho\,ds$$

zu suchen. Für die Oberfläche der Erde ist

$$s = 0, \text{ also } \int s\,d\varrho = -\int \varrho\,ds.$$

Erhebt man sich aber in der Atmosphäre um das Element ds, so wird der Druck p der Luft, der bekanntlich durch das Barometer gemessen wird, um die Gröfse $\varrho\,ds$ vermindert, so dafs man hat

$$dp = -\varrho\,ds, \text{ also auch } p = -\int \varrho\,ds,$$

$$\text{und daher } \int s\,d\varrho = +p.$$

Die letzte Gleichung wird daher

$$r = \alpha \operatorname{tg} z \,.\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\alpha(2\operatorname{Cos}^2 z + 1) - p}{\operatorname{Cos}^2 z}\right)$$

wo also p der Höhe des Barometers oder der Höhe der Atmosphäre proportional ist.

Setzt man $p = \frac{1}{2}\beta$, so ist auch

$$r = \alpha \operatorname{tg} z \,.\left(1 + \alpha + \frac{\alpha - \beta}{2\operatorname{Cos}^2 z}\right)$$

eine Gleichung, die mit der (4) identisch ist.

Die Gleichungen des §. 9 haben also den grofsen Vortheil, dafs sie, wenigstens bis $z = 80°$, die Refraction ganz unabhängig von dem Gesetze geben, nach welchem die Dichte der Atmosphäre von ihrer Höhe bestimmt wird. Die neuesten Refractionstafeln von Laplace, die Delambre in den Tables du bur. des Longit. gegeben hat, sind bis $z = 74°$ nach der Gleichung (4) berechnet worden.

§. 13.

Die Gleichungen des §. 9 und die darauf gegründeten, unten folgenden Tafeln stimmen auch bis $z = 85°$ genau mit den Beobachtungen, so wie mit den Refractionstafeln, welche Bessel in seinen Fund. astron. gegeben hat, wenn man an die letzten die im Theile VII der Königsberger Beobachtungen angezeigten Verbesserungen anbringt. Für gröfsere Zenithdistanzen aber gibt die Gleichung (2) die Refraction offenbar zu klein, und es ist daher nothwendig, für diese letzten fünf Grade die Refraction unter einer weniger beschränkten Hypothese, als in §. 4 geschehen ist, zu suchen.

Bessel nimmt $\varrho = \varepsilon^{-\beta s}$ an, wo ε die Basis der natürlichen Logarithmen, und wo β eine Constante ist, welche so bestimmt werden kann, dafs die unter dieser Voraussetzung entwickelte Refraction mit der unmittelbar beobachteten Refraction

übereinstimme. Er fand $\beta = 745{,}75$ oder $\log \beta = 0.8725933$, und überdiefs aus den physischen Versuchen von Ramond, Biot und Arago die Gröfse $\alpha = 0{,}0002788844$; beydes für die Barometerhöhe von 29.6 engl. Zollen und für $+50°$ Therm. Fahrenheit.

Substituirt man diesen Werth von ϱ in der letzen Gleichung des §. 3, so erhält man

$$dr = \frac{\frac{\alpha\beta}{1-\alpha} ds \cdot \varepsilon^{-\beta s} \cdot \operatorname{Sin} z}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 z - 2\alpha(1-\varepsilon^{-\beta s}) + 2 s \operatorname{Sin}^2 z}}$$

Um diesen Ausdruck leichter zu integriren, wollen wir annehmen

$$s' = s - \frac{\alpha(1-\varepsilon^{-\beta s})}{\operatorname{Sin}^2 z}$$

woraus nach dem bekannten Reversionssatze (Vol. II. Seite 57) folgt

$$\varepsilon^{-\beta s} = \varepsilon^{-\beta s'} - \frac{\alpha\beta}{\operatorname{Sin}^2 z}(1-\varepsilon^{-\beta s'}) \cdot \varepsilon^{-\beta s'}$$
$$- \frac{\alpha^2 \beta}{1.2. \operatorname{Sin}^4 z} d \cdot \left(\frac{(1-\varepsilon^{-\beta s'})^2 \cdot \varepsilon^{-\beta s'}}{ds'}\right)$$
$$- \frac{\alpha^3 \beta}{1.2.3 \operatorname{Sin}^6 z} d^2 \cdot \left(\frac{(1-\varepsilon^{-\beta s'})^3 \cdot \varepsilon^{-\beta s'}}{ds'^2}\right) - \text{etc.}$$

und wenn man differentiirt,

$$\varepsilon^{-\beta s} ds = \varepsilon^{-\beta s'} ds' + \frac{\alpha}{\operatorname{Sin}^2 z} \cdot d\left((1-\varepsilon^{-\beta s'}) \cdot \varepsilon^{-\beta s'}\right)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1.2 \operatorname{Sin}^4 z} d^2 \cdot \left(\frac{(1-\varepsilon^{-\beta s'})^2 \cdot \varepsilon^{-\beta s'}}{ds'}\right)$$
$$+ \frac{\alpha^3}{1.2.3 \operatorname{Sin}^6 z} d^3 \cdot \left(\frac{(1-\varepsilon^{-\beta s'})^2 \cdot \varepsilon^{-\beta s'}}{ds'^2}\right) + \text{etc.}$$

Substituirt man diesen Werth von $\varepsilon^{-\beta s} ds$ in der vorhergehenden Gleichung, so ist

$$dr = \frac{\frac{\alpha\beta}{1-\alpha} \operatorname{Sin} z \cdot ds'}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 z + 2s' \operatorname{Sin}^2 z}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{-\beta s'} - \frac{\alpha}{\operatorname{Sin}^2 z} d \cdot \left(\frac{(\varepsilon^{-\beta s'} - 1) \cdot \varepsilon^{-\beta s'}}{ds'}\right) \\ + \frac{\alpha^2}{1.2 \operatorname{Sin}^4 z} d^2 \cdot \left(\frac{(\varepsilon^{-\beta s'} - 1)^2 \cdot \varepsilon^{-\beta s'}}{ds'^2}\right) \\ - \frac{\alpha^3}{1.2.3 \operatorname{Sin}^6 z} d^3 \cdot \left(\frac{(\varepsilon^{-\beta s'} - 1)^3 \cdot \varepsilon^{-\beta s'}}{ds'^3}\right) \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

oder wenn man die angezeigten Differentiationen ausführt,

$$dr = \frac{\frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\,\mathrm{Sin}\,z\,.\,ds'}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2 z + 2s'\,\mathrm{Sin}^2 z}}\,.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon^{-\beta s'} + \frac{\alpha\beta}{\mathrm{Sin}^2 z}\,(2\,\varepsilon^{-2\beta s'} - \varepsilon^{-\beta s'}) \\ \quad + \frac{\alpha^2\beta^2}{1\,.\,2\,\mathrm{Sin}^4 z}\,(3^2\varepsilon^{-3\beta s'} - 2.2^2\,\varepsilon^{-2\beta s'} + \varepsilon^{-\beta s'}) \\ + \frac{\alpha^3\beta^3}{1.2.3\,\mathrm{Sin}^6 z}\left(4^3\varepsilon^{-4\beta s'} - 3.3^3\varepsilon^{-3\beta s'} + \frac{3.2}{1.2}\,.\,2^3\varepsilon^{-2\beta s'} - \varepsilon^{-\beta s'}\right) \\ \qquad + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

und dieser Ausdruck von dr soll integrirt werden von $s = o$ bis $s = 1$, oder was dasselbe ist,

$$\text{von } s' = o \text{ bis } s' = 1 - \frac{\alpha(1 - \varepsilon^{-\beta})}{\mathrm{Sin}^2 z}.$$

Da aber ε gröſser als 2, und β nahe 746 ist, so kann man auch ohne einen merklichen Fehler annehmen, daſs der vorhergehende Ausdruck von $s' = o$ bis $s' = \infty$ integrirt werden soll.

I. Dieser Ausdruck ist aber auch, wenn man die Glieder, welche zu $\varepsilon^{-\beta s'}$, $\varepsilon^{-2\beta s'}$, $\varepsilon^{-3\beta s'}$ gehören, zusammen nimmt, und der Kürze wegen

$$k = \frac{\alpha\beta}{\mathrm{Sin}^2 z} \text{ setzt,}$$

$$dr = \frac{\frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\,\mathrm{Sin}\,z\,.\,ds'}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2 z + 2s'\,\mathrm{Sin}^2 z}}\,.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon^{-\beta s'}.\left(1 - k + \frac{k^2}{1.2} - \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) \\ + 2k\,\varepsilon^{-2\beta s'}\left(1 - (2k) + \frac{(2k)^2}{1.2} - \frac{(2k)^3}{1.2.3} + \ldots\right) \\ + \frac{3^2k^2}{1.2}\,\varepsilon^{-3\beta s'}\left(1 - (3k) + \frac{(3k)^2}{1.2} - \frac{(3k)^3}{1.2.3} + \ldots\right) \\ + \frac{4^3k^3}{1.2.3}\,\varepsilon^{-4\beta s'}\left(1 - (4k) + \frac{(4k)^2}{1.2} - \frac{(4k)^3}{1.2.3} + \ldots\right) \end{array}\right\}$$

oder, wenn man noch ferner zusammenzieht,

$$dr = \frac{\frac{\alpha\beta}{1-\alpha} \operatorname{Sin} z \,.\, ds'}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 z + 2s' \operatorname{Sin}^2 z}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{-k} \,.\, \varepsilon^{-\beta s'} + 2k \,.\, \varepsilon^{-2k} \,.\, \varepsilon^{-2\beta s'} + \frac{3^2 k^2}{1.2} \,.\, \varepsilon^{-3k} \,.\, \varepsilon^{-3\beta s'} \\ \qquad + \frac{4^3 k^3}{1.2.3} \,.\, \varepsilon^{-4k}\, \varepsilon^{-4\beta s'} + \ldots \end{array} \right\}$$

Man sieht so, daſs alle Glieder des Ausdruckes von dr sich auf die Form bringen lassen

$$dy = \frac{M \,.\, \beta \operatorname{Sin} z \,.\, ds' \,.\, \varepsilon^{-n\beta s'}}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 z + 2s' \operatorname{Sin}^2 z}}$$

wo M eine constante Gröſse, und n nach der Ordnung gleich 1, 2, 3 ist.

11. Um den letzten Ausdruck zu integriren, wollen wir annehmen

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Cotg}^2 z + s' = \frac{t^2}{n\beta}, \text{ also auch}$$

$$ds' = \frac{2\,t\,dt}{n\beta}.$$

wodurch unser Ausdruck von dy in den folgenden übergeht

$$dy = M \left(\frac{2\beta}{n}\right)^{\frac{1}{2}} .\, dt \,.\, \varepsilon^{\frac{n\beta}{2} \operatorname{Cotg}^2 z - t^2}$$

von welchem daher das Integral von $t = \left(\frac{n\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cotg}^2 z$ bis $t = \infty$ genommen werden soll.

$$\text{Es sey } \int \varepsilon^{-t^2} dt = \varepsilon^{-\frac{n\beta}{2} \operatorname{Cotg}^2 z} .\, \psi(n) \ldots (a)$$

so wird man, wenn man diesen Ausdruck von $\int \varepsilon^{-t^2} dt$ in der vorhergehenden Gleichung, d. h. in

$$y = M \left(\frac{2\beta}{n}\right)^{\frac{1}{2}} .\, \varepsilon^{\frac{n\beta}{2} \operatorname{Cotg}^2 z} \int \varepsilon^{-t^2} dt$$

substituirt, für das gesuchte Integral eines jeden einzelnen Gliedes von dr erhalten,

$$y = M \left(\frac{2\beta}{n}\right)^{\frac{1}{2}} .\, \psi(n)$$

So ist für das erste Glied $M = \frac{\alpha\, \varepsilon^{-k}}{1-\alpha}$ und $n = 1$, also das Integral des ersten Gliedes

$$\frac{\alpha\, \varepsilon^{-k}}{1-\alpha} (2\beta)^{\frac{1}{2}} . \psi(1)$$

Für das zweyte Glied ist $M = \frac{\alpha \,.\, 2k \,.\, \varepsilon^{-2k}}{1-\alpha}$ und $n = 2$, also das Integral des zweyten Gliedes

$$\frac{\alpha \,.\, \varepsilon^{-2k}}{1-\alpha}\, 2k \left(\frac{2\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} . \psi(2) \text{ u. s. f.}$$

Sammelt man so alle Glieder, so ist

$$r = \frac{\alpha}{1-\alpha} . \frac{\sqrt{2\beta}}{\operatorname{Sin} 1''} . \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{-k} . \psi(1) \\ + 2^{\frac{1}{2}} k . \varepsilon^{-2k} . \psi(2) \\ + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{1.2} k^2 . \varepsilon^{-3k} . \psi(3) \\ + \frac{4^{\frac{5}{2}}}{1.2.3} k^3 . \varepsilon^{-4k} \psi(4) \\ + \frac{5^{\frac{7}{2}}}{1.2.3.4} . k^4 . \varepsilon^{-5k} . \psi(5) + \ldots \end{array} \right\}$$

und dieses ist der gesuchte Ausdruck der Refraction.

Setzt man der Kürze wegen

$$P = \Sigma \frac{k^n . \varepsilon^{-nk}}{1.2.3 \ldots n} . n^{\frac{2n-1}{2}} . \psi(n)$$

wo Σ das bekannte Summenzeichen, und n nach der Ordnung 1, 2, 3 ... ist, das heifst also, setzt man

$$P = k . \varepsilon^{-k} \psi(1) + \frac{2^{\frac{3}{2}} . k^2 . \varepsilon^{-2k}}{1.2} \psi(2) + \frac{3^{\frac{5}{2}} . k^3 . \varepsilon^{-3k}}{1.2.3} \psi(3) + \frac{4^{\frac{7}{2}} . k^4 . \varepsilon^{-4k}}{1.2.3.4} . \psi(4) + \ldots$$

so geht der vorhergehende Ausdruck von r in den folgenden über

$$r = \frac{\operatorname{Sin}^2 z}{1-\alpha} . \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} . \frac{P}{\operatorname{Sin} 1''} \ldots (5)$$

§. 14.

Um die vorhergehende Gleichung (5) entwickeln zu können, muſs man zuvor den Werth von ψ (n), das heiſst, von dem Integrale $\int \varepsilon^{-t^2} . dt$ zwischen den Gränzen $t = 0$ und $t = \infty$ haben.

Nimmt man die folgenden Integrale zwischen $x = 0$ und $x = 1$ so hat man bekanntlich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} \qquad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3}{2.4} . \frac{\pi}{2} \qquad \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4}{3.5}$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5}{2.4.6} . \frac{\pi}{2} \qquad \int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6}{3.5.7} \text{. u. f.}$$

wo $\pi = 3.14159 \ldots$, also auch allgemein

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n} . \frac{\pi}{2}$$

$$\text{und} \int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots2n}{1.3.5.7\ldots(2n+1)}$$

und beyder Produkt

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} . \int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2n+1} . \frac{\pi}{2}$$

Nehmen wir die Gröſse t so an, daſs man hat $x = \varepsilon^{-qt^2}$, so ist $dx = -2qtdt . \varepsilon^{-qt^2}$, und daher die letzte Gleichung

$$4q^2 . \int \frac{tdt . \varepsilon^{-qt^2(1+2n)}}{\sqrt{1-\varepsilon^{-2qt^2}}} . \int \frac{tdt . \varepsilon^{-2qt^2(1+n)}}{\sqrt{1-\varepsilon^{-2qt^2}}} = \frac{1}{2n+1} . \frac{\pi}{2}$$

Sey die willkührliche Gröſse $q = \frac{1}{2n+1}$ oder $n = \frac{1-q}{2q}$, so wird die letzte Gleichung

$$\int \frac{tdt . \varepsilon^{-t^2}}{\sqrt{\frac{1-\varepsilon^{-2qt^2}}{2q}}} . \int \frac{tdt . \varepsilon^{-t^2(1+q)}}{\sqrt{\frac{1-\varepsilon^{-2qt^2}}{2q}}} = \frac{\pi}{4}$$

und da diese Integralien von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen werden

sollen, so sind sie auch von $q = 0$ bis $q = \infty$, oder von $t = 0$ bis $t = \infty$ zu nehmen. Aber für $q = 0$ ist der Werth von

$$\frac{1-\varepsilon^{-2qt^2}}{2q} \text{ gleich } \frac{d.(1-\varepsilon^{-2qt^2})}{d.2q} = \frac{\varepsilon^{-2qt^2}.2t^2dq}{2dq} = t^2,$$

also gibt die vorhergehende Gleichung

$$\int\varepsilon^{-t^2}dt.\int\varepsilon^{-t^2}dt = \frac{\pi}{4} \text{ oder}$$

$$\int\varepsilon^{-t^2}dt = \tfrac{1}{2}.\sqrt{\pi}$$

das letzte Integral von $t = 0$ bis $t = \infty$ genommen, also auch $\int\varepsilon^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, dieses Integral von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ genommen.

I. Dieses vorausgesetzt, wollen wir nun den Werth des Integrals $\int\varepsilon^{-t^2}dt$ zwischen den Gränzen $t = T$ und $t = \infty$ suchen, wo T irgend eine willkührliche Gröſse bezeichnet.

$$\text{Es ist} \int\varepsilon^{-t^2}dt = \int\frac{1}{t}.\varepsilon^{-t^2}tdt,$$

und wenn man theilweise integrirt,

$$\int\frac{1}{t}.\varepsilon^{-t^2}.tdt = \frac{1}{2t}.\varepsilon^{-t^2} - \tfrac{1}{2}\int\frac{\varepsilon^{-t^2}dt}{t^2}.$$

Setzt man diese theilweise Integration fort, so ist

$$\int\frac{\varepsilon^{-t^2}dt}{t^2} = \int\frac{1}{t^3}.\varepsilon^{-t^2}tdt = -\frac{1}{2t^3}.\varepsilon^{-t^2} - \tfrac{3}{2}\int\frac{\varepsilon^{-t^2}dt}{t^4} \text{ und}$$

$$\int\frac{\varepsilon^{-t^2}dt}{t^4} = \int\frac{1}{t^5}.\varepsilon^{-t^2}.tdt = -\frac{1}{2t^5}.\varepsilon^{-t^2} - \tfrac{5}{2}\int\frac{\varepsilon^{-t^2}dt}{t^6} \text{ u. f.}$$

woraus daher folgt

$$\int\varepsilon^{-t^2}dt = -\frac{\varepsilon^{-t^2}}{2t}.\left(1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{2^2.t^4} - \frac{1.3.5}{2^3.t^6} + \right)$$

Für $t = \infty$ ist das letzte Integral gleich Null, also ist der Werth des Integrals $\int\varepsilon^{-t^2}dt$ zwischen den Gränzen $t = T$ und $t = \infty$

$$\int\varepsilon^{-t^2}dt = \frac{\varepsilon^{-T^2}}{2T}.\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2.T^4} - \frac{1.3.5}{2^3.T^6} + \right)$$

Nach der Gleichung (a) des §. 13 hat man aber

$$\psi(n) = \varepsilon^{T^2}\int\varepsilon^{-t^2}dt, \text{ wo } T = \left(\frac{n\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.\text{Cotg}\,z \text{ ist,}$$

also ist auch

$$\psi(n) = \frac{1}{2T}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2T^4} - \frac{1.3.5}{2^3T^6} + \frac{1.3.5.7}{2^4T^8} - \right) \ldots . (b).$$

Da aber dieser Werth von $\psi(n)$ nur dann brauchbar ist, wenn $T > 3$ ist, so wollen wir noch einen andern Ausdruck von $\psi(n)$ suchen, der dann convergirt, wenn der erste divergirt. Man erhält ebenfalls durch theilweise Integrationen

$$\int \varepsilon^{-t^2} . dt = \varepsilon^{-t^2} . t + 2\int \varepsilon^{-t^2} . t^2 dt$$

$$\int \varepsilon^{-t^2} . t^2 dt = \varepsilon^{-t^2} . \frac{t^3}{3} + \frac{2}{3}\int \varepsilon^{-t^2} . t^4 dt \text{ u. s. f.}$$

und daraus folgt

$$\int \varepsilon^{-t^2} . dt = \varepsilon^{-t^2} . t \left(1 + \frac{2t^2}{3} + \frac{2^2t^4}{1.3.5} + \frac{2^3t^6}{1.3.5.7} + \ldots\right)$$

Für $t = 0$ ist dieses Integral selbst gleich Null, und für $t = T$ ist es gleich $\varepsilon^{-T^2} . T . \left(1 + \frac{2T^2}{3} + \frac{2^2T^4}{1.3.5} + \right)$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, der Werth desselben Integrals $\int \varepsilon^{-t^2} . dt$ von $t = 0$ bis $t = \infty$ gleich $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ist, so ist auch der Werth dieses Integrals von $t = T$ bis $t = \infty$

$$\int \varepsilon^{-t^2} . dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \varepsilon^{-T^2} . T . \left(1 + \frac{2T^2}{3} + \frac{2^2T^4}{1.3.5} + \ldots\right)$$

und daher

$$\psi(n) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} . \left(1 + T^2 + \frac{T^4}{1.2} + \frac{T^6}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$- T . \left(1 + \frac{2T^2}{1.3} + \frac{2^2T^4}{1.3.5} + \frac{2^3T^6}{1.3.5.7} + \ldots\right) \ldots . (c)$$

Die beyden Gleichungen (b) und (c) geben den gesuchten Werth der Funktion $\psi(n)$. Ist z. B. $T = 0.9$, so ist nach (b)

$$\begin{aligned}
& & 1.0000000 \\
-\frac{1}{2T^2} &= & -\,0.0079254 \\
+\frac{3}{2^2T^4} &= & +\,0.0001884 \\
-\frac{3.5}{2^3T^6} &= & -\,0.0000007 \\
\log & & 0.9922632 = 9.9966269 \\
\log \frac{1}{2T} & & = 8.7989700 \\
\log \psi(n) &= & 8.7955969
\end{aligned}$$

Eben so gibt T = 0.05 nach (c)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} &= \quad 0.8562270 \\ -\,T &= -\,0.0500000 \\ \tfrac{1}{2}T^2\sqrt{\pi} &= +\,0.0022156 \\ -\frac{2T^3}{1.3} &= -\,0.0000833 \\ \tfrac{1}{4}T^4\sqrt{\pi} &= +\,0.0000028 \\ -\frac{2}{3.5}T^5 &= -\,0.0000001 \\ \hline \psi(n) &= \quad 0.8383620 \end{aligned}$$

§. 15.

Um alles Vorhergehende besser zu übersehen, wollen wir die zur Berechnung der Refraction nothwendigen Ausdrücke hier zusammenstellen.

$$\alpha = 0.0002788844 \qquad \beta = 745.75$$

$$\log \alpha\beta = 9.3181259 \qquad \log\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.2857831$$

$$\log \frac{1}{(1-\alpha)\operatorname{Sin} 1''} \cdot \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = 4.0287632 \qquad k = \frac{\alpha\beta}{\operatorname{Sin}^2 z}$$

$$T = \left(\frac{n\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} . \operatorname{Cotg} z, \text{ wo } n = 1, 2, 3 \ldots.$$

$$\psi(n) = \frac{1}{2T} \cdot \left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2T^4} - \frac{1.3.5}{2^3T^6} + \frac{1.3.5.7}{2^4T^8} - \right)$$

oder wenn T klein ist

$$\psi(n) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} . \left(1 + T^2 + \frac{T^4}{1.2} + \frac{T^6}{1.2.3} + \right)$$
$$- T\left(1 + \frac{2T^2}{1.3} + \frac{2^2T^4}{1.3.5} + \frac{2^3T^6}{1.3.5.7} + \ldots\right)$$

$$P = k . \varepsilon^{-k} . \psi(1) + \frac{2^{\frac{3}{2}} . k^2 . \varepsilon^{-2k}}{1.2} \psi(2) + \frac{3^{\frac{5}{2}} . k^3 . \varepsilon^{-3k}}{1.2.3} . \psi(3) +$$

$$r = \frac{\operatorname{Sin}^2 z}{(1-\alpha)\operatorname{Sin} 1''} . \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} . P$$

Um darauf ein Beyspiel anzuwenden, sey die beobachtete Zenithdistanz z = 85°, so ist

$$\log k = 9.3214375, \quad \log(k . \varepsilon^{-k}) = 0.2303997$$

n	T	$\psi(n)$	P
1	0.2277349	9.4148572	0.0441557
2	0.3782499	9.2887076	0.0079437
3	0.4662955	9.2102461	0.0020706
4	0.5287649	9.1529194	0.0006332
5	0.5772199	9.1076781	0.0002118
6	0.6168105	9.0702913	0.0000750
7	0.6502839	9.0384253	0.0000277
8	0.6792799	9.0106511	0.0000105
9	0.7048561	8.9860350	0.0000041
10	0.7277347	8.9639334	0.0000016

$$\text{Summe } P = 0.0551339$$
$$\log P = 8.7414187$$
$$\log \text{Sin}^2 z = 9.9966884$$
$$4.0287632$$
$$\log r = 2.7668703$$
$$r = 584''.61.$$

§. 16.

Allein dieser Werth von r gilt, wie im Eingange des §. 13 gesagt wurde, für einen Zustand der Atmosphäre, in welchem das Barometer 29.6 engl. Zolle oder 27.773 Pariser Zolle, und das Thermometer + 50° Fahrenheit zeigt. Eigentlich zeigte das Thermometer Bradley's, welches hier zu Grunde gelegt wurde, alle Zahlen um 1.25 gegen Fahrenheit zu niedrig, so dafs jene Refraction für 48.75 des Bradley'schen Thermometers gilt. Nimmt man nun an, dafs ein Volum Luft für jeden Grad dieses Thermometers sich um seinen $h = 0.0020833^{sten}$ Theil ausdehnt, und dafs sich das Quecksilber des Barometers für jeden Grad des wahren Fahrenheitischen Thermometers um seinen $h' = 0.0001025^{sten}$ Theil ausdehnt, so hat man, wenn man die in §. 8 und 9 angenommene Bezeichnung von b und n beybehält, für die verbesserte Refraction r'

$$r' = r \cdot \left(\frac{1}{1 + h(t - 48.75)}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{27.773} \cdot \frac{1}{1 + h'(t' - 50)}\right)$$

wo t das äufsere Thermometer, t' das innere nach Fahrenheit, und wo b das Barometer in Pariser Zollen bezeichnet, und nach diesem Ausdrucke ist die Refractionstafel berechnet, welche Bessel in seinen Fund. astron. gegeben hat. M. s. Annalen der Wiener Sternwarte, Vol. IV. S. XXIX. An diesem Ausdrucke brachte der Verf. später (astron. Beob. in Königsberg Vol. VII.) noch folgende Verbesserungen an.

Die thermometrische Correction war oben

$$x = \frac{1}{1 + 0.0020833\,(t - 48.75)} \text{ also auch } x = \frac{0.997403}{1 + 0.0020779\,(t - 50)}$$

Aus seinen eigenen Beobachtungen fand Bessel, dafs dieser Factor von $(t - 50)$ genauer gleich 0.00194653 ist, so dafs man hat

$$x = \frac{0.997403}{1 + 0.00194653\,(t - 50)} = \frac{1.0336}{1 + 0.00202\,(t - 32)}$$

wofür er in Rücksicht auf kleine Unregelmäfsigkeiten seines Thermometers annahm

$$x = \frac{1.033908}{1 + 0.0020243\,(t - 32)}$$

Bezeichnet also t die Grade des äufseren Thermometers nach Réaumur, so ist die letzte Gleichung

$$x = \frac{1.033908}{1 + 0.004555\,t}$$

Der vorhergehende Factor des innern Thermometers war

$$y = \frac{1}{1 + 0.0001025\,(t' - 50)}$$

oder wenn t' ebenfalls Grade des Réaum. Thermometers bezeichnet

$$y = \frac{1.0018}{1 + 0.000231\,t'}$$

wofür er aus Rücksicht für die Ausdehnung der Barometerscale von Messing annimmt

$$y = \frac{1.00161}{1 + 0.0002252\,t'}$$

Endlich fand Bessel aus einer sorgfältigen Discussion seiner eigenen Beobachtungen, dafs die in §. 15 gegebene Refraction r, welche sich auf die Bradley'schen Beobachtungen gründete, noch um ihren 0.003282sten Theil vergröfsert werden soll, um seinen Beobachtungen ganz zu entsprechen.

Nimmt man alles Vorhergehende zusammen, so erhält man für die verbesserte Refraction

$$r' = r\,(1.003282)\left(\frac{1.033908}{1 + 0.004555\,t}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{27.773} \cdot \frac{1.00161}{1 + 0.0002252\,t'}\right)$$

oder was dasselbe ist

$$R = r\,(1.003282)(1.008173)(1.00161).(1.033908)^n\text{ , oder}$$

$$R = r\,(1.01311)(1.033908)^n$$

$$r' = R.\left(\frac{1}{1+0.004555\,t}\right)^n.\left(\frac{b}{28}.\frac{1}{1+0.0002252\,t'}\right)$$

wo t und t' das innere und äufsere Thermometer nach Réaumur, b das Barometer in Pariser Zollen, und wo endlich n die Bedeutung des §. 8 und 9 hat.

Setzt man in diesem Ausdrucke $t = t' = 0$ und $b = 28$, so erhält man $r' = R$, und diese Werthe der mittlern Refraction r findet man in der angehängten Tafel von $z = 85°$ bis $z = 90°$. Für kleinere Zenithdistanzen ist die Tafel, wie bereits erinnert wurde, nach der Gleichung (II) des §. 6 berechnet worden, welche letzte Gleichung mit dem hier gegebenen Werthe von R von $z = 0$ bis $z = 85°$ ganz übereinstimmende Resultate gibt, daher die ungemein bequemere Construction der Tafel nach der Gleichung (II) bis $z = 85°$ vorgezogen wurde.

So war in §. 15 für $z = 85°$, $r = 584''.61$, also hat man

$$\begin{aligned} \log r &= 2.76687 \\ \log 1.01311 &= 0.00566 \\ \log (1.033908)^n &= 0.01587 \\ \hline \log R &= 2.78840 \text{ wie in der Tafel.} \end{aligned}$$

§. 17.

Uebrigens läfst sich der gröfste Theil dieser Tafel von $z = 85°$ bis 90 auch berechnen, ohne für jeden Werth von z die oben §. 15 gegebenen etwas umständlichen Entwicklungen auszuführen.

Die in (2) des §. 6 gefundene Form der Refraction, die man allgemein so darstellen kann

$$r = \frac{A\,B\,\text{Sin}\,z}{\text{Cos}\,z + \sqrt{A^2 + \text{Cos}^2 z}} \quad \ldots (d)$$

wo A und B constante Gröfsen und zwar B die Horizontalrefraction für $z = 90°$ bezeichnet, ist geschickt, beynahe alle bisher gegebenen Refractionstafeln darzustellen, wenn man in ihr die Gröfse A mit den wachsenden Zenithdistanzen z nach irgend einem Gesetze langsam abnehmen läfst Es sey z. B. r die mittlere Refraction, wie sie Bessel in seinen Fund. Astr. nach den vorhergehenden Gleichungen des §. 15 gegeben hat, wo die Horizontalrefraction $B = 2166''.8$ angenommen wurde, und

$$A = a + b\,r + c\,r^2 + d\,r^3$$

Um die unbekannten Faktoren a b c d zu bestimmen, findet man zuerst aus jenen Tafeln für sehr kleine Zenithdistanzen, wo man die Gröfsen b c d vernachlässigen kann, den Werth von a=0.05325. Kennt man dann für einen gegebenen gröfsern Werth von z die Refraction r jener Tafel, so findet man den Werth von A unmittelbar durch die Gleichung (d) oder bequemer durch die Ausdrücke

$$\text{Tg}\,\psi = \frac{R}{r}\,\text{Sin}\,z \qquad A = -\text{Cos}\,z\,.\,\text{tg}\,2\psi$$

Nehmen wir also z. B. an, dafs man die Refraction r jener Tafeln durch die Formeln des §. 15 für drey grofse Zenithdistanzen berechnet, und dafs man so gefunden habe

$z = 77°$ - - $r = 244''.07$ also nach den $A = 0.052713$

$z = 85°$ - - $r = 584.61$ letzten $A = 0.050941$

$z = 89°$ - - $r = 1478.20$ Gleichungen $A = 0.044558$

Substituirt man diese Werthe von A und r nebst a = 0.05325 in der vorhergehenden Gleichung

$$A = a + b\,r + c\,r^2 + d\,r^3$$

so erhält man drey Gleichungen, aus welchen man die Werthe von b, c, d finden wird. Es ist

$$b = -\ 0.0000060173$$

$$c = -\ 0.000000007138$$

$$d = +\ 0.0000000000002412$$

und daher

$$A = 0.05325 - (0.7794017 - 7)\,r$$
$$- (0.8535765 - 9)\,r^2$$
$$+ (0.3823773 - 12)\,r^3$$

wo die Faktoren von r, r^2, r^3 schon Logarithmen sind. Mit diesem Werthe von A gibt dann die Gleichung (d)

$$\text{tg}\,x = \frac{A}{\text{Cos}\,z} \qquad r = 2166.8\ \text{Sin}\,z\ \text{tg}\,\frac{x}{2}.$$

Die folgende kleine Tafel ist durch diese drey letzten einfachen Gleichungen construirt worden.

Z	A	r	Bessel's Tafel r	Differenz
5°	0.053247	5″.04	5″.04	0″. 00
10	0.053243	10.16	10.15	0 . 01
20	0.053234	20.97	20.95	0 . 02
30	0.053222	33.26	33.22	0 . 04
40	0.053205	48 30	48.26	0 . 04
50	0.053176	68.54	68.48	0 . 06
60	0.053122	99.41	99.34	0 . 07
70	0.052990	156.90	156 75	0 . 15
80	0.052427	315.10	315.13	0 . 03
81	0.052277	348.13	348.14	0 . 01
83	0.051818	438.25	438.27	0 . 02
85	0.050941	584.57	584.61	0 . 04
87	0.049018	855.11	855.97	0 . 86
89	0.044554	1478.16	1478.20	0 . 04

eine Uebereinstimmung, die man bey so zusammengesetzten Ausdrücken, wie die des §. 15 sind, kaum erwarten sollte. Diese Bemerkung, auf die wir weiter unten wieder zurückkommen werden, kann nicht blofs dienen, die Construction jener Tafeln selbst ungemein abzukürzen, sondern sie wird selbst bey der Entwerfung ganz neuer Refractionstafeln, die unmittelbar aus astronomischen Beobachtungen abgeleitet sind, sehr anwendbar seyn.

§. 18.

Noch ist übrig, das Verfahren näher anzuzeigen, welches Laplace in seiner Mec. cel. Vol. IV anwendete, und nach welchen die von den Astronomen gewöhnlich gebrauchten Tafeln entworfen wurden, die Delambre in den Tables astr. du bureau des Longitudes gegeben hat.

Die letzte Gleichung des §. 3 geht, da s' ein sehr kleiner Bruch ist, wenn man 2 s Cos² z gegen Cos² z vernachlässiget, in folgende über,

$$dr = \frac{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\, d\varrho \,.\, \mathrm{Sin}\, z}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2 z - 2\alpha\,(1-\varrho) + 2\,s}}\,.$$

Um diesen Ausdruck einfacher zu machen, nehmen wir an

$$u = s - \alpha(1-\varrho), \text{ so ist}$$

$$dr = \frac{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\, d\varrho\, \mathrm{Sin}\, z}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2 z + 2\,u}}$$

Um die Abhängigkeit den Gröſsen ϱ und s, oder was dasselbe ist, der Gröſsen ϱ und u zu bestimmon, nimmt Laplace an

$$\varrho = \left(1 + \frac{fu}{g}\right) . \varepsilon^{-\frac{u}{g}}$$

wo wieder ε die Basis der natürlichen Logarithmen und wo f und g zwey Constanten sind, die erst nach der vollendeten Integration des vorhergehenden Ausdruckes für d r so bestimmt werden sollen, daſs sie den beobachteten Refractionen und besonders der beobachteten Horizontalrefraction entsprechen. Der angenommene Ausdruck von ϱ gibt

$$d\varrho = \frac{\varepsilon^{-\frac{u}{g}} du}{g} \left(f - 1 - \frac{fu}{g}\right)$$

und daher wird der vorhergehende Ausdruck der Refraction

$$dr = \frac{\alpha}{1-\alpha} . \frac{\frac{du}{g}\left(1 - f + \frac{fu}{g}\right) . \varepsilon^{-\frac{u}{g}} \operatorname{Sin} z}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 z + 2u}}$$

Sey der Kürze wegen, $\operatorname{Cos}^2 z + 2u = 2gt^2$, also auch $2gtdt = du$, so ist

$$dr = \frac{2\alpha dt \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} . \left(1 - f - f\frac{\operatorname{Cos}^2 z}{2g} + ft^2\right) . \varepsilon^{\frac{\operatorname{Cos}^2 z}{2g} - t^2},$$

und von diesem Ausdrucke soll das Integral zwischen den Gränzen $s = 0$ und $s = \infty$ d. h. von $u = 0$ bis $u = \infty$, oder endlich von $t = \frac{\operatorname{Cos} z}{\sqrt{2g}}$ bis $t = \infty$ genommen werden.

Sey wieder $T = \frac{\operatorname{Cos} z}{\sqrt{2g}}$ und $\int \varepsilon^{-t^2} dt = \varepsilon^{-T^2} \psi(T)$ so ist das Integral der vorhergehenden Gleichung

$$r = \frac{2\alpha \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} . (1 - f - fT^2) . \int \varepsilon^{T^2 - t^2} dt$$
$$+ \frac{2\alpha f \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} . \int t^2 \varepsilon^{T^2 - t^2} dt.$$

Um das letzte Integral $\int t^2 . \varepsilon^{-t^2} dt = \int t . \varepsilon^{-t^2} . t\, dt$ auf die Form

$$\int x\, dy = xy - \int y\, dx$$

zu bringen, sey $x = t$, $dy = \varepsilon^{-t^2} . t\, dt$ also auch $y = -\frac{1}{2}\varepsilon^{-t^2}$, und daher $\int t . \varepsilon^{-t^2} . t\, dt = -\frac{1}{2} t . \varepsilon^{-t^2} + \frac{1}{2}\int \varepsilon^{-t^2} dt$.

Unser vorhergehender Ausdruck von r wird daher in den folgenden übergehen

$$r = \frac{2\alpha \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} \cdot (1 - f - fT^2) \cdot \varepsilon^{T^2} \int \varepsilon^{-t^2} dt$$

$$+ \frac{2\alpha f \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} \cdot \varepsilon^{T^2} \cdot \left(-\tfrac{1}{2} t \varepsilon^{-t^2} + \tfrac{1}{2} \int \varepsilon^{-t^2} dt\right)$$

oder

$$r = \frac{2\alpha \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} \cdot (1 - f - fT^2)\, \psi\, T$$

$$+ \frac{2\alpha f \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} \cdot \left[-\tfrac{1}{2} t \varepsilon^{T^2 - t^2} + \tfrac{1}{2} \psi (T)\right]$$

für t = T ist dieser Ausdruck

$$\frac{2\alpha \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} \cdot (1-f-fT^2)\psi(T) + \frac{2\alpha f \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} \left[-\tfrac{1}{2} T + \tfrac{1}{2}\psi(T)\right]$$

und für t = ∞ ist er

$$\frac{2\alpha f \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} \cdot \frac{t \cdot \varepsilon^{-T^2}}{2\varepsilon^{t^2}} \text{ oder gleich Null.}$$

Der gesuchte Ausdruck von r zwischen den gegebenen Gränzen t = T und t = ∞ ist daher

$$r = \frac{2\alpha \operatorname{Sin} z}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} \cdot (1 - \tfrac{1}{2} f - fT^2) \cdot \psi(T) + \frac{\alpha f \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} z}{(1-\alpha)\, 2g} \;\ldots\; (6)$$

I. Für die Horizontalrefraction ist z = 90, also T = 0, und daher nach §. 14, $\psi(T) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, also auch die Refraction selbst

$$\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} \cdot (1 - \tfrac{1}{2} f).$$

Setzt man diese mit Laplace gleich 2106″, so ist

$$\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{(1-\alpha)\sqrt{2g}} \cdot (1 - \tfrac{1}{2} f) = 2106 \cdot \operatorname{Sin} 1''$$

und dieses ist eine Bedingungsgleichung zwischen den zwey zu bestimmenden Gröſsen f und g.

Weiter war (in §. 12) $dp = -\varrho\, ds$, oder wenn man den vorhergehenden Werth von $s = u + \alpha(1-\varrho)$ substituirt

$$dp = -\alpha\varrho\, du - \alpha\varrho\, d\varrho,$$

oder wenn man auch hier den gegebenen Werth von

$$\varrho = \left(1 + \frac{fu}{g}\right) . \varepsilon^{-\frac{u}{g}} \text{ substituirt,}$$

$$dp = \left(1 + \frac{fu}{g}\right) . \varepsilon^{-\frac{u}{g}} . du + \alpha \varrho d \varrho ,$$

und dessen Integral

$$p = \left[g + fg\left(\frac{u}{g} + 1\right)\right] . \varepsilon^{-\frac{u}{g}} + \tfrac{1}{2} \alpha \varrho^2 .$$

An der Oberfläche der Erde ist $\varrho = 1$ (§. 2) und $u = 0$, also die letzte Gleichung $p = g(1 + f) + \frac{1}{2}\alpha$, oder da die Barometerhöhe p der Höhe l der Atmosphäre über der Erdoberfläche proportionirt ist,

$$l = g(1 + f) + \tfrac{1}{2}\alpha,$$

welches die zweyte der gesuchten Bedingungsgleichungen zwischen den Gröſsen f und g ist.

Setzt man mit Laplace $l = 0.0012525$ Halbmesser der Erde, und $\alpha = 60''.61627$, so geben diese zwey Bedingungsgleichungen $f = 0.49042$ und $g = 0,000741816$,

also geht die vorhergehende Gleichung (6) in folgende über

$$r = 2790''.1584(0.75479 - 0.49042 T^2) \text{Sin}\, z . \frac{2\psi(T)}{\sqrt{\pi}} + 10021''.417 \text{ Sin}\, 2z \; \; (7)$$

wo $T = 25.961924 \text{ Cos } z$, und

$\psi(T) = \varepsilon^{T^2} \int \varepsilon^{-t^2} dt$, das Integral von $t = T$ bis $t = \infty$ genommen.

Nach diesem Ausdrucke (7) berechnete Delambre die Refractionstafel der Tables astron. du bureau des Longit. I^ere partie von $z = 74°$ bis $z = 90°$. Für kleinere Zenithdistanzen aber ist dieselbe Tafel von $z = 0$ bis $z = 74°$ nach der vorletzten Gleichung des §. 12, d. h. nach der Formel

$$r = \alpha \text{ tg } z \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\alpha(2 \text{ Cos}^2 z + 1) - 0.00125254}{\text{Cos}^2 z}\right)$$

Nach derselben Gleichung (7) hat auch Carlini (Mayl. Ephem. für 1817) die Refractionstafeln gegeben, die auch hier (Vol. II. S. 450) enthalten sind. Von einer etwas veränderten Bestimmung der Constanten α und l ausgehend, entwickelte er seine Tafel nach der Formel

$$r = 1624'' \text{ Sin}\, z\left[(2 - a - 2aT^2)\,\psi(T) + aT\right]$$

wo $a = 0.7175935$, $T = 28 \operatorname{Cos} z$, und $\psi(T) = \varepsilon^{T^2} . \int \varepsilon^{-t^2} . dt$ das Integral von $t = T$ bis $t = \infty$ genommen. (Vergl. I. S. 78.)

Diese Refractionstafel von C a r l i n i läſst sich, nach der Bemerkung des §. 17 bis auf die letzten drey Grade von z durch den einfachen Ausdruck darstellen

$$r = \frac{A B \operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos} z + \sqrt{A^2 + \operatorname{Cos}^2 z}}$$

wo $B = 1845''.7$ die Horizontalrefraction dieser Tafeln, und wo $A = 0.06265 - 0.00002 \operatorname{tg} z$ ist. Setzt man nämlich

$$\operatorname{tg} x = \frac{A}{\operatorname{Cos} z}, \text{ so ist } r = 1845''.7 \operatorname{Sin} z \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdots (e)$$

und man findet

z	Gleichung (e)	Carlini's Tafel	Differenz
20°	21″. 1	21″. 1	0″. 0
40	48 . 5	48 . 6	0 . 1
60	99 . 8	100 . 0	0 . 2
70	157 . 4	157 . 9	0 . 5
80	317 . 3	317 . 9	0 . 6
81	350 . 8	351 . 3	0 . 5
82	391 . 6	392 . 0	0 . 4
83	442 . 2	442 . 6	0 . 4
84	506 . 6	506 . 7	0 . 1
85	590 . 5	590 . 2	0 . 3
86	703 . 0	702 . 6	0 . 4
87	858 . 6	858 . 8	0 . 2

und man würde ohne Zweifel die Annäherung noch höher treiben, wenn man, wie in §. 7, die Gröſse $A = a + br + cr^2 + dr^3 +$ annähme.

§. 19.

Zum Schlusse dieses Gegenstandes wollen wir nun auch die t e r r e s t r i s c h e R e f r a c t i o n, d. h. diejenige Strahlenbrechung untersuchen, welche der Lichtstrahl leidet, wenn er von einem niedrigen terrestrischen Gegenstande in das Auge des Beobachters kommt. Da die Höhe dieser Gegenstände, in Beziehung auf ihre Entfernung, von dem Beobachter nur sehr klein vorausgesetzt wird, so ist es hier zweckmäſsiger, die Refraction nicht mehr, wie bey der eigentlich astronomischen Strahlenbrechung, als eine Funktion der Höhe des Gegenstandes, sondern als eine Funktion von der Entfernung, d. h. von dem Winkel zu geben, welchen die zwey Halbmesser der Erde in ihrem Mittelpunkte bilden, die nach dem Beobachter und nach dem irdischen Objecte gezogen werden. Ist aber ν dieser Winkel, und, wie in §. 2,

$(1+x)$ die Entfernung des Objectes von dem Mittelpunkte der Erde, in Halbmessern der Erde ausgedrückt, und u das Loth von dem Mittelpunkte der Erde auf die Tangente der Curve des Lichtstrahles, so ist aus bekannten geometrischen Gründen (Analyt. Geom. S. 393)

$$d\nu = \frac{u\,dx}{(1+x)\sqrt{(1+x)^2 - u^2}}$$

Es war aber (§. 2) $u = \frac{\text{Sin}\,z \,.\, \sqrt{1+\frac{4k}{c^2}}}{\sqrt{1+\frac{4k\varrho}{c^2}}}$, also ist auch

$$d\nu = \frac{dx\,\text{Sin}\,z\,.\,\sqrt{1+\frac{4k}{c^2}}}{(1+x)^2\,.\,\sqrt{1+\frac{4k\varrho}{c^2} - \left(1+\frac{4k}{c^2}\right)\frac{\text{Sin}^2 z}{(1+x)^2}}}$$

und daher die letzte Gleichung des §. 2,

$$dr = \frac{-\frac{2k}{c^2}\,.\,d\varrho\,.\,(1+x)\,\frac{d\nu}{dx}}{1+\frac{4k\varrho}{c^2}}$$

Da die Höhe des Objectes sehr klein ist, so hat man sehr nahe $\varrho = 1 - \frac{mx}{l}$, wo m eine constante Gröſse ist, die von der Abnahme der Temperatur der atmosphärischen Schichten mit ihrer Höhe über der Erde abhängt. Substituirt man diesen Ausdruck von ϱ in der letzten Gleichung, so hat man

$$dr = \frac{\frac{2km}{c^2 l}\cdot(1+x)\,d\nu}{1+\frac{4k}{c^2}\left(1-\frac{mx}{l}\right)},$$

oder da x und $\frac{4k}{c^2}$ sehr kleine Gröſsen sind,

$$dr = \frac{2km}{c^2 l}\cdot d\nu,$$ also auch dessen Integral

$$r = \frac{2km}{c^2 l}\,.\,\nu,$$

wo r die Summe der terrestrischen Refraction an dem Objecte und an dem Beobachter ist. Da aber die Refraction an diesen beyden Endpunkten der Curve sehr nahe dieselbe ist, so ist die gesuchte terrestrische Refraction R gleich $\frac{r}{2}$, oder es ist

$$R = \frac{km}{c^2 l} \cdot \nu \ldots (f)$$

für eine gleichförmige Temperatur der Atmosphäre ist m = 1. Ferner ist nach §. 5

$$\frac{4k}{c^2} = 2\,\alpha = 0.00058256, \text{ und nach §. 18, } l = 0.0012525,$$

also ist die terrestrische Refraction

$$R = \frac{0.00014564}{0.0012525} \cdot \nu = \frac{\nu}{8.60} = (0.116) \cdot \nu.$$

Man könnte die Gleichung (f) auch noch auf folgende Art bestimmen. Aus §. 18 I. folgt

$$\varrho = \left(1 + \frac{f}{g}\,u\right) \cdot \varepsilon^{-\frac{u}{g}} \text{ oder da g sehr klein ist,}$$

$$\varrho = \left(1 + \frac{f}{g}\,u\right), \text{ und überdiefs } u = x - \alpha\,(1 - \varrho).$$

Aus diesen beyden Gleichungen aber folgt, wenn man u eliminirt

$$\varrho = 1 - \frac{f}{g - \alpha f} \cdot x$$

Es war aber $\alpha = 0.00029128$, $f = 0.49042$ und $g = 0.000741816$, also ist $\varrho = 1 - (818.78)\,x$. Oben aber wurde $\varrho = 1 - \frac{m}{l} \cdot x$ angenommen. Setzt man daher in der Gleichung (f) statt $\frac{m}{l}$ die Gröfse 818·78, und $\frac{k}{c^2} = 0.00014564$, so ist

$$R = \frac{k}{c^2} \cdot \frac{m}{l} \cdot \nu = \frac{\nu}{8.39} = (0.119)\,\nu$$

nahe wie zuvor. Vergl. Vol. I. S. 329. Doch ist dieser Faktor von ν sehr veränderlich, da m es ebenfalls ist, und es kann geschehen, dafs die oberen Luftschichten sogar dichter sind, als die unteren, so dafs die terrestrische Refraction die irdischen Gegenstände nicht mehr erhöht, sondern erniedriget, wodurch bekanntlich die Fata Morgana und andere ähnliche Erscheinungen erklärt werden.

§. 20.

Endlich läſst sich auch durch den vorhergehenden Ausdruck der Refraction die Schwächung bestimmen, welche das Licht der Gestirne leidet, wenn es durch die Atmosphäre der Erde geht. Ist ϑ die Intensität des Lichtes bey dessen Ankunft in einer der atmosphärischen Schichten, deren Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde $(1+x)$ ist, die Intensität bey dem Eintritte in die Atmosphäre als Einheit vorausgesetzt, so ist offenbar

$$d\vartheta = -Q\varrho\varepsilon.ds$$

wo ds das Element des Bogens, welchen das Licht beschreibt, und wo Q eine constante Gröſse bezeichnet. Es ist aber

$$ds^2 = [d.(1+x)]^2 + (1+x)^2 d\nu^2 = dx^2 + (1+x)^2 d\nu^2$$

oder da x gegen die Einheit sehr klein ist

$$ds^2 = dx^2 + d\nu^2.$$

Nach §. 19 ist aber, wenn man die sehr kleine Gröſse $\frac{4k}{c^2}$ vernachlässiget und wieder $x = 0$ setzt,

$$d\nu = dx.\operatorname{tg} z$$

also ist auch $ds^2 = \frac{dx^2}{\operatorname{Cos}^2 z}$, und daher die erste der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{Q\varrho}{\operatorname{Cos} z}.dx$$

Nach §. 12 ist aber $\int\varrho\, dx$ der Höhe des Barometers oder der Höhe l der Atmosphäre (§. 18) proportional, also ist das Integral der letzten Gleichung

$$\log \vartheta = -\frac{Q}{\operatorname{Cos} z}.\int\varrho\, dx = -\frac{Q.l}{\operatorname{Cos} z}$$

Nennt man Θ den Werth von ϑ für das Zenith, wo $\operatorname{Cos} z = 1$, so ist $\log \Theta = -Q.l$, also auch

$$\log \vartheta = \frac{\log \Theta}{\operatorname{Cos} z}$$

Den Werth von Θ kann man erhalten, wenn man die Intensitäten des Lichtes eines Gestirnes für zwey verschiedene Zenithdistanzen vergleicht. Auf diese Art fand Bouguer, daſs das Licht eines Gestirnes im Zenithe des Beobachters, wenn es die Atmosphäre der Erde zurückgelegt hat, auf seinen 0.8123sten Theil reduzirt wird. Der brig. Logarithmus dieser Zahl ist 0.90972 — 1 oder — 0.09028, also findet man die Intensität des Lichtes für jede andere Zenithdistanz durch den Ausdruck

$$\log \text{brig}\, \Theta = \frac{0.09028}{\text{Cos}\, z}$$

Die folgende Refractionstafel gibt den Werth von r und n nach §. 9, den ersten bis z = 85°. Für gröfsere Zenithdistanzen ist der Werth von r oder eigentlich von R nach den Ausdrücken des §. 15 und nach der vorletzten Gleichung des §. 16 berechnet worden. Die drey angehängten Tafeln geben die Werthe von

$\frac{b}{28}$ für das Barometer b Par. Zolle

$\frac{1}{1+0.000225\, t'}$ für das innere Therm. Reum. t'

$\frac{1}{1+0.004555\, t}$ für das äufsere Therm. Reaum. t

Die corrigirte Refraction r' ist dann

$$r' = r \cdot \frac{b}{28} \cdot \frac{1}{1+0.000225\, t'} \cdot \left(\frac{1}{1+0.00455\, t}\right)^n$$

Exempel: z = 84° 23′ 54″

b = 28.75 Par. Zolle t' = — 14.0 inn. Therm. R.

t = — 18.0 äufs. Therm. R.

z gibt $\log r = 2.7476$ und $n = 1.081$

$$b \text{ - - - } \log \frac{b}{B} = 0.0114$$

$$t' \text{ - } \log \frac{1}{1+0.000225\, t'} = 0.0014$$

$$t \text{ - } n \log \frac{1}{1+0.00455\, t} = 0.0402$$

$$\log r' = 2.8006$$

$$r' = 631''.9 = 10'\, 31''\, 9$$

$$t \text{ - } \log \frac{1}{1+0.00455\, t} = 0.0372$$

$$(0.0372)\, n = 0.0402.$$

Refractions-Tafeln für Barometer, 28.0 Par. Zolle und 0° Therm. Réaumur.

z		log r	Diff. für 1 Min. 0.000	z		log r	Diff. für 1 Min. 0.000
0°	0′	- - - -		10°	0′	1.0247	72
	20	9 5432			20	1.0393	70
	40	9 8443			40	1.0534	68
1	0	0.0204		11	0	1.0671	66
	20	0.1453			20	1.0804	64
	40	0.2422			40	1.0933	63
2	0	0.3213		12	0	1.1059	61
	20	0.3882			20	1.1182	59
	40	0.4465			40	1.1301	58
3	0	0.4976		13	0	1.1418	56
	20	0.5432			20	1.1532	55
	40	0.5845			40	1.1643	54
4	0	0.6231		14	0	1.1752	53
	20	0.6578			20	1.1858	52
	40	0.6902			40	1.1963	51
5	0	0.7205		15	0	1.2064	50
	20	0.7487			20	1.2165	49
	40	0.7750			40	1.2262	48
6	0	0.8001		16	0	1.2359	47
	20	0.8238			20	1.2453	46
	40	0.8460			40	1.2546	45
7	0	0.8676		17	0	1.2637	44
	20	0.8880			20	1.2727	44
	40	0.9074			40	1.2815	43
8	0	0.9262	89	18	0	1.2902	42
	20	0.9442	86		20	1.2987	42
	40	0.9615	83		40	1.3071	41
9	0	0.9781	80	19	0	1.3153	40
	20	0.9942	77		20	1.3234	40
	40	1.0097	75		40	1.3315	39

z	log r	Diff. für 1 Min. 0.000	z	log r	Diff. für 1 Min. 0.000
20° 0′	1.3394	39	30° 0′	1.5397	29
20	1.3472	38	20	1.5455	29
40	1.3549	38	40	1.5513	29
21 0	1.3625	37	31 0	1.5570	29
20	1.3700	37	20	1.5628	28
40	1.3774	36	40	1.5684	28
22 0	1.3852	35	32 0	1.5741	28
20	1.3920	35	20	1 5797	27
40	1.3991	35	40	1.5852	27
23 0	1.4062	34	33 0	1.5907	27
20	1.4132	34	20	1.5962	27
40	1.4201	34	40	1.6018	27
24 0	1.4269	34	34 0	1.6072	27
20	1.4337	34	20	1.6126	27
40	1.4404	33	40	1.6180	27
25 0	1.4470	33	35 0	1.6234	27
20	1.4536	32	20	1.6288	26
40	1.4601	32	40	1.6341	26
26 0	1.4665	32	36 0	1.6394	26
20	1.4729	31	20	1.6447	26
40	1.4792	31	40	1.6500	26
27 0	1.4855	31	37 0	1.6553	26
20	1.4917	31	20	1.6605	26
40	1.4979	30	40	1.6657	26
28 0	1.5040	30	38 0	1.6710	26
20	1.5101	30	20	1.6761	26
40	1.5161	29	40	1.6813	26
29 0	1.5220	30	39 0	1.6865	26
20	1.5280	29	20	1.6917	26
40	1.5339	29	40	1.6968	26

z	log r	Diff. für 1 Min. 0.000	n	z	log r	Diff. für 1 Min. 0.000	n
40°0′	1.7020	25		48°0′	1.8235	25	1.002
20	1.7071	25		10	1.8260	25	1.002
40	1.7122	25		20	1.8285	26	1.002
41 0	1.7173	25		30	1.8311	25	1.002
20	1.7224	25		40	1.8336	25	1.003
40	1.7274	25		50	1.8361	26	1.003
42 0	1.7325	25		49 0	1.8387	25	1.003
20	1.7376	25		10	1.8412	26	1.003
40	1.7427	25		20	1.8438	25	1.003
43 0	1.7477	25		30	1.8463	26	1.003
20	1.7527	25		40	1.8489	25	1.003
40	1.7578	25		50	1.8514	26	1.003
44 0	1.7628	25		50 0	1.8540	26	1.004
20	1.7579	25		10	1.8566	25	1.004
40	1.7729	25		20	1.8591	26	1.004
45 0	1.7780	25	1.001	30	1.8617	26	1.004
20	1.7830	25	1.001	40	1.8643	25	1.004
40	1.7881	25	1.001	50	1.8668	26	1.004
46 0	1.7931	25	1.001	51 0	1.8694	26	1.005
10	1.7956	25	1.001	10	1.8720	26	1.005
20	1.7982	25	1.001	20	1.8746	25	1.005
30	1.8007	25	1.001	30	1.8771	26	1.005
40	1.8032	25	1.001	40	1.8797	26	1.005
50	1.8057	25	1.001	50	1.8823	26	1.005
47 0	1.8083	25	1.002	52 0	1.8849	26	1.006
10	1.8108	25	1.002	10	1.8875	26	1.006
20	1.8133	25	1.002	20	1.8901	26	1.006
30	1.8158	26	1.002	30	1.8927	26	1.006
40	1.8184	26	1.002	40	1.8953	26	1.006
50	1.8209	25	1.002	50	1.8979	26	1.006

z	log r	Diff. für 1 Min. 0.000	n	z	log r	Diff. für 1 Min. 0.000	n
53° 0′	1.9005	26	1.007	58° 0′	1.9815	28	1.009
10	1.9032	27	1.007	10	1.9843	28	1.009
20	1.9058	27	1.007	20	1.9871	29	1.009
30	1.9084	27	1.007	30	1.9900	28	1.009
40	1.9111	26	1.007	40	1.9928	28	1.009
50	1.9137	26	1.007	50	1.9956	28	1.009
54 0	1.9163	27	1.008	59 0	1.9985	28	1.009
10	1.9190	26	1.008	10	2.0013	29	1.009
20	1.9216	27	1.008	20	2.0042	28	1.009
30	1.9243	27	1.008	30	2.0070	29	1.009
40	1.9270	26	1.008	40	2.0090	29	1.009
50	1.9296	27	1.008	50	2.0128	29	1.009
55 0	1.9323	27	1.008	60 0	2.0157	29	1.009
10	1.9350	27	1.008	10	2.0186	29	1.009
20	1.9377	27	1.008	20	2.0215	29	1.009
30	1.9404	27	1.008	30	2.0244	30	1.009
40	1.9431	27	1.008	40	2.0274	29	1.009
50	1.9458	27	1.008	50	2.0303	30	1.009
56 0	1.9485	27	1.008	61 0	2.0333	29	1.009
10	1.9512	27	1.008	10	2.0362	30	1.009
20	1.9539	28	1.008	30	2.0392	30	1.009
30	1.9567	27	1.008	30	2.0422	30	1.009
40	1.9594	27	1.008	40	2.0452	30	1.009
50	1.9621	28	1.008	50	2.0482	30	1.009
57 0	1.9649	27	1.009	62 0	2.0512	31	1.009
10	1.9676	28	1.009	10	2.0543	30	1.009
20	1.9704	28	1.009	20	2.0573	31	1.009
30	1.9732	28	1.009	30	2.0604	30	1.909
40	1.9760	27	1.009	40	2.0634	31	1.009
50	1.9787	28	1.009	50	2.0665	31	1.009

z	log r	Diff. für 1 Min. 0.000	n	z	log r	Diff. für 1 Min. 0.000	n
63° 0′	2.0696	31	1.009	68° 0′	2.1694	36	1.011
10	2.0727	31	1.009	10	2.1730	36	1.011
20	2.0758	32	1.009	20	2.1766	37	1.011
30	2.0790	31	1.009	30	2.1803	36	1.011
40	2.0821	32	1.009	40	2.1839	37	1.011
50	2.0853	31	1.009	50	2.1876	37	1.011
64 0	2.0884	32	1.009	69 0	2.1913	38	1.011
10	2.0916	32	1.009	10	2.1951	37	1.011
20	2.0948	32	1.009	20	2.1988	38	1.011
30	2.0980	33	1.009	30	2.2026	38	1.011
40	2.1013	32	1.009	40	2.2064	39	1.011
50	2.1045	33	1.009	50	2.2103	38	1.011
65 0	2.1078	33	1.010	70 0	2.2141	39	1.011
10	2.1111	32	1.010	10	2.2180	39	1.011
20	2.1143	33	1.010	20	2.2219	40	1.011
30	2.1176	34	1.010	30	2.2259	39	1.012
40	2.1210	33	1.010	40	2.2298	40	1.012
50	2.1243	34	1.010	50	2.2338	41	1.012
66 0	2.1277	34	1.010	71 0	2.2379	40	1.012
10	2.1311	33	1.010	10	2.2419	41	1.012
20	2.1344	34	1.010	20	2.2460	41	1.012
30	2.1378	35	1.010	30	2.2501	42	1.012
40	2.1413	34	1.010	40	2.2533	41	1.012
50	2.1447	35	1.010	50	2.2584	42	1.012
67 0	2.1482	35	1.010	72 0	2.2626	42	1.013
10	2.1517	35	1.010	10	2.2668	43	1.013
20	2.1552	35	1.010	20	2.2711	43	1.013
30	2.1587	35	1.010	30	2.2754	44	1.013
40	2.1622	36	1.010	40	2.2798	43	1.013
50	2.1658	36	1.010	50	2.2841	44	1.013

z	log r	Diff. für 1 Min. 0.000	n	z	log r	Diff. für 1 Min. 0.000	n
73°0'	2.2885	44	1.014	78°0'	2.4417	60	1.024
10	2.2929	45	1.014	10	2.4477	61	1.024
20	2.2974	46	1.014	20	2.4537	62	1.025
30	2.3020	45	1.014	30	2.4599	62	1.026
40	2.3065	46	1.014	40	2.4661	63	1.026
50	2.3111	47	1.015	50	2.4724	64	1.027
74 0	2.3158	46	1.015	79 0	2.4788	66	1.027
10	2.3204	47	1.015	10	2.4852	65	1.027
20	2.3251	48	1.015	20	2.4917	67	1.028
30	2.3300	48	1.016	30	2.4984	67	1.028
40	2.3347	49	1.016	40	2.5051	68	1.029
50	2.3396	49	1.016	50	2.5119	69	1.030
75 0	2.3445	49	1.017	80 0	2.5188	70	1.031
10	2.3494	50	1.017	10	2.5258	71	1.032
20	2.3544	50	1.017	20	2.5328	72	1.033
30	2.3594	51	1.018	30	2.5401	73	1.034
40	2.3645	52	1.018	40	2.5474	75	1.035
50	2.3697	52	1.018	50	2.5549	75	1.036
76 0	2.3749	52	1.019	81 0	2.5624	77	1.037
10	2.3801	53	1.019	10	2.5701	78	1.038
20	2.3854	53	1.019	20	2.5779	79	1.039
30	2.3907	54	1.020	30	2.5858	80	1.041
40	2.3962	55	1.020	40	2.5938	81	1.042
50	2.4016	56	1.021	50	2.6019	83	1.043
77 0	2.4072	56	1.021	82 0	2.6102	84	1.045
10	2.4128	56	1.021	10	2.6186	86	1.047
20	2.4184	57	1.022	20	2.6272	87	1.049
30	2.4241	58	1.022	30	2.6359	89	1.051
40	2.4299	59	1.023	40	2.6449	90	1.053
50	2.4358	59	1.023	50	2.6539	92	1.055

z	log r	Diff. für 1 Min. 0.00	n
83°0′	2.6631	093	1.057
10	2.6724	096	1.059
20	2.6820	097	1.062
30	2.6917	099	1.064
40	2.7016	101	1.067
50	2.7117	103	1.069
84 0	2.7221	105	1.072
10	2.7326	107	1.076
20	2.7433	110	1.080
30	2.7543	112	1.084
40	2.7655	114	1.088
50	2.7769	117	1.092
85 0	2.7888	120	1.096
10	2.8009	124	1.101
20	2.8132	126	1.106
30	2.8259	130	1.112
40	2.8388	133	1.118
50	2.8521	136	1.124
86 0	2.8658	140	1.130
10	2.8798	144	1.138
20	2.8942	148	1.144
30	2.9089	153	1.153
40	2.9241	157	1.161
50	2.9398	161	1.171
87 0	2.9559	166	1.181
10	2.9725	171	1.192
20	2.9896	177	1.203
30	3.0073	182	1.215
40	3.0255	188	1.228
50	3.0444	195	1.243
88 0	3.0639	202	1.259
10	3.0840	209	1.276
20	3.1049	217	1.292
30	3.1266	225	1.309
40	3.1491	234	1.328
50	3.1725	243	1.348
89 0	3.1968	253	1.368
10	3.2222	264	1.389
20	3.2486	276	1.410
30	3.2762	288	1.432
40	3.3051	302	1.454
50	3.3353	317	1.477
90 0	3.3670		1.500

Barometer in Pariser Zollen.

b		b		b		b	
25.0	9.9508	5	9.9761	28.0	0.0000	5	0.0227
1	9.9525	6	9.9777	1	0.0015	6	0.0241
2	9.9542	7	9.9794	2	0.0031	7	0.0256
3	9.9560	8	9.9810	3	0.0046	8	0.0271
4	9.9577	26.9	9.9826	4	0.0062	29.9	0.0285
5	9.9594	27.0	9.9842	5	0.0077	30.0	0.0300
6	9.9611	1	9.9858	6	0.0092	1	0.0314
7	9.9628	2	9.9874	7	0.0107	2	0.0328
8	9.9645	3	9.9890	8	0.0122	3	0.0343
25.9	9.9661	4	9.9906	28.9	0.0137	4	0.0357
26.0	9.9678	5	9.9922	29.0	0.0152	5	0.0371
1	9.9695	6	9.9938	1	0.0167	6	0.0386
2	9.9711	7	9.9953	2	0.0182	7	0.0400
3	9.9728	8	9.9969	3	0.0197	8	0.0414
4	9.9745	27.9	9.9985	4	0.0212	30.9	0.0428

Inneres Thermometer Réaumur.

t′		t′		t′		t′	
— 0°	0.0000	+ 0°	0.0000	—20°	0.0020	+20°	9.9980
— 5	0.0005	+ 5	9.9995	—25	0.0024	+25	9.9976
—10	0.0010	+10	9.9990	—30	0.0029	+30	9.9971
—15	0.0015	+15	9.9985				

Aeufseres Thermometer Réaumur.

t +		t —		t +		t —	
0°	0.0000	0°	+0.0000	15°	—0.0287	15°	+0.0307
1	—0.0020	1	0.0020	16	—0.0305	16	0.0329
2	—0.0039	2	0.0040	17	—0.0324	17	0.0350
3	—0.0059	3	0.0060	18	—0,0342	18	0.0372
4	—0.0078	4	0.0080	19	—0.0360	19	0.0393
5	—0.0098	5	0.0100	20	—0.0379	20	0.0415
6	—0.0117	6	0.0120	21	—0.0397	21	0.0437
7	—0.0136	7	0.0141	22	—0.0415	22	0.0459
8	—0.0155	8	0.0161	23	—0.0433	23	0.0481
9	—0.0174	9	0.0182	24	—0.0451	24	0.0503
10	—0.0193	10	0.0202	25	—0.0468	25	0.0525
11	—0.0212	11	0.0223	26	—0.0486	26	0.0547
12	—0.0231	12	0.0244	27	—0.0504	27	0.0570
13	—0.0250	13	0.0265	28	—0.0521	28	0.0593
14	—0.0268	14	0.0286	29	—0.0539	29	0.0615

SIEBENZEHNTES KAPITEL.

Bewegung der Planeten im widerstehenden Mittel.

§. 1.

Um die Bewegung der Körper unseres Planetensystemes in einem widerstehenden Mittel zu finden, welches als eine Flüssigkeit von sehr geringer Dichte die Sonne nach allen Seiten umgibt, sey $\varphi\left(\frac{1}{r}\right)$ die Dichte dieser Flüssigkeit in der Entfernung r von dem Mittelpunkte der Sonne, und ds das Element der Bahn, welches der Planet in dem Augenblicke dt zurücklegt, so wird der Widerstand, welchen der Planet in der Richtung seines Weges von diesem Mittel leidet, gleich $k.\varphi\left(\frac{1}{r}\right).\frac{ds^2}{dt^2}$ seyn, wenn man, wie gewöhnlich, annimmt, daſs der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportionirt ist, und wenn k einen constanten Faktor bezeichnet, der von der Gestalt und der Dichte der Planeten abhängt. Dieser Widerstand, in der Ebene der Planetenbahn betrachtet, und nach der Richtung der rechtwinklichten Coordinaten der x und y zerlegt, wird seyn

$$k.\varphi\left(\frac{1}{r}\right).\frac{ds\,dx}{dt^2}\text{ . und }k.\varphi\left(\frac{1}{r}\right).\frac{ds\,dy}{dt^2}.$$

Bezeichnet man daher, wie in Kap. X. §. 7 die Kräfte, welche auf den Planeten nach der Richtung der x und der y wirken, durch $-\left(\frac{dR}{dx}\right)$ und $-\left(\frac{dR}{dy}\right)$, so wird man hier haben

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)=k.\varphi\left(\frac{1}{r}\right).\frac{ds\,dx}{dt^2}$$

$$\left(\frac{dR}{dy}\right)=k.\varphi\left(\frac{1}{r}\right).\frac{ds\,dy}{dt^2}$$

Weiter ist nach demselben Kapitel §. 10, wenn man die Summe μ der Massen der Sonne und der Planeten für die Einheit nimmt,

$$d \cdot \frac{1}{a} = 2\, dR.$$

Vernachlässiget man aber die dritte Coordinate z, so ist Kap. IX. §. 1 das vollständige Differential von R, oder

$$dR = \left(\frac{dR}{dx}\right) dx + \left(\frac{dR}{dy}\right) dy,$$

also ist auch

$$d \cdot \frac{1}{a} = 2 \left(\frac{dR}{dx}\right) dx + 2 \left(\frac{dR}{dy}\right) dy \text{ oder } d \cdot \frac{1}{a} = 2k \cdot \varphi \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{ds^3}{dt^2}$$

Ferner ist Kap. X. §. 8

$$df = dy \left\{ y \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \left(\frac{dR}{dy}\right) \right\} + (y\,dx - x\,dy) \left(\frac{dR}{dy}\right)$$

$$df' = dx \left\{ x \left(\frac{dR}{dy}\right) - y \left(\frac{dR}{dx}\right) \right\} + (x\,dy - y\,dx) \left(\frac{dR}{dy}\right)$$

und $f = e \operatorname{Cos} w$, $f' = e \operatorname{Sin} w$, wo e das Verhältniſs der Excentricität zur halben groſsen Axe der Planetenbahn, und w die Länge des Periheliums bezeichnet. Substituirt man in diesen Ausdrücken von f und f' die vorhergehenden Werthe von $\left(\frac{dR}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dR}{dy}\right)$, so erhält man

$$d \cdot (e \operatorname{Sin} w) = 2k \cdot \varphi \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{dx\,ds}{dt^2} \cdot (x\,dy - y\,dx)$$

$$d \cdot (e \operatorname{Cos} w) = -2k \cdot \varphi \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{dy\,ds}{dt^2} \cdot (x\,dy - y\,dx).$$

Endlich ist Kap. IX. §. 1 $\mu = n^2 a^3$, also auch

$$dn = -\frac{3n\,da}{2a} = \frac{3an}{2\mu} \cdot d \cdot \frac{\mu}{a},$$

oder da $d \cdot \frac{\mu}{a} = 2\,dR$ und $\mu = 1$ ist, $dn = 3an \cdot dR$ das heiſst

$$dn = 3k \cdot an \cdot \varphi \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{ds^3}{dt^2}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen wird man die Aenderungen der drey Elemente a e und w der Planetenbahn erhalten, wel-

che durch den Widerstand des Mittels erzeugt werden, da die Lage der Bahn oder die Neigung und die Länge der Knoten derselben durch diesen Widerstand offenbar nicht geändert werden können.

§. 2.

Nach Kap. VII. §. 4 ist $p = a(1-e^2)$ und

$$x\,dy - y\,dx = dt.\sqrt{a(1-e^2)}, \text{ so wie}$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,\mathrm{Cos}(v-w)}, \text{ und endlich überhaupt}$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,dv^2}$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort

$$ds = \frac{r^2\,dv.\sqrt{1+2e\,\mathrm{Cos}(v-w)+e^2}}{a(1-e^2)}$$

und da nach Kap. VII. Gleichung (6) $dt = \dfrac{r^2\,dv}{\sqrt{a(1-e^2)}}$ ist,

$$\frac{ds^3}{dt^2} = \frac{r^2\,dv.[1+2e\,\mathrm{Cos}(v-w)+e^2]^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-e^2)^2}$$

Es war aber $d.\frac{1}{a} = 2k.\varphi\left(\frac{1}{r}\right).\frac{ds^3}{dt^2}$ also ist auch

$$d.\frac{1}{a} = \frac{2k.\varphi.\left(\frac{1}{r}\right)}{a^2(1-e^2)^2}.r^2\,dv\,[1+2e\,\mathrm{Cos}(v-w)+e^2]^{\frac{3}{2}}$$

Nehmen wir an, daſs der Ausdruck

$$k.\varphi\left(\frac{1}{r}\right).r^2\,[1+2e\,\mathrm{Cos}\,(v-w)+e^2]^{\frac{1}{2}}$$

in eine Reihe der Form

$$A + eB.\mathrm{Cos}(v-w) + e^2\,C.\mathrm{Cos}\,2(v-w) +$$

entwickelt sey, so ist

$$d.\frac{1}{a} = \frac{2\,dv}{a^2(1-e^2)^2}.[1+2\,e\mathrm{Cos}(v-w)+e^2].[A+eB\mathrm{Cos}(v-w)+]$$

$$= \frac{2\,dv}{a^2(1-e^2)^2}\times$$

$$\left(A+eB\mathrm{Cos}(v-w)+2Ae\mathrm{Cos}(v-w)+e^2B[1+\mathrm{Cos}2(v-w)]+e^2A\right)$$

oder wenn man die blofs periodischen Glieder, die hier aufser unserer Betrachtung fallen, wegläfst,

$$d.\frac{1}{a}=\frac{2\,d\nu}{a^2(1-e^2)^2}.[A(1+e^2)+e^2B].$$

Weiter ist $x=r\,Cos\,\nu$ und $y=r\,Sin\,\nu$, also auch

$$dx=dr\,Cos\,\nu-r\,d\nu\,Sin\,\nu \text{ und}$$

$$dy=dr\,Sin\,\nu+r\,d\nu\,Cos\,\nu$$

Allein die Gleichung $r=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\,Cos\,(\nu-w)}$ gibt

$$dr=\frac{r\,e\,d\nu\,Sin\,(\nu-w)}{1+e\,Cos(\nu-w)}$$

also auch, wenn man diesen Werth von dr in dem vorhergehenden Ausdrucke von dx substituirt,

$$dx=\frac{-r\,e\,d\nu\,Sin\,w-r\,d\nu\,Sin\,\nu}{1+e\,Cos\,(\nu-w)}, \text{ oder}$$

$$dx=-\frac{r^2\,d\nu}{a(1-e^2)}.[Sin\,\nu+e\,Sin\,w], \text{ und eben so}$$

$$dy=\frac{r^2\,d\nu}{a(1-e^2)}.[Cos\,\nu+e\,Cos\,w].$$

Substituirt man diese Werthe von ds, dx, $d\cdot$ in den vorhergehenden Ausdrücken von $d.(e\,Sin\,w)$ und $d.(e\,Cos\,w)$, und setzt

$$dt=\frac{r^2\,d\nu}{\sqrt{a(1-e^2)}} \text{ und } k.\varphi\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{A+e\,B\,Cos\,(\nu-w)}{r^2\sqrt{1+2e\,Cos(\nu-w)+e^2}},$$

so erhält man

$$d.(e\,Sin\,w)=-\frac{2[A+e\,B\,Cos\,(\nu-w)]}{a(1-e^2)}[Sin\,\nu+e\,Sin\,w].d\nu$$

$$=-\frac{2\,d\nu}{a(1-e^2)}.[A\,Sin\,\nu+B\,e\,Sin\,\nu\,Cos\,(\nu-w)+A\,e\,Sin\,w]$$

oder, wenn man die periodischen Glieder wegläfst, also $A\,Sin\,\nu=0$ und $B\,e\,Sin\,\nu\,Cos(\nu-w)=B\,e\,Sin\,\nu(Cos\,\nu\,Cos\,w+Sin\,\nu\,Sin\,w)$ $=\frac{1}{2}B\,e\,Sin\,w(1-Cos\,2\nu)-\frac{1}{2}B\,e\,Sin\,w$ setzt

$$d.(e\,Sin\,w)=-\frac{(2A+B)\,e\,Sin\,w}{a(1-e^2)}.d\nu$$

und eben so

$$d.(e\,Cos\,w)=-\frac{(2A+B)\,e\,Cos\,w}{a(1-e^2)}.d\nu.$$

Multiplicirt man die ersten dieser beyden Gleichungen durch Sin w, und die zweyte durch Cos w, so gibt ihre Summe

$$de = -\frac{(2A + B)\,e\,d\nu}{a(1 - e^2)}.$$

Multiplicirt man aber die erste durch Cos w, und die zweyte durch Sin w, so gibt ihre Differenz

$$dw = 0.$$

Die vorletzte Gleichung gibt die gesuchte Aenderung der Excentricität der Planetenbahn, welche durch die Wirkung des widerstehenden Mittels entsteht, und die letzte Gleichung zeigt, daſs die Länge des Periheliums oder die Lage der groſsen Axe der Planetenbahn durch das widerstehende Mittel keine Aenderung leidet.

§. 3.

Eliminirt man aus den beyden vorhergehenden Ausdrücken, welche $d.\frac{1}{a}$ und de durch $d\nu$ geben, die Gröſse $d\nu$, so erhält man

$$de = \frac{(2A + B)\,e\,(1 - e^2)}{2a\,[A(1 + e^2) + e^2 B]} \cdot da$$

und das Integral dieser Gleichung gibt die Gröſse e als eine Funktion von a; substituirt man dann diese Funktion in der oben erhaltenen Gleichung

$$da = -\frac{2\,[A(1 + e^2) + e^2 B]}{(1 - e^2)^2} \cdot d\nu$$

so erhält man durch die Integration auch die Gröſse ν als Funktion von a, oder auch a als Function von ν.

Um aber den Werth von ν als Funktion der Zeit t zu erhalten, so hat man, wenn man die periodischen Glieder wegläſst, wie Kap X. §. 2, $d\nu = n\,dt$ und überdieſs $n\,a^{\frac{3}{2}} = 1$, also auch

$$dt = a^{\frac{3}{2}} \cdot d\nu$$

Substituirt man in dieser Gleichung den vorhin erhaltenen Werth von a durch ν, und integrirt, so erhält man die Gröſse t als Function von ν und umgekehrt, ν als Function von t.

§. 4.

Setzt man voraus, daſs die Bahn des Planeten nur sehr wenig excentrisch ist, so hat man, wenn man die zweyten Potenzen von e wegläſst,

$$k\,\varphi\left(\frac{1}{r}\right) \cdot r^2\,[1 + 2e\,\mathrm{Cos}\,(\nu - w) + e^2]^{\frac{1}{2}} = A + eB\,\mathrm{Cos}\,(\nu - w)$$

oder da

$$r = a[1 - e\,\mathrm{Cos}(\nu - w)],\ \text{also}\ r^2 = a^2[1 - 2e\,\mathrm{Cos}(\nu - w)]\ \text{ist},$$

$$k\varphi\left(\frac{1}{r}\right)a^2[1 - 2e\mathrm{Cos}(\nu - w)].[1 + e\mathrm{Cos}(\nu - w)] = A + eB\mathrm{Cos}(\nu - w)$$

oder

$$k\varphi\left(\frac{1}{r}\right)a^2[1 - e\,\mathrm{Cos}(\nu - w)] = A + e\,B\,\mathrm{Cos}(\nu - w)$$

und diese Gleichung gibt

$$A = k\,a^2 \cdot \varphi\left(\frac{1}{r}\right)\ \text{und}\ B = -\ k\,a^2 . \varphi\left(\frac{1}{r}\right) = -A$$

Vernachlässiget man aber die zweyte Potenz von e, so geben die zwey ersten Gleichungen des §. 3

$$da = -2A\,d\nu\ \text{und}\ \frac{de}{e} = \frac{(2A + B)}{2aA}\,da$$

also ist auch, wenn man $\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$ statt $\varphi\left(\frac{1}{r}\right)$ setzt,

$$\left.\begin{array}{l} da = -2\,k\,a^2 \cdot \varphi\left(\frac{1}{a}\right).\,d\nu\ \text{und} \\ \frac{de}{e} = -\,k\,a \cdot \varphi\left(\frac{1}{a}\right).\,d\nu \end{array}\right\}$$

Da nun die Dichte des widerstehenden Mittels oder die Gröſse $\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$ ihrer Natur nach immer eine positive Gröſse ist, so folgt aus den beyden letzten Gleichungen, daſs durch den Widerstand des Mittels b e y d e Gröſsen a und e immer k l e i n e r werden, oder daſs sich der Planet der Sonne immer mehr nähert, während zugleich seine Bahn immer mehr kreisförmig wird. Dividirt man die beyden letzten Gleichungen durch einander, so erhält man

$$\frac{da}{a} = 2\,\frac{de}{e}$$

und wenn man integrirt

$$\log a . C^2 = 2 \log e\ \text{das heiſst}\ e = C . \sqrt{a}$$

wo C eine Constante ist, woraus ebenfalls folgt, daſs wenn a abnimmt, auch e immer kleiner wird.

ACHTZEHNTES KAPITEL.

Abweichung freyfallender Körper von der Verticale.

§. 1.

Seyen XYZ die senkrechten Coordinaten eines Körpers, welcher in einer beträchtlichen Höhe über der Oberfläche unserer Erde der Wirkung der Schwere überlassen wird, wo Y in der Ebene des Meridians liegt, in welcher sich der anfängliche Ort des Körpers befand, während Z mit dem Aequator parallel ist. Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt A dieser drey Coordinatenaxen sey irgend ein willkührlicher Punkt der Rotationsaxe der Erde.

Dieselbe Lage des Körpers kann auch noch durch drey andere senkrechte Coordinaten x y z gegen denselben Anfangspunkt A so bestimmt werden, dafs y senkrecht auf den anfänglichen Meridian des Körpers, und z parallel mit der Richtung der Schwere ist. Wählt man dann den Punkt A der Rotationsaxe der Erde so, dafs für ihn $x = a$, $y = o$ und $z = b$ ist, und bezeichnet man durch φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, und durch w den Winkel, um welchen sich die Erde in der Zeit t von West gen Ost dreht, so findet man die Abhängigkeit dieser zwey Coordinatensysteme, wenn man Kap. IV. §. 2 in den Gleichungen, welche $x' y z'$ durch $x y z$ geben, die Gröfsen $\vartheta\ \psi$ und φ in derselben Ordnung in $90 - \varphi$, $90 - w$ und $90°$ verwandelt, so dafs man hat

$$\left.\begin{aligned} x &= X \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} w + Y \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin} w - Z \operatorname{Cos}\varphi + a \\ y &= Y \operatorname{Cos} w - X \operatorname{Sin} w \\ z &= X \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} w + Y \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} w + Z \operatorname{Sin}\varphi + b \end{aligned}\right\}$$

also auch durch Umkehrung

$$\left.\begin{aligned} X &= (x-a) \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} w - y \operatorname{Sin} w + (z-b) \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} w \\ Y &= (x-a) \operatorname{Sin} w \operatorname{Sin}\varphi + y \operatorname{Cos} w + (z-b) \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} w \\ Z &= (z-b) \operatorname{Sin}\varphi - (x-a) \operatorname{Cos}\varphi \end{aligned}\right\}$$

Differentiirt man die drey letzten Ausdrücke zweymahl in Beziehung auf XYZ, auf xyz und auf ω, so ist

$$d^2 X = d^2 x \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\omega - d^2 y \operatorname{Sin}\omega + d^2 z \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\omega$$
$$-2\,d\omega\,(dx \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\omega + dy \operatorname{Cos}\omega + dz \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\omega) - X\,d\omega^2$$
$$d^2 Y = d^2 x \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\omega + d^2 y \operatorname{Cos}\omega + d^2 z \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\omega$$
$$+ 2\,d\omega(dx \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\omega - dy \operatorname{Sin}\omega + dz \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\omega) - Y\,d\omega^2$$
$$d^2 Z = - d^2 x \operatorname{Cos}\varphi + d^2 z \operatorname{Sin}\varphi$$

Ist aber g die Schwere, und der Kürze wegen

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

so hat man für die Bewegung des Körpers (Kap. II. §. 2)

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{gX}{r} \\ o &= \frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{gY}{r} \\ o &= \frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{gZ}{r} \end{aligned}\right\} . \text{(A)}$$

§. 2.

Aus den vorhergehenden Gleichungen leitet Gaufs (Benzenberg's Versuche über das Gesetz des Falls, Dortmund 1804) folgende einfache Bestimmung der Abweichung frey fallender Körper von der Verticale ab.

Multiplicirt man die Gleichungen (A) nach der Ordnung durch $\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\omega$, $\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\omega$ und $\operatorname{Cos}\varphi$, so gibt die Summe dieser Produkte

$$\frac{d^2 X}{dt^2} \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\omega + \frac{d^2 Y}{dt^2} \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\omega + \frac{d^2 Z}{dt^2} \operatorname{Cos}\varphi = P$$

Multiplicirt man sie aber durch $-\operatorname{Sin}\omega$, $\operatorname{Cos}\omega$ und o, so ist

$$-\frac{d^2 X}{dt^2} \operatorname{Sin}\omega + \frac{d^2 Y}{dt^2} \operatorname{Cos}\omega = Q$$

Multiplicirt man sie endlich durch $\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\omega$, $\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\omega$ und $\operatorname{Sin}\varphi$, so ist

$$\frac{d^2 X}{dt^2} \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\omega + \frac{d^2 Y}{dt^2} \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\omega + \frac{d^2 Z}{dt^2} \operatorname{Sin}\varphi = R$$

wo die Gröfse P, Q und R, die man nicht erst zu entwickeln

braucht, offenbare Functionen von X, Y, Z ohne den Differentialen von X, Y, Z sind. Substituirt man in den drey letzten Gleichungen für $d^2 X$, $d^2 Y$ und $d^2 Z$ die oben gegebenen Werthe dieser Grösen, so erhält man, wenn man der Kürze wegen $n = \frac{d\alpha}{dt}$ setzt, folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2 x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt}\operatorname{Sin}\varphi + P' \\ o &= \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n\left(\frac{dx}{dt}.\operatorname{Sin}\varphi + \frac{dz}{dt}.\operatorname{Cos}\varphi\right) + Q' \\ o &= \frac{d^2 z}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt}.\operatorname{Cos}\varphi + R' \end{aligned}\right\}$$

wo P′, Q′, R′ wieder Funktionen von x y z ohne den Differentialien dieser Grösen sind.

Da aber die Versuche, welche über diesen Gegenstand von uns angestellt werden können, immer nur in so kleinen Höhen über oder unter der Oberfläche der Erde angestellt werden, dass man die Schwere g als constant, und ihre Richtung als parallel mit der Axe der z annehmen kann, so wird es erlaubt seyn, die vorhergehenden Grösen P′ und Q′ gleich Null und R′ = g zu setzen. Man hat daher für die in dem leeren Raume frey fallenden Körper folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2 x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt}.\operatorname{Sin}\varphi \\ o &= \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n\left(\frac{dx}{dt}.\operatorname{Sin}\varphi + \frac{dz}{dt}\operatorname{Cos}\varphi\right) \\ o &= \frac{d^2 z}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt}.\operatorname{Cos}\varphi + g \end{aligned}\right\} \ldots (B)$$

§. 3.

Um die Gleichungen (B) zu integriren, multiplicire man die erste derselben durch Sin φ, und die dritte durch Cos φ, so gibt die Summe dieser Produkte, wenn man sie integrirt,

$$o = \frac{dx}{dt}\operatorname{Sin}\varphi + \frac{dz}{dt}\operatorname{Cos}\varphi - 2ny + gt\operatorname{Cos}\varphi$$

wo die Constante der Integration verschwindet, weil

$$y = \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = o \text{ für } t = o \text{ ist.}$$

Aber die zweyte der Gleichungen (B) gibt

$$\frac{dx}{dt}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \frac{dz}{dt}\,\mathrm{Cos}\,\varphi = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{d^2y}{dt^2},$$

also ist die vorhergehende Gleichung

$$o = \frac{d^2y}{dt^2} + 4n^2y - 2gnt\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

Da aber von $o = \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha^2 y - \beta t$ das Integral ist

$$y = -\frac{A}{\alpha}\,\mathrm{Sin}\,(\alpha t + B) + \frac{\beta t}{\alpha^2},$$

so ist auch das Integral des vorhergehenden Ausdruckes

$$y = -\frac{A}{2n}\,\mathrm{Sin}\,(2nt + B) + \frac{gt}{2n}\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

oder, da

$$y = \frac{dy}{dt} = o \text{ für } t = o \text{ ist, } B = o \text{ und } A = \frac{g}{2n}\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

also auch

$$y = \frac{g}{2n}\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\left(t - \frac{1}{2n}\,\mathrm{Sin}\,2nt\right)$$

welches das erste der gesuchten Integrale ist.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{2n}\,(1 - \mathrm{Cos}\,2nt)$$

also ist auch die erste der Gleichungen (B)

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} - g\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,(1 - \mathrm{Cos}\,2nt)$$

wovon das letzte Integral ist

$$o = x - \tfrac{1}{2}gt^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi - \frac{g}{4n^2}\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,2nt + Ct + C'$$

Da aber wieder $x = \frac{dx}{dt} = o$ für $t = o$, so ist $C = o$ und

$$C' = \frac{g}{4n^2}\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$ also auch

$$x = \frac{g}{2n} \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi \left(n t^2 - \frac{1}{2n}(1 - \operatorname{Cos} 2nt)\right)$$

welches das zweyte der gesuchten Integrale ist.

Substituirt man denselben vorhergehenden Werth von $\frac{dy}{dt}$ in der dritten der Gleichungen (B), so ist

$$o = \frac{d^2 z}{dt^2} + g \operatorname{Sin}^2\varphi + g \operatorname{Cos}^2\varphi \operatorname{Cos} 2nt$$

und davon ist das letzte Integral

$$o = z + \tfrac{1}{2} g t^2 \operatorname{Sin}^2\varphi - \frac{g}{4n^2} \operatorname{Cos}^2\varphi \operatorname{Cos} 2nt + Ct + C'$$

Da aber $z = \frac{dz}{dt} = o$ für $t = o$, so ist $C = o$ und $C' = \frac{g}{4n^2} \operatorname{Cos}^2\varphi$, also auch das dritte der gesuchten Integrale

$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + \frac{g \operatorname{Cos}^2\varphi}{2n} \left(n t^2 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \operatorname{Cos} 2nt\right)$$

Wir haben daher für die Auflösung unseres Problemes folgende drey Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{g}{2n} \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi . \left(n t^2 - \frac{1}{2n}(1 - \operatorname{Cos} 2nt)\right) \\ y &= \frac{g}{2n} \operatorname{Cos}\varphi \cdot \left(t - \frac{1}{2n} \operatorname{Sin} 2nt\right) \\ z &= -\tfrac{1}{2} g t^2 + \frac{g}{2n} \operatorname{Cos}^2\varphi \cdot \left(n t^2 - \frac{1}{2n}(1 - \operatorname{Cos} 2nt)\right) \end{aligned}\right\}$$

Löſst man die Gröſsen Sin 2 n t und Cos 2 n t in Reihen auf, indem man die fünfte und höheren Potenzen von n t vernachlässiget, so hat man als Endresultat

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{g n^2 t^4}{6} \cdot \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi \\ y &= \frac{g n t^3}{3} \cdot \operatorname{Cos}\varphi \\ z &= -\tfrac{1}{2} g t^2 + \frac{g n^2 t^4}{6} \operatorname{Cos}^2\varphi \end{aligned}\right\} \ldots (C)$$

und in diesen Ausdrücken bezeichnet x die Abweichung der

während der Zeit t fallenden Körper von der Verticale in der Richtung des Meridians oder gegen Süden und y dieselbe Abweichung in einer auf den Meridian senkrechten Richtung oder gegen Osten.

Die Gröfse n ist der Bogen, welchen jeder Punkt der Erde in einer Sekunde mittlerer Zeit durch die Rotation der Erde zurücklegt, also da der Sterntag gleich $23^h 56' 4'' 092 = 86164.092$ Sekunden mittlerer Zeit ist,

$$n = \frac{360.60^2}{86164 \cdot 092} = 15.041$$

Da die Zeit t des Falls immer nur wenige Sekunden beträgt, so wird man $z = \frac{1}{2} g t^2$ setzen können, woraus folgt

$$y = \tfrac{2}{3}\, n t z \,\text{Cos}\,\varphi \,.\, \text{Sin}\, 1''$$

$$x = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{z}\, \text{tg}\, \varphi$$

Benzenbergs Versuche wurden in einer Fallhöhe von 235 Par. Fufs angestellt, und die Zeit des Falls war $t = 4$ Sekunden, so wie die Polhöhe des Beobachtungsortes $\varphi = 53^\circ\, 33'$. Ist also $z = 235 \,.\, 12^2$, so gibt die erste der beyden vorhergehenden Gleichungen

$$y = 3.91 \text{ Par. Linien}, \text{ und die zweyte}$$

$$x = 0 \cdot 0005$$

oder ein Körper, der durch 235 Fufs fällt, wird 3.91 Linien gegen Ost, und nur 0.0005 Linien oder nichts gegen Süd oder Nord abweichen, und mit diesem Resultate der Rechnung stimmten auch die Versuche Benzenbergs sehr nahe überein.

Ist $g = (29.37)\, 12^2 = 4230$ Linien, so gibt die zweyte der Gleichungen (C)

$$y = \frac{g n t^3}{3} \text{Cos}\,\varphi\, \text{Sin}\, 1'' = (0.1028)\, t^3\, \text{Cos}\,\varphi$$

wo t die Zeit der Fallhöhe in Sekunden und y die östliche Abweichung in Par. Linien bezeichnet; oder da $z = \frac{1}{2} g t^2$ ist,

$$y = \frac{2^{\frac{3}{2}}\, n}{3\sqrt{g}} \,.\, z^{\frac{3}{2}}\, \text{Cos}\,\varphi = (0.00000106)\, z^{\frac{3}{2}}\, \text{Cos}\,\varphi$$

wo die Fallhöhe z und die Abweichung y in Linien ausgedrückt ist. Die erste dieser beyden Gleichungen gibt die gesuchte östliche Abweichung durch die Zeit, die zweyte durch die Fallhöhe. Für den Fall der Körper in einem widerstehenden Mittel endlich findet man sehr nahe dasselbe Resultat, nähmlich (Méc. cél. Vol. IV. pag. 301)

Bayerische Staatsbibliothek München

$$y = \frac{g n t^3}{3} \cos\varphi \sin 1'' . (1 - \tfrac{1}{4} g m t^2)$$

wo g m den Widerstand bezeichnet, welchen die Luft der Bewegung des Körpers entgegen setzt. Im leeren Raume, oder was dasselbe ist, wenn m unendlich klein ist, geht die letzte Gleichung in

$$y = \frac{g n t^3}{3} \cos\varphi \sin 1''$$

über, die mit der oben gegebenen identisch ist.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Michael Fuchs.